УДК 531.38

©2015. **Г.В. Горр, Г.А. Котов**

О МАЯТНИКОВЫХ ДВИЖЕНИЯХ ГИРОСТАТА, НЕСУЩЕГО ДВА РОТОРА

Получены два новых решения уравнений маятниковых движений гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае, когда тело-носитель снабжено двумя вращающимися роторами.

Ключевые слова: *маятниковые движения, вращающийся ротор.*

Введение. Задача о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом поставлена в работах Ж. Лиувилля [1], Н.Е. Жуковского [2], В.В. Румянцева [3], П.В. Харламова [4]. Результаты, полученные в этой задаче, изложены в монографиях [5–7]. Движение гиростата рассматривалось на основе двух подходов. В первом подходе гиростатический момент принадлежит некоторой оси в теле-носителе. То есть тело-носитель имеет один вращающийся ротор. При таком предположении изучены равномерные вращения [8], маятниковые движения [9] и прецессионные движения [10–13] гиростата. Во втором подходе предполагается, что тело-носитель имеет два вращающихся ротора [14–16].

Данная работа посвящена изучению маятниковых движений гиростата, несущего два вращающихся ротора. Ранее [15] эти движения рассматривались при условии, что гиростатический момент ортогонален оси вращения гиростата. Здесь исследованы новые маятниковые движения не только в случае [15], но и в случае, когда ось вращения одного ротора сонаправлена с осью вращения тела-носителя, а ось второго ротора ортогональна оси вращения гиростата.

На основе метода инвариантных соотношений для неавтономных дифференциальных уравнений [17] построены два новых решения уравнений движений гиростата с переменным гиростатическим моментом.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, несущего два ротора [4, 7]:

$$(A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\omega})^{\bullet} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}(t)) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{s}) + \boldsymbol{\omega} \times B\boldsymbol{\nu}, \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{2}$$

Уравнения (1), (2) имеют два первых интеграла

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}(t)) \cdot \boldsymbol{\nu} = k, \tag{3}$$

где k – произвольная постоянная.

В (1)–(3) обозначено: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости тела-носителя; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей,

$A = (A_{ij})$ – тензор инерции в неподвижной точке O; $B = (B_{ij})$, $C = (C_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор обобщенного центра масс гиростата; точка над переменными обозначает относительную производную по времени t; $\boldsymbol{\lambda}(t)$ – гиростатический момент, характеризующий движение двух вращающихся роторов:

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \lambda_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \lambda_2(t)\boldsymbol{\beta}. \tag{4}$$

В (4) $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ – единичные и ортогональные векторы, т. е.

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0, \quad |\boldsymbol{\alpha}| = 1, \quad |\boldsymbol{\beta}| = 1. \tag{5}$$

Пусть тело-носитель совершает маятниковое движение со скоростью $\dot{\varphi}$ вокруг вектора $\boldsymbol{э}$ в неподвижном пространстве. Тогда

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\ \boldsymbol{э}, \quad \frac{d\ \boldsymbol{э}}{dt} = \mathbf{0}, \tag{6}$$

т. е. $\dot{\boldsymbol{э}} = \mathbf{0}$ и вектор $\boldsymbol{э}$ неподвижен и в теле-носителе. Если обозначить через $\boldsymbol{a}$ неизменно связанный с телом-носителем единичный вектор, с которым совпадает вектор $\boldsymbol{э}$, то из (6) получим

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{a}, \tag{7}$$

где $\dot{\varphi}$ – скорость собственного вращения.

Предположим, что вектор $\boldsymbol{a}$ не совпадает с вектором $\boldsymbol{\nu}$. Обозначим через θ_0 постоянный угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{\nu}$. Для инвариантного соотношения (ИС) (7) имеет место равенство

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0 \quad (a_0 = \cos\theta_0). \tag{8}$$

Внесем выражение для $\boldsymbol{\omega}$ из (7) в уравнение (2)

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \dot{\varphi}(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{a}). \tag{9}$$

Так как маятниковое движение (7) можно рассматривать как частный случай прецессионных движений [11], то для вектора $\boldsymbol{\nu}$ получим (подвижную систему введем по аналогии с [11]: $\boldsymbol{a} = (0, 0, 1)$):

$$\nu_1 = a_0' \sin\varphi, \quad \nu_2 = a_0' \cos\varphi, \quad \nu_3 = a_0, \tag{10}$$

где $a_0' = \sin\theta_0$. При подстановке выражений (10) в геометрический интеграл из (3) и в уравнения (8), (9) приходим к тождествам. Внесем $\boldsymbol{\omega}$ из (7) в уравнение (1):

$$\begin{gathered}\dot{\lambda}_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \dot{\lambda}_2(t)\boldsymbol{\beta} = \dot{\varphi}\lambda_1(t)(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{a}) + \dot{\varphi}\lambda_2(t)(\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{a}) - \ddot{\varphi}A\boldsymbol{a} + \\ + \dot{\varphi}^2(A\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{\nu} - \dot{\varphi}(B\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{\nu} \times C\boldsymbol{\nu}.\end{gathered} \tag{11}$$

Следуя [14], для записи уравнения (11) в скалярной форме используем базис $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$. Тогда из (11) найдем

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1(t) = \gamma_3\dot{\varphi}\lambda_2(t) - \mu_0\ddot{\varphi} + \mu_1\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}(\mu_2\sin\varphi + \mu_3\cos\varphi + \mu_4) + \\ +\mu_5\sin 2\varphi + \mu_6\cos 2\varphi + \mu_7\sin\varphi + \mu_8\cos\varphi + \mu_9, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_2(t) = -\gamma_3\dot{\varphi}\lambda_1(t) - \varepsilon_0\ddot{\varphi} + \varepsilon_1\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}(\varepsilon_2\sin\varphi + \varepsilon_3\cos\varphi + \varepsilon_4) + \\ +\varepsilon_5\sin 2\varphi + \varepsilon_6\cos 2\varphi + \varepsilon_7\sin\varphi + \varepsilon_8\cos\varphi + \varepsilon_9; \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(\beta_3\lambda_1(t) - \alpha_3\lambda_2(t)) - \sigma_0\ddot{\varphi} + \sigma_1\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}(\sigma_2\sin\varphi + \sigma_3\cos\varphi + \sigma_4) + \\ +\sigma_5\sin 2\varphi + \sigma_6\cos 2\varphi + \sigma_7\sin\varphi + \sigma_8\cos\varphi + \sigma_9, \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, \quad \gamma_2 = \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3, \quad \gamma_3 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1, \\
&\mu_0 = A_{13}\alpha_1 + A_{23}\alpha_2 + A_{33}\alpha_3, \ \varepsilon_0 = A_{13}\beta_1 + A_{23}\beta_2 + A_{33}\beta_3, \\
&\sigma_0 = A_{13}\gamma_1 + A_{23}\gamma_2 + A_{33}\gamma_3, \\
&\mu_1 = \alpha_1 A_{23} - \alpha_2 A_{13}, \quad \varepsilon_1 = \beta_1 A_{23} - \beta_2 A_{13}, \quad \sigma_1 = \gamma_1 A_{23} - \gamma_2 A_{13}, \\
&\mu_2 = a_0'(\alpha_2 B_{11} - \alpha_1 B_{12}), \quad \varepsilon_2 = a_0'(\beta_2 B_{11} - \beta_1 B_{12}), \quad \sigma_2 = a_0'(\gamma_2 B_{11} - \gamma_1 B_{12}), \\
&\mu_3 = a_0'(\alpha_2 B_{12} - \alpha_1 B_{22}), \quad \varepsilon_3 = a_0'(\beta_2 B_{12} - \beta_1 B_{22}), \quad \sigma_3 = a_0'(\gamma_2 B_{12} - \gamma_1 B_{22}), \\
&\mu_4 = a_0(\alpha_2 B_{13} - \alpha_1 B_{23}), \quad \varepsilon_4 = a_0(\beta_2 B_{13} - \beta_1 B_{23}), \quad \sigma_4 = a_0(\gamma_2 B_{13} - \gamma_1 B_{23}), \\
&\mu_5 = \frac{1}{2}{a_0'}^2[\alpha_1 C_{13} - \alpha_2 C_{23} + \alpha_3(C_{22} - C_{11})], \\
&\mu_6 = \frac{1}{2}{a_0'}^2[\alpha_1 C_{23} + \alpha_2 C_{13} - 2\alpha_3 C_{12}], \\
&\mu_7 = a_0'[-\alpha_1 a_0 C_{12} + \alpha_2(s_3 - a_0(C_{33} - C_{11})) - \alpha_3(s_2 - a_0 C_{23})], \\
&\mu_8 = a_0'[-\alpha_1(s_3 - a_0(C_{33} - C_{22})) + \alpha_2 a_0 C_{12} + \alpha_3(s_1 - a_0 C_{13})], \\
&\mu_9 = \frac{1}{2}\alpha_1[2a_0 s_2 + ({a_0'}^2 - 2{a_0}^2)C_{23}] - \frac{1}{2}\alpha_2[2a_0 s_1 + ({a_0'}^2 - 2{a_0}^2)C_{13}], \\
&\varepsilon_5 = \frac{1}{2}{a_0'}^2[\beta_1 C_{13} - \beta_2 C_{23} + \beta_3(C_{22} - C_{11})], \\
&\varepsilon_6 = \frac{1}{2}{a_0'}^2[\beta_1 C_{23} + \beta_2 C_{13} - 2\beta_3 C_{12}], \\
&\varepsilon_7 = a_0'[-\beta_1 a_0 C_{12} + \beta_2(s_3 - a_0(C_{33} - C_{11})) - \beta_3(s_2 - a_0 C_{23})], \\
&\varepsilon_8 = a_0'[-\beta_1(s_3 - a_0(C_{33} - C_{22})) + \beta_2 a_0 C_{12} + \beta_3(s_1 - a_0 C_{13})],
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\varepsilon_9 = \frac{1}{2}\beta_1[2a_0 s_2 + ({a'_0}^2 - 2a_0^2)C_{23}] - \frac{1}{2}\beta_2[2a_0 s_1 + ({a'_0}^2 - 2a_0^2)C_{13}],$$

$$\sigma_5 = \frac{1}{2}{a'_0}^2[\gamma_1 C_{13} - \gamma_2 C_{23} + \gamma_3(C_{22} - C_{11})], \quad \sigma_6 = \frac{1}{2}{a'_0}^2(\gamma_1 C_{23} + \gamma_2 C_{13} - 2\gamma_3 C_{12}),$$

$$\sigma_7 = a'_0[-\gamma_1 a_0 C_{12} + \gamma_2(s_3 - a_0(C_{33} - C_{11})) - \gamma_3(s_2 - a_0 C_{23})],$$

$$\sigma_8 = a'_0[-\gamma_1(s_3 - a_0(C_{33} - C_{22})) + \gamma_2 a_0 C_{12} + \gamma_3(s_1 - a_0 C_{13})],$$

$$\sigma_9 = \frac{1}{2}\gamma_1[2a_0 s_2 + ({a'_0}^2 - 2{a_0}^2)C_{23}] - \frac{1}{2}\gamma_2[2a_0 s_1 + ({a'_0}^2 - 2{a_0}^2)C_{13}].$$

Итак, уравнения (12)–(14) являются системой трех уравнений на функции $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \varphi(t)$.

2. Случай [15]. В статье [15] рассмотрен случай маятниковых движений, который характеризуется следующим уравнением для угла собственного вращения:

$$\dot\varphi = \sqrt{p_0 + p_1\cos\varphi} \quad (p_0 > p_1 > 0). \tag{16}$$

Из (16) следует, что $\varphi(t)$ является эллиптической функцией времени

$$\begin{gathered} \varphi(t) = 2\mathrm{am}\varkappa_0 t, \quad \dot\varphi(t) = 2\varkappa_0\,\mathrm{dn}\varkappa_0 t, \\ \sin\varphi(t) = 2\,\mathrm{sn}\varkappa_0 t\,\mathrm{cn}\varkappa_0 t, \quad \cos\varphi(t) = \mathrm{sn}^2\varkappa_0 t - \mathrm{cn}^2\varkappa_0 t. \end{gathered} \tag{17}$$

Значения $\varkappa_0$ и модуля эллиптических функций (17) таковы

$$\varkappa_0 = \frac{1}{2}\sqrt{p_0 + p_1}, \quad k_*^2 = \frac{2p_1}{p_0 + p_1}.$$

Решение [15] уравнений (12)–(14) существует при выполнении условий

$$\boldsymbol{\alpha} = (1,0,0), \quad \boldsymbol{\beta} = (0,1,0), \quad \boldsymbol{\gamma} = (0,0,1), \tag{18}$$

$$\begin{gathered} C_{12} = 0, \quad C_{13} = 0, \quad C_{22} = C_{11}, \\ s_1 = 0, \quad a_0 s_2 + ({a'_0}^2 - a_0^2)C_{23} = 0, \quad s_3 = a_0(C_{33} - C_{11}), \end{gathered} \tag{19}$$

$$B_{12} = 0, \quad B_{11} = 0, \quad B_{22} = 0, \quad a_0 B_{13} = 0, \quad a_0 B_{23} = 0, \tag{20}$$

$$A_{23} = 0, \quad A_{13} = 0, \tag{21}$$

$$p_1 = \frac{2a'_0}{A_{33}}(s_2 - a_0 C_{23}). \tag{22}$$

Компоненты гиростатического момента $\boldsymbol{\lambda}(t)$ имеют вид

$$\lambda_1(t) = 2\rho(t)\mathrm{sn}\varkappa_0 t\,\mathrm{cn}\varkappa_0 t, \quad \lambda_2(t) = \rho(t)(\mathrm{sn}^2\varkappa_0 t - \mathrm{cn}^2\varkappa_0 t), \tag{23}$$

где

$$\rho(t) = \frac{2{a'_0}^2 C_{23}}{\varkappa_0 k_*^2}\,\mathrm{dn}\varkappa_0 t + c. \tag{24}$$

Здесь c – произвольная постоянная.

Из (18)–(24) следуют свойства: ось маятникового движения является главной осью в теле-носителе; для задачи о движении гиростата под действием силы тяжести ($B_{ij} = 0,\ C_{ij} = 0,\quad i,j = \overline{1,3}$) ось вращения горизонтальна ($\theta_0 = \frac{\pi}{2}$); гиростатический момент принадлежит плоскости, ортогональной оси вращения; для задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил маятниковое движение может происходить не вокруг горизонтальной оси только при $B_{13} = 0$, $B_{23} = 0$; модуль гиростатического момента при $C_{23} \neq 0$ изменяется с течением времени, параметр p_1 принимает фиксированное значение; параметр p_0 может принимать произвольные значения, большие p_1.

3. Первое новое решение. Пусть гиростатический момент принадлежит плоскости, ортогональной оси вращения, т. е. векторы $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ имеют вид (18). Тогда из уравнения (14) получим

$$\dot\varphi = \sqrt{\frac{1}{A_{33}}(\sigma_6 \sin 2\varphi - \sigma_5 \cos 2\varphi - 2\sigma_7 \cos\varphi + 2\sigma_8 \sin\varphi + c_0)}, \tag{25}$$

где в силу (15), (18)

$$\begin{gathered}\sigma_5 = \frac{1}{2}{a'_0}^2 (C_{22} - C_{11}), \quad \sigma_6 = -{a'_0}^2 C_{12},\\ \sigma_7 = -a'_0(s_2 - a_0 C_{23}), \quad \sigma_8 = a'_0(s_1 - a_0 C_{13}),\end{gathered} \tag{26}$$

c_0 – произвольная постоянная. Запишем уравнения (12), (23):

$$\begin{gathered}\dot\lambda_1(t) - \dot\varphi\lambda_2(t) = \mu_1\dot\varphi^2 - \mu_0\ddot\varphi + \dot\varphi(\mu_2 \sin\varphi + \mu_3\cos\varphi + \mu_4) +\\ + \mu_5 \sin 2\varphi + \mu_6 \cos 2\varphi + \mu_7 \sin\varphi + \mu_8 \cos\varphi + \mu_9,\\ \dot\lambda_2(t) + \dot\varphi\lambda_1(t) = \varepsilon_1\dot\varphi^2 - \varepsilon_0\ddot\varphi + \dot\varphi(\varepsilon_2 \sin\varphi + \varepsilon_3\cos\varphi + \varepsilon_4) +\\ + \varepsilon_5 \sin 2\varphi + \varepsilon_6 \cos 2\varphi + \varepsilon_7 \sin\varphi + \varepsilon_8 \cos\varphi + \varepsilon_9.\end{gathered} \tag{27}$$

Здесь, в силу (15), (18), μ_i и ε_i таковы

$$\begin{aligned}&\mu_0 = A_{13}, \quad \varepsilon_0 = A_{23}, \quad \mu_1 = A_{23}, \quad \varepsilon_1 = -A_{13},\\ &\mu_2 = -a'_0 B_{12}, \quad \varepsilon_2 = a'_0 B_{11}, \quad \mu_3 = -a'_0 B_{22}, \quad \varepsilon_3 = a'_0 B_{12},\\ &\mu_4 = -a_0 B_{23}, \quad \varepsilon_4 = a_0 B_{13}, \quad \mu_5 = \frac{1}{2}{a'_0}^2 C_{13}, \quad \varepsilon_5 = -\frac{1}{2}{a'_0}^2 C_{23},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mu_6 = \frac{1}{2}{a_0'}^2 C_{23}, \quad \varepsilon_6 = \frac{1}{2}{a_0'}^2 C_{13}, \quad \mu_7 = -a_0' a_0 C_{12},\\
&\varepsilon_7 = a_0'[s_3 - a_0(C_{33} - C_{11})],\\
&\mu_8 = -a_0'[s_3 - a_0(C_{33} - C_{22})], \quad \varepsilon_8 = a_0' a_0 C_{12},\\
&\mu_9 = \frac{1}{2}[2a_0 s_2 + ({a_0'}^2 - 2{a_0}^2)C_{23}], \quad \varepsilon_9 = -\frac{1}{2}[2a_0 s_1 + ({a_0'}^2 - 2a_0^2)C_{13}].
\end{aligned} \tag{28}$$

Введем вместо $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ переменные u, v:

$$\lambda_1(t) = u \sin v, \quad \lambda_2(t) = u \cos v. \tag{29}$$

После подстановки выражений (29) в уравнения (27) приведем их к виду

$$\dot{u} \sin v + u(v - \varphi)^{\bullet} \cos v = F_1, \qquad \dot{u} \cos v - u(v - \varphi)^{\bullet} \sin v = F_2, \tag{30}$$

где F_1 и F_2 – правые части уравнений (27).

Рассмотрим следующую комбинацию уравнений (30)

$$F_1 \cos\varphi - F_2 \sin\varphi = [u \sin(v - \varphi)]^{\bullet}. \tag{31}$$

Потребуем, чтобы выполнялось равенство

$$F_1 \cos\varphi - F_2 \sin\varphi = 0. \tag{32}$$

В силу (32), уравнение (31) допускает первый интеграл

$$u \sin(v - \varphi) = c^{(0)}, \tag{33}$$

где $c^{(0)}$ – произвольная постоянная.

Так как после подстановки F_1 и F_2 в уравнение (32) получим равенство

$$P_0(\varphi) + P_1(\varphi)\dot{\varphi} + P_2(\varphi)\dot{\varphi}^2 = 0, \tag{34}$$

то для того, чтобы исключить вырождение функции $\varphi(t)$ из (25), положим в (34) $P_1(\varphi) \equiv 0$. Отсюда получим условия

$$B_{12} = 0, \quad B_{11} = B_{22} = 0, \quad a_0 B_{13} = 0, \quad a_0 B_{23} = 0. \tag{35}$$

Внесем в уравнение (34) выражение (25). Учитывая (35), потребуем, чтобы полученное равенство было тождеством по переменной φ. Тогда определим условия

$$A_{13}(C_{22} - C_{11}) + 2A_{23}C_{12} = 0, \quad A_{23}(C_{22} - C_{11}) - 2A_{13}C_{12} = 0, \tag{36}$$

$$\begin{gathered}
A_{23}c_0 + A_{33}[a_0 s_2 + ({a_0'}^2 - {a_0}^2)C_{23}] = 0,\\
A_{13}(s_1 - a_0 C_{13}) + A_{23}(s_2 - a_0 C_{23}) - A_{33}[2s_3 - a_0(2C_{33} - C_{11} - C_{22})] = 0,
\end{gathered} \tag{37}$$

$$3A_{13}(s_2 - a_0 C_{23}) + 3A_{23}(s_1 - a_0 C_{13}) - 2a_0 A_{33} C_{12} = 0, \tag{38}$$

$$3A_{13}(s_1 - a_0C_{13}) - 3A_{23}(s_2 - a_0C_{23}) - a_0A_{33}(C_{11} - C_{22}) = 0, \qquad (39)$$

$$A_{13}c_0 + A_{33}[a_0s_1 + ({a'_0}^2 - a_0^2)C_{13}] = 0. \qquad (40)$$

Если в уравнениях (36), (38), (39) положить $A_{13}^2 + A_{23}^2 \neq 0$, то найдем равенства

$$C_{12} = 0, \quad C_{22} = C_{11}, \quad s_1 = a_0C_{13}, \quad s_2 = a_0C_{23}. \qquad (41)$$

При наличии равенств (41) из (25), (26) следует $\dot{\varphi} = \text{const}$, что исключено в силу постановки задачи. Следовательно, в равенствах (36)–(40) необходимо считать, что $A_{23} = A_{13} = 0$. На основании этих условий из равенств (36)–(40) имеем

$$A_{13} = A_{23} = 0, \quad a_0C_{12} = 0, \quad a_0(C_{22} - C_{11}) = 0, \qquad (42)$$

$$a_0s_1 + ({a'_0}^2 - {a_0}^2)C_{13} = 0, \quad a_0s_2 + ({a'_0}^2 - {a_0}^2)C_{23} = 0, \qquad (43)$$

$$2s_3 = a_0(2C_{33} - C_{11} - C_{22}). \qquad (44)$$

Из уравнений (30) в силу интеграла (33) получим

$$u = \frac{c^{(0)}}{\sin(v-\varphi)}, \quad v = \varphi(t) - \operatorname{arcctg}\Big[\frac{{a'_0}^2}{c^{(0)}}\int\limits_{t_0}^{t}(C_{23}\sin\varphi(t) - C_{13}\cos\varphi(t))dt + C'\Big], \qquad (45)$$

где C' – произвольная постоянная. В формулах (45) $\varphi(t)$ является эллиптической функцией, которая находится из (25) путем обращения интеграла

$$\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sigma_6\sin 2\varphi - \sigma_3\cos 2\varphi + 2\sigma_8\sin\varphi - 2\sigma_7\cos\varphi + c_0}} = \frac{1}{\sqrt{A_{33}}}(t - t_0). \qquad (46)$$

Компоненты гиростатического момента можно определить из равенств (29), а компоненты векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\nu}$ – из формул (7), (10). Построенное решение существует при выполнении равенств (35), (42)–(44).

Решение (45) не может служить обобщением решения (17), которое существует при выполнении условий (19)–(22). Докажем это свойство, полагая в (45) $C_{13} = 0$:

$$\begin{gathered}\varphi(t) = 2\mathrm{am}\varkappa_0 t, \quad u(t) = \frac{c^{(0)}}{\sin(v - 2\mathrm{am}\varkappa_0 t)}, \\ v(t) = 2\mathrm{am}\varkappa_0 t + \operatorname{arcctg}\Big(\frac{2{a'_0}^2C_{23}}{c^{(0)}\varkappa_0k_*^2}\mathrm{dn}\varkappa_0 t + C'\Big).\end{gathered} \qquad (47)$$

Уравнения (27) при выполнении условий (19)–(22) имеют вид

$$\dot{\lambda}_1(t) - \dot{\varphi}\lambda_2(t) = -{a'_0}^2C_{23}\sin^2\varphi, \quad \dot{\lambda}_2(t) + \dot{\varphi}\lambda_1(t) = -{a'_0}^2C_{23}\sin\varphi\cos\varphi. \qquad (48)$$

Перейдем в уравнениях (48) к переменным u, v (см. формулы (29)):

$$\begin{aligned} &\dot{u}\sin v + u(v-\varphi)^{\bullet}\cos v = -{a'_0}^2 C_{23}\sin^2\varphi,\\ &\dot{v}\cos v - u(v-\varphi)^{\bullet}\sin v = -{a'_0}^2 C_{23}\sin\varphi\cos\varphi. \end{aligned} \tag{49}$$

Рассмотрим две линейные комбинации уравнений (49). Первая комбинация является результатом исключения переменной φ в правых частях (49):

$$[u\sin(v-\varphi)]^{\bullet} = 0. \tag{50}$$

Вторая комбинация получается при умножении первого уравнения из (49) на $\cos v$, а второго уравнения – на $-\sin v$ и сложении правых и левых частей полученных из (49) уравнений

$$u(v-\varphi)^{\bullet} = -{a'_0}^2 C_{23}\sin(v-\varphi)\sin\varphi. \tag{51}$$

Так как уравнения (50), (51) должны быть независимыми, то необходимо считать $v \neq \varphi$ (замена (29), в которой $v = \varphi$, является особой). Поэтому решение [15] не является частным случаем решения (47), имеющим место при $v \neq \varphi$.

Проведем анализ условий (35), (42)–(44). Из условий $A_{13} = 0, A_{23} = 0$ следует, что ось маятникового вращения является главной осью эллипсоида инерции. Если предположим $a_0 \neq 0$, то из (35), (42)–(44) получим

$$\begin{gathered} B_{12} = B_{13} = B_{23} = 0, \quad B_{11} = B_{22} = 0, \quad C_{12} = 0, \quad C_{11} = C_{22},\\ s_1 = \frac{a_0^2 - {a'_0}^2}{a_0}C_{13}, \quad s_2 = \frac{a_0^2 - {a'_0}^2}{a_0}C_{23}, \quad s_3 = a_0(C_{33} - C_{11}). \end{gathered} \tag{52}$$

При выполнении (52) тригонометрический многочлен, входящий в формулу (46), будет иметь первый порядок. Очевидно, равенства (52) не эквивалентны равенствам (19)–(22).

Если в равенствах (35), (42)–(44) положить $a_0 = 0$, то должны выполняться равенства $C_{23} = 0,\ C_{13} = 0,\ s_3 = 0$. Уравнения (27) упрощаются:

$$u(v-\varphi)^{\bullet} = 0, \qquad u\sin(v-\varphi) = c^{(0)}. \tag{53}$$

Полагаем $v = \varphi + v_0$ ($v_0 = \mathrm{const}$). Тогда из (53) получим $u = \dfrac{c^{(0)}}{\sin v_0}$ ($v_0 \neq 0$). Компоненты гиростатического момента определим из равенств (29):

$$\lambda_1 = \frac{c^{(0)}}{\sin v_0}\sin(\varphi + v_0), \qquad \lambda_2 = \frac{c^{(0)}}{\sin v_0}\cos(\varphi + v_0). \tag{54}$$

В формулах (54) $\varphi(t)$ является функцией времени, которую можно получить в результате обращения интеграла (46). При этом тригонометрический многочлен в формуле (46) имеет второй порядок. Решение (54) не может быть частным случаем решения (23), так как в решении (23) указанный выше многочлен имеет первый порядок относительно функций $\cos\varphi$, $\sin\varphi$.

4. Второе новое решение. В решениях (17), (23) и (45) гиростатический момент лежит в плоскости, ортогональной вектору $\boldsymbol{a}$. Представляет интерес исследование маятниковых движений в случае, когда вектор гиростатического момента находится в плоскости, содержащей вектор $\boldsymbol{a}$. В силу этого положим в обозначениях (15) $B_{ij} = 0, C_{ij} = 0 \ \ (i, j = \overline{1,3})$ и

$$\boldsymbol{\alpha} = (0, \alpha_2, \alpha_3), \quad \boldsymbol{\beta} = (0, \beta_2, \beta_3), \quad \boldsymbol{\gamma} = (1, 0, 0). \tag{55}$$

На основании (55) из равенств (15) имеем

$$\begin{gathered}
\mu_0 = \alpha_2 A_{23} + \alpha_3 A_{33}, \ \ \mu_1 = -\alpha_2 A_{13}, \ \ \mu_2 = 0, \ \ \mu_3 = 0, \ \ \mu_4 = 0, \\
\mu_5 = 0, \ \mu_6 = 0, \ \mu_7 = a_0'(\alpha_2 s_3 - \alpha_3 s_2), \ \mu_8 = a_0'\alpha_3 s_1, \ \mu_9 = -a_0\alpha_2 s_1, \\
\varepsilon_0 = \beta_2 A_{23} + \beta_3 A_{33}, \ \ \varepsilon_1 = -\beta_2 A_{13}, \ \ \varepsilon_2 = 0, \ \ \varepsilon_3 = 0, \ \ \varepsilon_4 = 0, \\
\varepsilon_5 = 0, \ \ \varepsilon_6 = 0, \ \ \varepsilon_7 = a_0'(\beta_2 s_3 - \beta_3 s_2), \ \ \varepsilon_8 = a_0'\beta_3 s_1, \ \ \varepsilon_9 = -a_0\beta_2 s_1, \\
\sigma_0 = A_{13}, \quad \sigma_1 = A_{23}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 0, \quad \sigma_4 = 0, \\
\sigma_5 = 0, \quad \sigma_6 = 0, \quad \sigma_7 = 0, \quad \sigma_8 = -a_0' s_3, \quad \sigma_9 = a_0 s_2.
\end{gathered} \tag{56}$$

В силу (56) уравнения (12)–(14) упрощаются:

$$\dot{\lambda}_1(t) = -\mu_0\ddot{\varphi} + \mu_1\dot{\varphi}^2 + \mu_7 \sin\varphi + \mu_8\cos\varphi + \mu_9, \tag{57}$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = -\varepsilon_0\ddot{\varphi} + \varepsilon_1\dot{\varphi}^2 + \varepsilon_7\sin\varphi + \varepsilon_8\cos\varphi + \varepsilon_9, \tag{58}$$

$$\dot{\varphi}(\beta_3\lambda_1(t) - \alpha_3\lambda_2(t)) - \sigma_0\ddot{\varphi} + \sigma_1\dot{\varphi}^2 + \sigma_8\cos\varphi + \sigma_9 = 0. \tag{59}$$

Решение уравнений (57)–(59) будем искать в классе функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих уравнению (16). Применяя общий метод решения ИС для неавтономных дифференциальных уравнений [17], найдем следующие условия:

$$a_0 = 0, \quad s_3 = 0, \quad A_{13} = 0. \tag{60}$$

Проверкой данного результата может служить запись уравнений (57)–(59) с учетом (56), (60):

$$\lambda_1'(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{p_0 + p_1\cos\varphi}}\big[\big(\frac{1}{2}p_1(\alpha_2 A_{23} + \alpha_3 A_{33}) - \alpha_3 s_2\big)\sin\varphi + \alpha_3 s_1\cos\varphi\big], \tag{61}$$

$$\lambda_2'(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{p_0 + p_1\cos\varphi}}\big[\big(\frac{1}{2}p_1(\beta_2 A_{23} + \beta_3 A_{33}) - \beta_3 s_2\big)\sin\varphi + \beta_3 s_1\cos\varphi\big], \tag{62}$$

$$\beta_3\lambda_1(\varphi) - \alpha_3\lambda_2(\varphi) + A_{23}\sqrt{p_0 + p_1\cos\varphi} = 0. \tag{63}$$

В уравнениях (61), (62) штрихом обозначена производная по переменной φ. Очевидно, что производная от левой части соотношения (63), в силу уравнений (61), (62), равна нулю. Таким образом, в случае (16), (55), (56), (60) уравнения (16), (61), (62) допускают инвариантное соотношение (63) и поэтому имеют решение

$$\varphi = 2\,\mathrm{am}\varkappa_0 t,$$

$$\lambda_1(t) = \Big[\frac{1}{2}(\alpha_2 A_{23} + \alpha_3 A_{33})p_1 - \alpha_3 s_2\Big]\int\limits_{t_0}^{t}\sin\varphi(t)dt + \alpha_3 s_1\int\limits_{t_0}^{t}\cos\varphi(t)dt,$$
$$\lambda_2(t) = \Big[\frac{1}{2}(\beta_2 A_{23} + \beta_3 A_{33})p_1 - \beta_3 s_2\Big]\int\limits_{t_0}^{t}\sin\varphi(t)dt + \beta_3 s_1\int\limits_{t_0}^{t}\cos\varphi(t)dt, \tag{64}$$

где

$$\sin\varphi(t) = 2\,\mathrm{sn}\varkappa_0 t\,\mathrm{cn}\varkappa_0 t, \quad \cos\varphi(t) = \mathrm{sn}^2\varkappa_0 t - \mathrm{cn}^2\varkappa_0 t.$$

Значения $\varkappa_0$ и модуль эллиптических функций таковы

$$\varkappa_0 = \frac{1}{2}\sqrt{p_0 + p_1}, \quad k_*^2 = \frac{2p_1}{p_0 + p_1}.$$

Компоненты ω_i вектора $\boldsymbol{\omega}$ и компоненты ν_i вектора $\boldsymbol{\nu}$ имеют вид

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = 2\,\varkappa_0\mathrm{dn}\varkappa_0 t, \quad \nu_1 = \sin\varphi(t), \quad \nu_2 = \cos\varphi(t), \quad \nu_3 = 0. \tag{65}$$

Отметим основные свойства решения (64), (65): ось маятникового вращения горизонтальна; она может быть неглавной осью эллипсоида инерции; параметры p_0 и p_1 в формуле (16) могут принимать произвольные значения; центр масс гиростата лежит в плоскости, ортогональной $\boldsymbol{a}$. Данные свойства отличаются от свойств решения (17), (23), (24). Это связано с тем, что в рассматриваемых решениях расположения роторов в теле-носителе не совпадают.

5. Выводы. В статье построены два новых решения уравнений движения гиростата, несущего два вращающихся ротора в двух задачах: в задаче о движении тяжелого гиростата и в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Первое решение характеризуется тем, что гиростатический момент ортогонален оси маятникового движения. Во втором решении гиростатический момент расположен в плоскости, содержащей ось маятникового движения.

1. *Liouville J.* Dèveloppements sur un chapitre de la Mècanique de Poisson // J. Math. Pures et Appl. – 1858. – **3**. – P. 1–25.
2. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Собр. соч.: В 2-х т. – М.; Л.: ОГИЗ, 1949. – Т. 2. – С. 152–310.
3. *Румянцев В.В.* Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами // Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика. – 1970. – № 2. – С. 83–96.
4. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52–73.

5. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. – Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика". – 2001. – 384 с.
6. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.
7. *Горр Г.В., Ковалев А.М.* Движение гиростата. – Киев: Наук. думка. – 2013. – 408 с.
8. *Ковалева Л.М., Позднякович А.Е.* Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела с одним маховиком // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 100–105.
9. *Волкова О.С., Гашененко И.Н.* Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 42–49.
10. *Волкова О.С.* Регулярные прецессии тяжелого гиростата вокруг вертикальной оси // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2009. – **19**. – С. 30–35.
11. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* О некоторых классах регулярной прецессии гиростата с переменным гиростатическим моментом относительно наклонной оси в обобщенной задаче динамики // Тр. ИПММ НАНУ. – 2010. – **21**. – С. 64–75.
12. *Мазнев А.В.* Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 91–104.
13. *Возняк А.А.* Полурегулярные прецессии первого типа в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Тр. ИПММ НАНУ. – 2012. – **24**. – С. 45–57.
14. *Горр Г.В., Щетинина Е.К.* Прецессии гиростата в случае плоского годографа гиростатического момента // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43. – С. 46–56.
15. *Возняк А.А.* Маятниковые движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае переменного гиростатического момента // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43. – С. 69–78.
16. *Котов Г.А.* Прецессии общего вида в задаче о движении гиростата, несущего два маховика с переменным гиростатическим моментом // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43. – С. 79–89.
17. *Ковалев А.М., Горр Г.В., Неспирный В.Н.* Инвариантные соотношения неавтономных систем дифференциальных уравнений с приложением в механике // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43. – С. 3–18.

G.V. Gorr, G.A. Kotov

On the pendulum motions of gyrostat carrying two rotors

Two new solutions for pendulum motions' equations of gyrostat under the action of potential and gyroscopic forces in the case when the carrier-body has two rotating rotors are obtained.

Keywords: *pendulum motions, rotating rotor.*

ГУ "Ин-т прикл. математики и механики", Донецк;
Донбасская гос. академия строительства
и архитектуры, Макеевка
gvgorr@gmail.com, kotov_ga@rambler.ru

Получено 26.08.15