УДК 531.35

©2015. **Б.И. Коносевич, Ю.Б. Коносевич**

КОРРЕКТНОСТЬ МОДИФИЦИРОВАННОЙ МОДЕЛИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В ТЕОРИИ ПОЛЕТА СНАРЯДА

Для описания движения артиллерийского снаряда в воздухе широко используется система дифференциальных уравнений, которая получается из исходной "точной" системы путем линеаризации аэродинамических сил и моментов по углу атаки и путем дополнительной линеаризации по углу между вектором скорости центра масс снаряда и вертикальной плоскостью (l-система). Усреднение уравнений поступательного движения и продольного вращения в l-системе по обеим фазам собственных угловых колебаний оси симметрии снаряда приводит к системе дифференциальных уравнений, которая описывает модифицированную модель материальной точки (m-система). При помощи методов малого параметра получена оценка погрешности решения m-системы по сравнению с решением l-системы при одинаковых начальных условиях для переменных поступательного движения и продольного вращения. Установлена малость этой погрешности, что и является обоснованием корректности модифицированной модели материальной точки.

Ключевые слова: *артиллерийский снаряд, асимптотические методы, внешняя баллистика, динамика полета, модифицированная модель траектории материальной точки.*

Введение. Угловое движение оси симметрии снаряда может быть представлено в виде быстрых двухчастотных колебаний относительно медленно изменяющегося среднего положения. Дифференциальные уравнения поступательного движения снаряда содержат две переменные, определяющие направление его оси симметрии. Предполагая, что амплитуды колебаний оси симметрии малы, Р.Ф. Лиеске и М. Л. Рейтер [1] заменили эти переменные их приближенными средними значениями и получили приближенную систему дифференциальных уравнений, описывающую поступательное движение и продольное вращение снаряда. Модель снаряда, описываемая этой системой, называется модифицированной моделью траектории материальной точки [1, 2]. Эта модель получена в [1, 2] при некоторых физически мотивированных предположениях без каких-либо математических оценок погрешности.

В настоящей статье приближенная система дифференциальных уравнений, описывающая модифицированную модель траектории материальной точки применительно к l-системе, названа m-системой, и для этой m-системы выведена оценка ее погрешности, а именно, найден порядок по малому параметру разности решений l-системы и m-системы при одинаковых начальных условиях для переменных, описывающих поступательное движение и продольное вращение снаряда. Благодаря специальной процедуре введения малого параметра, этой аналитической оценке соответствуют определенные числовые оценки. Оценка погрешности решения m-системы была дана ранее в работе [3] без детального доказательства и при грубых исходных предположениях. В настоящей работе приняты уточненные исходные предположения [4] и дан подробный вывод оценки погрешности.

Из полученных оценок на основании результатов статьи [5] следует, что m-система и l-система обеспечивают одинаковую (по порядку погрешности) точность вычисления траектории снаряда по сравнению с исходной полностью нелинейной системой уравнений движения снаряда. Но из-за отсутствия в m-системе быстроколеблющихся переменных вычислительные затраты на ее численное интегрирование сопоставимы с затратами на численное интегрирование уравнений движения снаряда, как материальной точки.

1. Уравнения движения снаряда. Для описания движения артиллерийского снаряда в воздухе используются следующие переменные: x, y, z — координаты центра масс снаряда в стартовой правой системе декартовых координат $Oxyz$ (ось Ox направлена горизонтально в сторону стрельбы, а ось Oy — вертикально вверх); v, θ, ψ — компоненты вектора $\boldsymbol{v}$ скорости центра масс (v — его модуль, θ — угол между осью Ox и проекцией $\boldsymbol{v}$ на плоскость Oxy, ψ — угол между вектором $\boldsymbol{v}$ и плоскостью Oxy); α и β — проекции единичного вектора оси симметрии на вторую и третью оси полускоростной системы координат (ее первая ось направлена вдоль $\boldsymbol{v}$, а вторая ось лежит в плоскости Oxy); p, q, r — проекции вектора угловой скорости снаряда на оси полусвязанной (невращающейся) системы координат (ее первая ось направлена вдоль оси симметрии). Через I_1, I_2, m обозначаются осевой и экваториальный центральные моменты инерции снаряда и его масса, g — ускорение свободного падения.

Для аэродинамических сил и моментов, действующих на снаряд, используются такие обозначения: R_x — сила лобового сопротивления, R_y — подъемная сила, R_z — сила Магнуса, M_y — момент Магнуса, M_z — опрокидывающий момент. Проекция вектора демпфирующего момента на ось симметрии представляется в виде $M_p p$, а его проекции на поперечные оси полусвязанной системы координат равны $M_\Omega q, M_\Omega r$. Как известно, величины R_x, M_p, M_Ω являются четными, а R_y, R_z, M_y, M_z — нечетными функциями пространственного угла атаки δ между вектором $\boldsymbol{v}$ и осью симметрии. Все они зависят от y, v, а R_z и M_y зависят еще и от p. Эти силы и моменты входят в уравнения движения снаряда через аэродинамические функции

$$\begin{aligned} &K_x = \frac{R_x}{m}, \quad K_y = \frac{R_y}{mv\sin\delta}, \quad K_z = \frac{R_z}{mv\sin\delta}, \quad K_p = \frac{M_p}{I_1}, \\ &A_\Omega = \frac{M_\Omega}{I_2}, \quad B_y = \frac{M_y}{I_2\sin\delta}, \quad B_z = \frac{M_z}{I_2\sin\delta}, \end{aligned} \tag{1}$$

которые являются четными по δ и непрерывно дифференцируемы по всем аргументам в предположении, что аэродинамические силы и моменты являются дважды непрерывно дифференцируемыми. Их значения при $\delta = 0$ отмечаются верхним индексом (0).

В настоящей работе используется система уравнений движения снаряда, которая получается из исходной нелинейной системы [6] в результате замены функций (1) их значениями при $\delta = 0$ и дополнительной линеаризации по углу ψ (l-система). Эта l-система линейна относительно $q, r, \alpha, \beta, \psi$.

Чтобы применить асимптотические методы к l-системе, в нее вводится малый параметр при помощи числовой нормализации с использованием десятичной числовой шкалы [4]. В табл. 1 приведены новые масштабы фазовых переменных, а в табл. 2 — новые масштабы аэродинамических функций $K_x^{(0)}, K_y^{(0)}, K_z^{(0)}$, $K_p^{(0)}$, $A_\Omega^{(0)}, B_y^{(0)}, B_z^{(0)}$ и функции $A_g^{(0)} = pI$ $(I = I_1/I_2)$. Новые масштабы отмечены звездочкой. За единицу времени принята величина $t_* = 0.01$ с, имеющая порядок периода высокочастотных колебаний оси симметрии. При стрельбе на максимальную дальность время полета снаряда составляет десятки секунд, и поэтому после перехода к новому масштабу времени время полета достигает значений порядка 10^3. Ускорение g отнесено к 10 мс$^{-2}$.

Таблица 1

Масштаб	x_*, y_*	z_*	v_*	θ_*	ψ_*	p_*	α_*, β_*	q_*, r_*	t_*
Значение	10^4	10^2	10^3	1	$0{,}1^2$	10^3	$0{,}1^2$	1	$0{,}1^2$
Ед. измер.	м	м	мс$^{-1}$	–	–	с$^{-1}$	–	с$^{-1}$	с

Таблица 2

Масштаб	K_{x*}	K_{y*}, K_{z*}	K_{p*}	$A_{\Omega*}$	A_{g*}	B_{y*}	B_{z*}
Значение	10^2	1	$0{,}1^2$	1	10^2	10^2	10^4
Ед. измер.	мс$^{-2}$	с$^{-1}$	с$^{-1}$	с$^{-1}$	с$^{-1}$	с$^{-2}$	с$^{-2}$

Нормализованные переменные и функции будем отмечать чертой сверху. В соответствии с выбором масштабов, все нормализованные функции в уравнениях движения снаряда во время полета снаряда принимают значения, которые по модулю близки к 1 либо меньше 1. Изменение этих функций связано, в основном, с изменением скорости $\overline{v}$. С учетом этого представим их в виде произведений множителей вида $\overline{v}^{\,n}$ на новые функции, причем степени n таких представлений выберем так, чтобы эти новые функции принимали значения, численно близкие к 1 на среднем участке траектории, который вносит определяющий вклад в формирование погрешности приближенных решений. В результате расчетов определяем требуемые степени n для нормализованных функций $\overline{K}_x^{(0)}$, $\overline{K}_y^{(0)}, \overline{K}_p^{(0)}, \overline{A}_\Omega^{(0)}, \overline{B}_z^{(0)}$. Для функций $\overline{K}_z^{(0)}, \overline{B}_y^{(0)}$, которые связаны с силой и моментом Магнуса, выбираем такие же степени, как и для $\overline{K}_y^{(0)}, \overline{B}_z^{(0)}$. В итоге приходим к следующим представлениям функций в нормализованных уравнениях движения

$$\begin{gathered}
\overline{K}_x^{(0)} = \overline{v}^{\,3}\overline{K}_0(\overline{y},\overline{v}), \quad \overline{K}_y^{(0)} = \overline{v}^{\,2}\overline{K}_1(\overline{y},\overline{v}), \quad \overline{K}_z^{(0)} = \overline{v}^{\,2}\overline{K}_2(\overline{y},\overline{v},\overline{p}), \\
\overline{K}_p^{(0)} = \overline{v}\,\overline{K}_3(\overline{y},\overline{v}), \quad \overline{A}_\Omega^{(0)} = \overline{v}\,\overline{A}_1(\overline{y},\overline{v}), \\
\overline{B}_y^{(0)} = \overline{v}^{\,3}\overline{B}_1(\overline{y},\overline{v},\overline{p}), \quad \overline{B}_z^{(0)} = \overline{v}^{\,3}\overline{B}_2(\overline{y},\overline{v}).
\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь функции $\overline{K}_0, \overline{K}_1, \overline{K}_3, \overline{A}_1, \overline{B}_2$ имеют порядок единица на всей траектории, и при этом они численно близки к 1 на среднем ее участке. Функции $\overline{K}_2, \overline{B}_1$ по модулю близки к 1 или меньше, чем 1. Частные производные всех этих функций по $\overline{y}, \overline{v}, \overline{p}$ являются величинами порядка единица или более высокого порядка.

Подставляем выражения (2) в нормализованную l-систему уравнений движения снаряда и вводим малый параметр ε вместо числа 0.1. Опуская черту в обозначениях новых переменных и функций, получаем l-систему с малым параметром [4]. Она состоит из следующей подсистемы *уравнений поступательного движения и продольного вращения снаряда*

$$\begin{gathered}
\dot{x} = \varepsilon^3 v\cos\theta, \;\; \dot{y} = \varepsilon^3 v\sin\theta, \;\; \dot{z} = \varepsilon^3 v\psi, \;\; \dot{v} = \varepsilon^3 v^3 K_0(y,v) - \varepsilon^4\, g\sin\theta, \\
\dot{\theta} = -\varepsilon^4 \frac{g\cos\theta}{v} + \varepsilon^4 v^2 K_1(y,v)\alpha - \varepsilon^4 v^2 K_2(y,v,p)\beta, \\
\dot{\psi} = \varepsilon^4 \frac{g}{v}\psi\sin\theta + \varepsilon^2 v^2 K_2(y,v,p)\alpha + \varepsilon^2 v^2 K_1(y,v)\beta, \\
\dot{p} = \varepsilon^4 p v K_3(y,v)
\end{gathered} \tag{3}$$

и подсистемы *уравнений углового движения его оси симметрии*

$$\begin{aligned}
\dot{\Omega} &= a(y,v,p,\varepsilon)\Omega + b(y,v,p,\varepsilon)\Delta, \\
\dot{\Delta} &= -i\Omega - k(y,v,p,\varepsilon)\Delta + l(v,\theta,\psi,\varepsilon).
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $\Omega = q + ir,\ \Delta = \alpha + i\beta$, комплексные функции a, b, k, l равны

$$\begin{aligned}
a(y,v,p,\varepsilon) &= \varepsilon^2 v A_1(y,v) + ipI, \\
b(y,v,p,\varepsilon) &= v^3[\varepsilon^2 B_1(y,v,p) + iB_2(y,v)], \\
k(y,v,p,\varepsilon) &= \varepsilon^2 v^2\big[K_1(y,v) + iK_2(y,v,p)\big], \\
l(v,\theta,\psi,\varepsilon) &= \varepsilon^2 \frac{g}{v}(\cos\theta - i\varepsilon^2\psi\sin\theta).
\end{aligned} \tag{5}$$

Пусть $\phi = \phi(x,y,z,v,\theta,\psi,p,q,r,\alpha,\beta,t,\varepsilon)$ — действительная или комплексная функция. Равенство $\phi = O(\varepsilon^n)$ означает, что функция ϕ имеет порядок ε^n или более высокий порядок при $\varepsilon \to 0$, а равенство $\phi = O^*(\varepsilon^n)$ означает, что ϕ имеет порядок, равный ε^n при $\varepsilon \to 0$ [7, с. 100–101]. Запись $\phi = O^*_+(\varepsilon^n)$ означает, что ϕ является действительной положительной функцией порядка ε^n, а запись $\phi \le O^*_+(\varepsilon^n)$ означает, что ϕ является действительной функцией, которая ограничена сверху положительной функцией порядка ε^n.

В соответствии со структурой представлений (2), функции K_0, K_1, K_3, A_1, B_2 в (3), (5) равны $O^*(1)$, когда их аргументы y, v, p принимают значения в пределах рабочей области, а частные производные этих функций по

y, v, p равны $O(1)$. Функции K_2 и B_1, связанные с силой и моментом Магнуса, предполагаются равными $O(1)$ вместе с их частными производными.

Обозначим через t_0 и t_1 момент выстрела и момент падения снаряда на землю. В соответствии с выбором t_*, ε имеем $t_1 - t_0 = O(\varepsilon^{-3})$. Для сокращения записи вводим векторные обозначения

$$\begin{aligned} &\xi = (x, y, \varepsilon^2 z, v, \theta, \varepsilon^2\psi, p), \quad \xi^{(5)} = (y, v, \theta, \varepsilon^2\psi, p), \\ &\xi^{(4)} = (y, v, \theta, p), \quad \xi^{(3)} = (y, v, p). \end{aligned} \tag{6}$$

Пусть $\xi, \Omega, \Delta(t, \varepsilon)$ — решение нелинейной системы уравнений движения снаряда [6] при заданных в момент t_0 начальных условиях, а $\xi_l, \Omega_l, \Delta_l(t, \varepsilon)$ — решение l-системы (3), (4) при тех же начальных условиях. В [5] установлены оценки погрешности решения l-системы и показано, что

$$||\xi(t, \varepsilon) - \xi_l(t, \varepsilon)|| = O_+(\varepsilon^3), \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{7}$$

Здесь

$$||\xi|| = \max|\xi_j|, \ j = 1, \ldots, 7. \tag{8}$$

Порядок оценки (7) определяется порядками нелинейных членов уравнений движения. Поэтому оценка (7) остается верной для нового способа введения малого параметра [4], принятого здесь.

2. Априорные оценки для фазовых переменных. Для вывода оценок погрешности различных приближений в теории полета снаряда необходимо располагать априорными оценками всех фазовых переменных системы (3), (4) при $t \in [t_0, t_1]$. Выполнение таких оценок

$$x, y, z, v, \theta, \psi, p(t, \varepsilon) = O(1), \quad t \in [t_0, t_1], \tag{9}$$

для переменных $x, y, z, v, \theta, \psi, p$ обеспечивается правильным выбором их масштабов при нормализации. Что касается переменных q, r, α, β углового движения, то оценки вида

$$\Omega, \Delta(t, \varepsilon) = O(1), \quad t \in [t_0, t_1], \tag{10}$$

выполняются для них только при дополнительных условиях, называемых условиями правильности полета. Их проще всего получить, анализируя общее приближенное ВКБ-решение уравнений углового движения (4).

Пусть $\xi_l, \Omega_l, \Delta_l(t, \varepsilon)$ — решение l-системы (3), (4) при заданных начальных условиях в момент t_0. Рассматривая зависимость $\xi_l^{(5)}(t, \varepsilon)$ в этом решении как известную, определяем коэффициенты системы линейных уравнений (4) как функции t, ε. Построим приближенное общее решение системы (4), используя идеи метода ВКБ. Чтобы получить приближенные выражения для двух линейно независимых решений соответствующей однородной системы, воспользуемся формальной процедурой [8], которая основана на переходе к уравнению Риккати и построению его приближенных решений в виде разложений по степеням параметра. Приближенное частное решение неоднородной системы (4), следуя [9, 10], сразу строим в виде разложения по степеням параметра ε.

Введем следующие функции

$$
\begin{aligned}
& e(\xi^{(5)},\varepsilon) = \frac{b\,l}{ib-ak}, \quad d(\xi^{(5)},\varepsilon) = -\frac{al}{ib-ak}, \\
& w(\xi^{(4)},\varepsilon) = \frac{(a-k)^2}{4} - ib + ak - \frac{\dot a + \dot k}{2}, \\
& \lambda_j(\xi^{(4)},\varepsilon) = n_j + i\omega_j = \frac{a-k}{2} \pm \sqrt{w} \quad (j=1,2).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Здесь e и d — это значения Ω и Δ, обращающие в нуль правые части уравнений (4), $\dot a$ и $\dot k$ — производные функций a, k по времени в силу уравнений движения (3), (4). Тогда, учитывая два первых члена разложений для решений однородных уравнений и один член — для решения неоднородных уравнений, получаем приближенное *общее ВКБ-решение* уравнений (4)

$$
\begin{aligned}
& \widetilde\Omega(t,\varepsilon) = i\sum_{j=1}^{2}[\lambda_j(t,\varepsilon)+k(t,\varepsilon)]\widetilde s_j(t,\varepsilon)\exp i\varphi_j(t,\varepsilon) + e(t,\varepsilon), \\
& \widetilde\Delta(t,\varepsilon) = \sum_{j=1}^{2}\widetilde s_j(t,\varepsilon)\exp i\varphi_j(t,\varepsilon) + d(t,\varepsilon),
\end{aligned}
\tag{12}
$$

где

$$
\begin{aligned}
& \widetilde s_j(t,\varepsilon) = C_j\frac{w^{1/4}(t_0,\varepsilon)}{w^{1/4}(t,\varepsilon)}\exp\int_{t_0}^{t} n_j(\tau,\varepsilon)\,d\tau, \\
& \varphi_j(t,\varepsilon) = \int_{t_0}^{t}\omega_j(\tau,\varepsilon)\,d\tau \quad (j=1,2)
\end{aligned}
\tag{13}
$$

В правых частях формул (12), (13) функции с аргументами t,ε или τ,ε равны соответствующим функциям (5), (11), взятым на решении l-системы (3), (4). Комплексные постоянные C_j $(j=1,2)$ определяются начальными условиями.

Изложенная выше формальная процедура построения приближенного решения (12), (13) может быть обоснована его малой погрешностью по сравнению с точным решением l-системы [4]:

$$
\Omega_l(t,\varepsilon) - \widetilde\Omega(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^2), \quad \Delta_l(t,\varepsilon) - \widetilde\Delta(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^2), \quad t\in[t_0,t_1].
$$

Формулы (12), (13) описывают быстрые двухчастотные колебания Ω,Δ с частотами ω_1,ω_2 и фазами φ_1,φ_2 около средних значений e,d. Параметры этих колебаний ω_j,n_j $(j=1,2)$ и средние значения e,d зависят от времени через медленные переменные $\xi^{(5)}$.

Чтобы сформулировать *условия правильности полета снаряда*, подставим выражения (5) в определения (11) функций e, d, w. Получаем для величин e, d представления

$$\begin{aligned} e(\xi^{(5)}, \varepsilon) &= \frac{\varepsilon^2}{v} E(\xi^{(3)}, \varepsilon)(\cos\theta - i\varepsilon^2\psi\sin\theta), \\ d(\xi^{(5)}, \varepsilon) &= \frac{\varepsilon^2}{v^4} D(\xi^{(3)}, \varepsilon)(\cos\theta - i\varepsilon^2\psi\sin\theta), \end{aligned} \tag{14}$$

а для функции w – формулу

$$w(\xi^{(4)}, \varepsilon) = -\frac{p^2I^2}{4}\left[1 - \frac{4v^3B_2(y,v)}{p^2I^2}\right] + O(\varepsilon^2). \tag{15}$$

Потребуем, чтобы на всех траекториях полета снаряда выполнялось соотношение $d_1 = O(1)$. Отметим, что в соответствии с седьмым уравнением (3) нормализованная продольная угловая скорость p сохраняет порядок 1 на всем промежутке $[t_0, t_1]$ длины $O(\varepsilon^{-3})$, т. е.

$$p = O^*(1). \tag{16}$$

Далее, поскольку $K_0, K_1, B_2 = O^*(1)$ в (3), (5), имеем $E, D = O^*(1)$ в (14). А поскольку $\cos\theta = O^*(1)$, заключаем, что соотношение $d = O(1)$ выполняется только в том случае, когда минимальное значение нормализованной скорости v вблизи вершины траектории имеет порядок $\varepsilon^{1/2}$ или более низкий. Учитывая, что v принимает свое максимальное значение $O^*_+(1)$ в момент выстрела, устанавливаем, что на любой траектории скорость изменяется в диапазоне

$$O^*_+(\varepsilon^{1/2}) \le v \le O^*_+(1). \tag{17}$$

Потребуем также, чтобы выражение в квадратных скобках в формуле (15) было положительным на всех траекториях полета снаряда, и обозначим его через σ^2:

$$\sigma^2(y, v, p) = 1 - \frac{4v^3B_2(y,v)}{p^2I^2} > 0. \tag{18}$$

Неравенство в (18) — это условие Маиевского, записанное с использованием принятых обозначений. Снаряд и орудие конструируются так, что $0.6 < \sigma(t_0, \varepsilon) < 0.7$. Таким образом, в момент выстрела условие Маиевского выполняется в усиленной форме $\sigma^2(t_0, \varepsilon) = O^*_+(1)$. После выстрела нормализованная скорость v убывает, оставаясь в диапазоне (17). Поэтому, с учетом (16), из определения (18) величины σ^2 следует, что условие Маиевского выполняется на всей траектории снаряда, а коэффициент σ заключен в пределах

$$\sigma(t_0, \varepsilon) \le \sigma \le 1 - O^*_+(\varepsilon^{3/2}), \quad \sigma(t_0, \varepsilon) = O^*_+(1). \tag{19}$$

Тогда угловое движение оси симметрии снаряда является колебательным.

Ограниченность амплитуд этих колебаний обеспечивают неравенства

$$n_1, n_2(\xi^{(4)}, \varepsilon) \leq O^*_+(\varepsilon^4). \tag{20}$$

При их выполнении будет $\widetilde{s}_1, \widetilde{s}_2 = O(1)$ в (12), (13).

В [11] показано, что при условиях (16)-(20) сотношения (10) выполняются для исходной нелинейной системы уравнений движения осесимметричного снаряда. Очевидно, что при этих условиях соотношения (10) справедливы и для l-системы (3), (4).

Для максимальных по модулю значений медленных переменных справедливы оценки (9), а кроме того, формулы (16), (17) определяют порядки минимальных значений переменных p, v. Следовательно, на всех траекториях полета снаряда рабочую область для переменных, объединенных в вектор ξ, можно представить в виде параллелепипеда

$$\begin{aligned} \Xi = \{\xi : (0, 0, -\varepsilon^2 C^*_z, \sqrt{\varepsilon} C_{v*}, -C^*_\theta, -\varepsilon^2 C^*_\psi, C_{p*}) \leq \xi \leq \\ \leq (C^*_x, C^*_y, \varepsilon^2 C^*_z, C^*_v, C^*_\theta, \varepsilon^2 C^*_\psi, C^*_p)\}. \end{aligned} \tag{21}$$

Здесь выполнение неравенства $\leq$ для вектора ξ означает его выполнение для всех компонент этого вектора. Буквой C с индексами обозначены положительные постоянные порядка 1.

В уравнениях (3) и далее функции фазовых переменных, времени и параметра ε, обозначаемые заглавными латинскими буквами, равны $O(1)$ при $\xi \in \Xi, \quad q, r, \alpha, \beta = O(1), \quad t \in [t_0, t_1]$.

Во время полета снаряда скорость v изменяется в диапазоне (17), и порядки по ε функций, входящих в уравнения движения (3), (4), изменяются вместе с v. Чтобы учесть такие изменения, эти функции были представлены как суммы членов вида $\varepsilon^m v^n F_{mn}$, где $F_{mn} = O(1)$ или $F_{mn} = O^*(1)$. Такие представления используются в дальнейшем и для других функций, описывающих динамику полета снаряда. Назовем их *εv-представлениями.*

3. Формулировка основного результата. Пользуясь обозначением (6) для ξ, запишем уравнения поступательного движения и продольного вращения (3) для l-системы в векторной форме

$$\dot{\xi} = f(\xi, \varepsilon) + f_\alpha(\xi, \varepsilon)\alpha + f_\beta(\xi, \varepsilon)\beta. \tag{22}$$

Из сравнения (3) с (22) следует, что вектор-функция f зависит фактически не от всех компонент вектора ξ, а от только от $\xi^{(5)}$, а вектор-функции f_α, f_β зависят только от $\xi^{(3)}$.

В общем приближенном решении уравнений углового движения переменная Δ выражается по второй формуле (12), которая описывает быстрые двухчастотные колебания около медленно изменяющегося среднего значения

$$d(\xi^{(5)}, \varepsilon) = d_\alpha(\xi^{(5)}, \varepsilon) + i d_\beta(\xi^{(5)}, \varepsilon). \tag{23}$$

Пренебрегая колебательными членами, заменим переменные α, β в уравнениях (3) их средними значениями d_α, d_β и получим замкнутую систему дифференциальных уравнений седьмого порядка. В векторной записи она имеет вид
$$\dot{\xi} = f(\xi,\varepsilon) + f_\alpha(\xi,\varepsilon)d_\alpha(\xi,\varepsilon) + f_\beta(\xi,\varepsilon)d_\beta(\xi,\varepsilon). \tag{24}$$
Пренебрежение колебаниями оси симметрии можно здесь трактовать как результат усреднения по фазам φ_1, φ_2 этих высокочастотных колебаний без предположения о малости их амплитуд. Система (24) описывает аналог *модифицированной модели траектории снаряда как материальной точки* [1] для l-системы, назовем ее m-системой. Справедливо следующее утверждение.

Пусть $\xi_l, \Omega_l, \Delta_l(t,\varepsilon)$ *— решение* l*-системы* (3), (4) *при заданных в момент выстрела начальных условиях* $\xi_l, \Omega_l, \Delta_l(t_0,\varepsilon)$*, и пусть* $\xi_m(t,\varepsilon)$ *— решение* m*-системы* (24) *при начальном условии* $\xi_m(t_0,\varepsilon) = \xi_l(t_0,\varepsilon)$*. Тогда*
$$||\xi_l(t,\varepsilon) - \xi_m(t,\varepsilon)|| = O_+(\varepsilon^3), \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{25}$$

4. Подготовительные результаты. Чтобы установить оценку погрешности (25), сначала введем комплексные функции
$$\begin{aligned} &w^\circ = w^\circ(\xi^{(3)},\varepsilon) = (a-k)^2/4 - ib + ak,\\ &\lambda_j^\circ = \lambda_j^\circ(\xi^{(3)},\varepsilon) = (a-k)/2 \pm \sqrt{w^\circ} \quad (j=1,2). \end{aligned} \tag{26}$$
Здесь $\sqrt{w^\circ} = i\sqrt{_+(-w^\circ)}$, $\sqrt{_+}$ – главное значения корня (см. [12, с. 18]), значениям $j=1$ и $j=2$ соответствуют знаки $+$ и $-$ перед корнем. Таким образом, функции λ_j° $(j=1,2)$ формально определены как корни характеристического уравнения однородной части подсистемы (4), рассматриваемой как система с постоянными коэффициентами.

Подставив выражения (5) для a, b, k в первую формулу (26), имеем в параллелепипеде (21)
$$w^\circ(\xi^{(3)},\varepsilon) = -\frac{p^2I^2}{4}\sigma^2(\xi^{(3)}) + \varepsilon^2 v W_1^\circ(\xi^{(3)},\varepsilon),$$
$$\sqrt{w^\circ(\xi^{(3)},\varepsilon)} = i\frac{pI}{2}\sigma(\xi^{(3)}) + \varepsilon^2 v W_2^\circ(\xi^{(3)},\varepsilon),$$
здесь $W_1^\circ, W_2^\circ = O(1)$. Полагая $\lambda_j^\circ = n_j^\circ + i\omega_j^\circ$ и принимая во внимание (19), получаем представления
$$\begin{aligned} &w^\circ(\xi^{(3)},\varepsilon) = W^\circ(\xi^{(3)},\varepsilon),\\ &n_1^\circ(\xi^{(3)},\varepsilon) = \varepsilon^2 v N_1^\circ(\xi^{(3)},\varepsilon), \quad n_2^\circ(\xi^{(3)},\varepsilon) = \varepsilon^2 v N_2^\circ(\xi^{(3)},\varepsilon),\\ &\omega_1^\circ(\xi^{(3)},\varepsilon) = \Omega_1^\circ(\xi^{(3)},\varepsilon), \qquad \omega_2^\circ(\xi^{(3)},\varepsilon) = v^3\Omega_2^\circ(\xi^{(3)},\varepsilon),\\ &\lambda_1^\circ(\xi^{(3)},\varepsilon) = \Lambda_1^\circ(\xi^{(3)},\varepsilon), \qquad \lambda_2^\circ(\xi^{(3)},\varepsilon) = v^3\Lambda_2^\circ(\xi^{(3)},\varepsilon), \end{aligned} \tag{27}$$

где $N_j^\circ(\xi^{(3)},\varepsilon)=O(1), \quad W^\circ,\Omega_j^\circ,\Lambda_j^\circ(\xi^{(3)},\varepsilon)=O^*(1), \quad j=1,2.$

Используя формулы (14) для e, d и уравнения (3)-(5), получаем εv-представления для функций $\dot e$, $\dot d$ и с помощью (17) определяем порядки этих функций

$$\dot e = O(\varepsilon^5), \quad \dot d = O(\varepsilon^{7/2}). \tag{28}$$

Функции $k,\lambda_j^\circ(\xi^{(3)},\varepsilon)$, $j=1,2$, не содержат v в отрицательных степенях. Поэтому дифференцирование этих функций по времени в силу уравнений (3) приводит к повышению их порядков на 3. Следовательно, имеем

$$k(\xi^{(3)},\varepsilon)=O(\varepsilon^2), \quad \dot k(\xi^{(4)},\varepsilon)=O(\varepsilon^5), \quad \dot\lambda_j^\circ(\xi^{(3)},\varepsilon)=O(\varepsilon^3),\ j=1,2. \tag{29}$$

Рассматривая зависимость $\xi_l(t,\varepsilon)$ как известную, заменим переменные Ω,Δ в уравнениях углового движения (4) новыми переменными s_1°, s_2° (комплексными амплитудами) по формулам

$$\begin{aligned}
&\Omega = is_1^\circ[\lambda_1^\circ(\xi_l(t,\varepsilon),\varepsilon)+k(\xi_l(t,\varepsilon),\varepsilon)]\exp i\varphi_1^\circ(t,\varepsilon)+\\
&\quad +is_2^\circ[\lambda_2^\circ(\xi_l(t,\varepsilon),\varepsilon)+k(\xi_l(t,\varepsilon),\varepsilon)]\exp i\varphi_2^\circ(t,\varepsilon)+e(\xi_l(t,\varepsilon),\varepsilon),\\
&\Delta = s_1^\circ \exp i\varphi_1^\circ(t,\varepsilon)+s_2^\circ\exp i\varphi_2^\circ(t,\varepsilon)+d(\xi_l(t,\varepsilon),\varepsilon),\\
&\varphi_j^\circ(t,\varepsilon)=\int_{t_0}^{t}\omega_j^\circ(\xi_l(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\,d\tau \qquad\qquad (j=1,2).
\end{aligned} \tag{30}$$

В результате такой замены уравнения (4) преобразуются к следующим

$$\begin{aligned}
&\dot s_1^\circ = n_1^\circ s_1^\circ - \big\{(\dot\lambda_1^\circ+\dot k)s_1^\circ+(\dot\lambda_2^\circ+\dot k)s_2^\circ\exp(i(\varphi_2^\circ-\varphi_1^\circ)-\\
&\quad -\frac{1}{2\sqrt{w^\circ}}\big[i\dot e+(\lambda_2^\circ+k)\dot d\big]\exp(-i\varphi_1^\circ)\big\},\\
&\dot s_2^\circ = n_2^\circ s_2^\circ + \big\{(\dot\lambda_1^\circ+\dot k)s_1^\circ\exp(i(\varphi_1^\circ-\varphi_2^\circ)+(\dot\lambda_2^\circ+\dot k)s_2^\circ-\\
&\quad -\frac{1}{2\sqrt{w^\circ}}\big[i\dot e+(\lambda_1^\circ+k)\dot d\big]\exp(-i\varphi_2^\circ)\big\}.
\end{aligned} \tag{31}$$

Аргументы функций здесь для краткости не указаны. Из формул преобразования, обратного к (30), с учетом (10), (27) находим, что $s_j^\circ=O(1)$ $(j=1,2)$. Тогда из (27)–(29) следует, что уравнения (31) можно представить в виде

$$\dot s_1^\circ=\varepsilon^2 vN_1(t,\varepsilon)s_1^\circ+\varepsilon^3H_{s1}(t,\varepsilon), \quad \dot s_2^\circ=\varepsilon^2 vN_2(t,\varepsilon)s_2^\circ+\varepsilon^3H_{s2}(t,\varepsilon). \tag{32}$$

5. Оценки дополнительных членов в интегральном уравнении для $\theta + i\varepsilon^2\psi$. Подставив решение $\xi_l, \alpha_l, \beta_l(t,\varepsilon)$ полной системы (3), (4) в подсистему (3), получаем систему из семи тождеств, и, согласно (3), функции $\alpha_l, \beta_l(t,\varepsilon)$ входят только в ее пятую и шестую компоненты. Умножив шестую компоненту на $i\varepsilon^2$ и сложив с пятой, будем иметь комплексное равенство

$$\dot\theta_l(t,\varepsilon) + i\varepsilon^2\dot\psi_l(t,\varepsilon) = \widehat{f}(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon) + \widehat{f}_\Delta(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)\Delta_l(t,\varepsilon), \quad t \in [t_0,t_1], \tag{33}$$

где

$$\begin{aligned} &\widehat{f}(\xi,\varepsilon) = \varepsilon^4 g v^{-1}(-\cos\theta + i\varepsilon^2\psi\sin\theta),\\ &\widehat{f}_\Delta(\xi,\varepsilon) = \varepsilon^4 v^2[K_1(y,v) + iK_2(y,v,p)]. \end{aligned} \tag{34}$$

Чтобы перейти к переменным s_1°, s_2°, подставим в (33) выражение (30) для $\Delta = \Delta_l$. Вводя обозначения

$$\begin{aligned} &\widehat{h}_j(t,\varepsilon) = \int\limits_{t_0}^{t} \widehat{f}_\Delta(\xi_l(\tau,\varepsilon),\varepsilon)s_j^\circ(\tau,\varepsilon)\big[\exp\int\limits_{t_0}^{\tau} i\omega_j^\circ(\xi_l(\tau_1,\varepsilon),\varepsilon)\;d\tau_1\big]\,d\tau \;(j=1,2),\\ &\widehat{g}(\xi,\varepsilon) = \widehat{f}(\xi) + \widehat{f}_\Delta(\xi)\,d(\xi,\varepsilon) \end{aligned} \tag{35}$$

и переходя к интегральной форме записи, получаем

$$\begin{aligned} \theta_l(t,\varepsilon) + i\varepsilon^2\psi_l(t,\varepsilon) &= \theta_l(t_0,\varepsilon) + i\varepsilon^2\psi_l(t_0,\varepsilon) +\\ &+ \int\limits_{t_0}^{t} \widehat{g}(\xi_l(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\,d\tau + \widehat{h}_1(t,\varepsilon) + \widehat{h}_2(t,\varepsilon),\; t\in[t_0,t_1]. \end{aligned} \tag{36}$$

Покажем, что $\widehat{h}_j = O(\varepsilon^3),\; j=1,2$. Введем функции

$$r_j(\xi^{(3)},\varepsilon) = \frac{\widehat{f}_\Delta(\xi^{(3)},\varepsilon)}{i\omega_j^\circ(\xi^{(3)},\varepsilon)}, \quad j=1,2, \tag{37}$$

и преобразуем выражение (35) для $\widehat{h}_j$, пользуясь формулой интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \widehat{h}_j(t,\varepsilon) &= r_j(\xi_l(\tau,\varepsilon),\varepsilon)s_j^\circ(\tau,\varepsilon)\,\exp\int\limits_{t_0}^{\tau} i\omega_j^\circ(\xi_l(\tau_1,\varepsilon),\varepsilon)\,d\tau_1\Bigg|_{\tau=t_0}^{\tau=t} -\\ &- \int\limits_{t_0}^{t}\big[\exp\int\limits_{t_0}^{\tau}(i\omega_j^\circ(\xi_l(\tau_1,\varepsilon),\varepsilon)\,d\tau_1\big]\big[\frac{d}{d\tau}r_j(\xi_l(\tau_1,\varepsilon),\varepsilon)s_j^\circ(\tau,\varepsilon)\big]\,d\tau \;(j=1,2). \end{aligned} \tag{38}$$

Принимая во внимание (35), (27), (17), получаем εv-представления и оценки для функций (37) и их производных по времени в силу подсистемы (3):

$$\begin{aligned} &r_1(\xi^{(3)},\varepsilon) = \varepsilon^4 v^2 R_1(\xi^{(3)},\varepsilon) = O(\varepsilon^4),\\ &r_2(\xi^{(3)},\varepsilon) = \varepsilon^4 v^{-1} R_2(\xi^{(3)},\varepsilon) = O(\varepsilon^{7/2}),\\ &\dot r_1(\xi^{(3)},\varepsilon) = \varepsilon^7 v^3 \dot R^{(1)}_{73}(\xi^{(3)},\varepsilon) + \varepsilon^8 v \dot R^{(1)}_{81}(\xi^{(3)},\varepsilon) = O(\varepsilon^7),\\ &\dot r_2(\xi^{(3)},\varepsilon) = \varepsilon^7 \dot R^{(2)}_{70}(\xi^{(3)},\varepsilon) + \varepsilon^8 v^{-2} \dot R^{(2)}_{8,-2}(\xi^{(3)},\varepsilon) = O(\varepsilon^7), \end{aligned} \tag{39}$$

здесь $R_j = (K_1 + iK_2)/\Omega_j^\circ$ $(j = 1, 2)$. Это приводит к следующим оценкам для производных функций $r_j s_j^\circ$ по времени в силу уравнений (3), (32)

$$\frac{d}{dt} r_j s_j^\circ = O(\varepsilon^6), \quad j = 1, 2. \tag{40}$$

После интегрирования функции времени, равной $O(\varepsilon^6)$, на промежутке $[t_0, t]$ длины $O(\varepsilon^{-3})$ получаем функцию, равную $O(\varepsilon^3)$. Поэтому из (38)–(40) следуют искомые оценки $\widehat h_j = O(\varepsilon^3)$, $j = 1, 2$. Таким образом, равенство (36) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} &\theta_l(t,\varepsilon) + i\varepsilon^2\psi_l(t,\varepsilon) = \theta_l(t_0,\varepsilon) + i\varepsilon^2\psi_l(t_0,\varepsilon) +\\ &\quad + \int_{t_0}^{t} \widehat g(\xi_l(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\, d\tau + \varepsilon^3 \widehat H(t,\varepsilon), \quad t \in [t_0, t_1]. \end{aligned} \tag{41}$$

6. Погрешность решения m-системы. В векторном тождестве, которое получается при подстановке $\xi_l, \alpha_l, \beta_l(t,\varepsilon)$ в (22), пятая и шестая компоненты являются действительной и мнимой частями комплексного равенства (33), а остальные компоненты не содержат $\alpha_l, \beta_l(t,\varepsilon)$. Тогда из (41), (3) следует, что это векторное тождество может быть представлено в виде

$$\xi_l(t,\varepsilon) = \xi_l(t_0,\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} g(\xi_l(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\, d\tau + \varepsilon^3 H(t,\varepsilon), \quad t \in [t_0, t_1], \tag{42}$$

где $g(\xi,\varepsilon) = f(\xi,\varepsilon) + f_\alpha(\xi,\varepsilon) d_\alpha(\xi,\varepsilon) + f_\beta(\xi,\varepsilon) d_\beta(\xi,\varepsilon)$ — это правая часть m-системы (24).

При подстановке решения $\xi_m(t,\varepsilon)$ m-системы (24) в эту систему получаем векторное тождество

$$\xi_m(t,\varepsilon) = \xi_l(t_0,\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} g(\xi_m(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\, d\tau, \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{43}$$

Чтобы вывести оценку (25) из (42), (43), необходимо определить постоянную Липшица функции $g(\xi,\varepsilon)$ в области изменения функцийй $\xi_l, \xi_m(t,\varepsilon)$. Параллелепипед (21) не подходит в качестве такой области. Действительно, согласно п. 2 значения ξ принадлежат этому параллелепипеду для всех решений l-системы, и поэтому $\xi_l(t,\varepsilon) \in \Xi$, $t \in [t_0, t_1]$. Но нельзя гарантировать, что решение $\xi_m(t,\varepsilon)$ m-системы принадлежит Ξ для $t \in [t_0, t_1]$.

С учетом этого рассмотрим функции $\xi_l, \xi_m(t,\varepsilon)$ в параллелепипеде

$$\begin{aligned}\Xi_\varepsilon = \{\xi : (-\varepsilon, -\varepsilon, -1, \sqrt{\varepsilon}(C_{v*} - \varepsilon), -C_\theta^* - \varepsilon, -1, C_{p*} - \varepsilon) \le \xi \le \\ \le (C_x^* + \varepsilon, C_y^* + \varepsilon, 1, C_v^* + \varepsilon, C_\theta^* + \varepsilon, 1, C_p^* + \varepsilon)\},\end{aligned} \tag{44}$$

который содержит Ξ. Он получается из Ξ следующим образом. Верхние и нижние границы $\pm\varepsilon^2 C_z^*$, $\pm\varepsilon^2 C_\psi^*$ для $\varepsilon^2 z$ и $\varepsilon^2\psi$ заменены на ±1; значения постоянных, характеризующих нижние границы изменения переменных x, y, v, θ, p, уменьшены на ε; значения постоянных, характеризующих верхние границы изменения этих переменных, увеличены на ε. Очевидно, что порядки по ε частных производных от компонент вектор-функции $g(\xi^{(5)},\varepsilon)$ по компонентам вектора $\xi^{(5)} = (y, v, \theta, \varepsilon^2\psi, p)$ в Ξ_ε такие же, как и в Ξ.

Порядок по ε постоянной Липшица l_g для функции $g(\xi^{(5)},\varepsilon)$ в Ξ_ε равен порядку максимальной по модулю частной производной от компонент этой вектор-функции по компонентам вектора $\xi^{(5)}$. Чтобы определить этот порядок, отметим, что реальная и мнимая части функции $d(\xi^{(5)},\varepsilon)$ имеют такие же εv-представления (14), как сама эта функция:

$$d_\alpha(\xi^{(5)},\varepsilon) = \varepsilon^2 v^{-4} D_\alpha(\xi^{(5)},\varepsilon), \quad d_\beta(\xi^{(5)},\varepsilon) = \varepsilon^2 v^{-4} D_\beta(\xi^{(5)},\varepsilon).$$

Следовательно, уравнения m-системы (24), определяющие $\dot\theta$ и $\varepsilon^2\dot\psi$, могут быть записаны в виде

$$\dot\theta = -\varepsilon^4 \frac{g}{v}\cos\theta + \varepsilon^6 v^{-2} F_\theta(\xi^{(5)},\varepsilon),\ \varepsilon^2\dot\psi = \varepsilon^6 \frac{g}{v}\psi\sin\theta + \varepsilon^6 v^{-2} F_\psi(\xi^{(5)},\varepsilon), \tag{45}$$

где функции $F_\theta, F_\psi(\xi^{(5)},\varepsilon)$ равны $O(1)$ в Ξ_ε вместе с их частными производными по компонентам $\xi^{(5)}$. Принимая во внимание (17), заключаем, что максимальные по модулю частные производные в правых частях уравнений (45) по компонентам $\xi^{(5)}$ имеют в Ξ_ε порядок $O(\varepsilon^3)$, и такой же порядок имеют максимальные по модулю частные производные в правых частях полной m-системы. Поэтому условие Липшица для $g(\xi^{(5)},\varepsilon)$ можно записать в виде

$$||g(\xi_1,\varepsilon) - g(\xi_2,\varepsilon)|| \le \varepsilon^3 L_g ||\xi_1 - \xi_2||, \quad \xi_1, \xi_2 \in \Xi_\varepsilon, \tag{46}$$

где $L_g > 0$ — постоянная порядка 1.

Поскольку $\xi_l(t,\varepsilon) \in \Xi \subset \Xi_\varepsilon$ для всех $t \in [t_0, t_1]$ и $\xi_m(t_0,\varepsilon) = \xi_l(t_0,\varepsilon)$, то существует момент времени $t' > t_0$ такой, что $\xi_m(t,\varepsilon) \in \Xi_\varepsilon$ для всех $t \in$

$\in [t_0, t']$. Следовательно, условие (46) справедливо для векторов $\xi_1 = \xi_l(t, \varepsilon)$, $\xi_2 = \xi_m(t, \varepsilon)$ на промежутке $[t_0, t']$. Далее, из (42), (43) следует, что

$$||\xi_l(t,\varepsilon) - \xi_m(t,\varepsilon)|| \leq \varepsilon^3 L_g \int\limits_{t_0}^{t} ||\xi_l(\tau,\varepsilon) - \xi_m(\tau,\varepsilon)||\, d\tau + \varepsilon^3 C, \quad t \in [t_0, t'],$$

здесь $C > 0$ — постоянная. Используя неравенство Гронуолла (см. [13]), получаем искомую оценку (25) на промежутке $[t_0, t']$ длины $O(\varepsilon^{-3})$:

$$||\xi_l(t,\varepsilon) - \xi_m(t,\varepsilon)|| \leq \varepsilon^3 C \exp \varepsilon^3 L(t - t_0) = O(\varepsilon^3).$$

Покажем, что эта оценка справедлива на всем промежутке $[t_0, t_1]$, т. е. можно положить $t' = t_1$. Для этого достаточно установить, что $\xi_m(t, \varepsilon) \in \Xi_\varepsilon$ для всех $t \in [t_0, t_1]$. Если предположить противное, то вектор $\xi_m(t', \varepsilon)$ принадлежит границе области Ξ_ε, т. е., согласно (8), левое или правое нестрогое неравенство в определении (44) для Ξ_ε выполняется со знаком равенства для некоторых компонент ξ_{mj} $(j = 1, \ldots, 7)$. Тогда с учетом определений (21), (44) и соотношения $\xi_l(t', \varepsilon) \in \Xi$ имеем $|\xi_{lj}(t', \varepsilon) - \xi_{mj}(t', \varepsilon)| > O_+^*(\varepsilon^3)$ для данной компоненты. Но это невозможно, так как оценка (25) еще выполняется в момент времени t'. Оценка (25) доказана полностью.

Чтобы получить из (25) числовые оценки погрешностей для фазовых переменных в ненормализованной m-системе, достаточно учесть, что малый параметр ε вводился вместо числа 0.1, а в качестве масштабов нормализованных переменных $x, y, z,\ v, \theta, \psi, p$ были взяты значения соответствующих ненормализованных переменных, указанные в табл. 1. Такие числовые оценки погрешности наблюдаются в вычислительных экспериментах.

1. *Lieske R.F., Reiter, M.L.* Equations of motion for a modified point mass trajectory // Ballistic research laboratory report. – 1966. – No. 1314.
2. *McCoy R.L.* Modern exterrior ballistics. – Atglen: Schiffer publishing Ltd., 2012. – 328 p.
3. *Коносевич Б.И.* О применении асимптотических методов в теории полета осесимметричного снаряда // Механика твердого тела. – 2001. – Вып. 31. – С. 63–75.
4. *Коносевич Б.И.* Оценка погрешности асимптотического представления угловых колебаний оси симметрии вращающегося твердого тела // Прикл. механика. – 2014. – **50**, № 4. – С. 102–116.
5. *Коносевич Б.И.* Оценка погрешности линеаризованных уравнений движения осесимметричного снаряда // Прикл. математика и механика. – 2008. – **72**, вып. 6. – С. 930–941.
6. *Коносевич Б.И.* К теории полета осесимметричного снаряда // Механика твердого тела. – 1999. – Вып. 28. – С. 51–62.
7. *Корн Г.* Справочник по математике. 2-е изд. – М.: Наука, 1970. – 720 с.
8. *Федорюк М.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1980. – 350 с.
9. *Пугачев В.С.* Общая задача о движении вращающегося артиллерийского снаряда в воздухе // Тр. ВВИА им. Жуковского. – 1940. – Вып. 70. – 90 с.
10. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. 2-е изд. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
11. *Коносевич Б.И.* Исследование динамики полета осесимметричного снаряда // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 109–119.

12. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций. Т.1 – М.: Наука, 1967. – 486 с.
13. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.

B.I. Konosevich, Yu.B. Konosevich

Correctness of the modified point-mass model in the flight theory of the shell

As the starting point, the system of differential equations of motion of the shell is taken, which is obtained from the original "accurate" system by holding the linear terms of series expansions of aerodynamic forces and moments in powers of the total angle of attack, and by additional linearization with respect to the angle between the velosity of the centre of mass and the vertical plane (l-system). It consists of the subsystem of equations of translational motion and axial rotation, and of the subsystem of equations of angular motion of the symmetry axis of the shell. Averaging the first subsystem in both natural phases of angular oscillatios leads to the approximate system of differential equations of the translational motion and axial rotation of the shell, which describes its modified point-mass model as applied to l-system (m-system). With use of small-parameter methods, an estimate is obtained for the difference between the solution of l-system with given initial conditions and the solution of m-system with the same initial conditions for the variables of translational motion and axial rotation. This analytical evaluation is built in such a way that it corresponds with certain numerical estimates for components of the translational motion and axial rotation.

Keywords: *artillery shell, asymptotic methods, exterior ballistics, flight dynamics, modified point-mass trajectory model.*

ГУ "Ин-т прикл. математики и механики", Донецк Получено 26.03.15

konos.donetsk@yandex.ru