

УДК 539.3

©2006. В.В. Пузырев

СПЕКТРЫ И СВОЙСТВА НОРМАЛЬНЫХ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛН В ЗАКРЕПЛЕННЫХ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРАХ КОЛЬЦЕВОГО СЕЧЕНИЯ С СЕКТОРНЫМ ВЫРЕЗОМ

Рассмотрены задачи получения дисперсионных уравнений, описывающих полные спектры свободных нормальных волн в продольно-поляризованных закрепленных пьезокерамических цилиндрах, сечение которых представляет собой кольцевую область с секторным вырезом произвольной угловой меры. Представлена методология решения данного класса задач, построены и проанализированы диаграммы дисперсионных кривых, формы распределений упругих волновых перемещений и потенциала квазистатического электрического поля для волн отдельных мод спектра в волноводах из пьезокерамики $BaCaTiO_3$.

Введение. Анализ возможностей и механизмов управления структурой и свойствами дисперсионных спектров нормальных волн в цилиндрических волноводах из пьезокерамических материалов за счет варьирования геометрии сечения волновода является актуальным вопросом волновой механики деформируемых сред [1, 2]. Задачи данного класса представляют интерес с точки зрения получения дисперсионных зависимостей с заданными свойствами, управления частотами записывания волн, обеспечения существования заданного количества мод бегущих волн в определенном частотном диапазоне, получения необходимой формы распределения потоков мощности по поперечному сечению волновода.

Одним из механизмов варьирования свойствами дисперсионных спектров является изменение формы поперечного сечения волновода. Изучение закономерностей распространения связанных электроупругих волн в продольно-поляризованных пьезокерамических цилиндрах различных сечений позволяет дать общую картину возможностей управления дисперсионными спектрами волноводов.

Теоретический анализ распространения осесимметричных связанных электроупругих волн вдоль оси продольно-поляризованного пьезокерамического кругового цилиндра был впервые выполнен в работе [3]. Серия исследований по распространению электроупругих волн в полых однослойных и многослойных пьезокерамических цилиндрах проведена в работах [4–7]. В работе [8] рассмотрен класс задач о распространении нормальных электроупругих волн в цилиндрических пьезоактивных волноводах с секторным вырезом в круговом поперечном сечении.

В настоящей работе изучаются закономерности распространения нормальных электроупругих волн в цилиндрических пьезоактивных волноводах из материалов гексагональной системы, сечение которых представляет собой кольцевую область с секторным вырезом произвольной угловой меры (рис. 1).

1. Постановка задачи. Рассматривается цилиндрический волновод бесконечной протяженности, изготовленный из пьезоактивного предварительно поляризованного в аксиальном направлении упругого материала гексагональной системы, имеющий усложненную форму поперечного сечения – концентрическое кольцевое сечение с секторным вырезом произвольной угловой меры.

С областью поперечного сечения волновода свяжем нормированные безразмерные прямоугольные декартовы $Ox_1x_2x_3$ и цилиндрические $Or\theta z$ координаты, в которых его произвольное поперечное сечение занимает область $V = \{R_1 \leq r \leq R_0, \theta \in [-\alpha, \alpha]\}$.

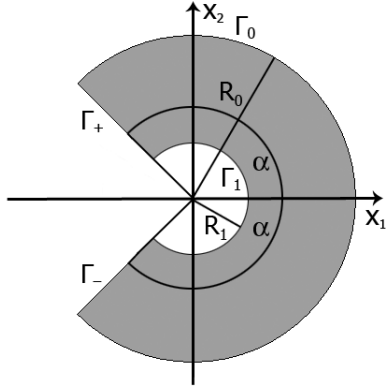


Рис. 1.

В рассматриваемом случае уравнения динамического электроупругого деформирования волновода относительно отнесенных к нормирующему параметру R_* безразмерных компонент вектора волновых упругих перемещений $\mathbf{U} = (u_1, u_2, u_3)$ и отнесенного к параметру φ_* безразмерного потенциала квазистатического электрического поля φ могут быть представлены в форме

$$\|L_{ij}\| \Phi = 0, \quad (1)$$

где $\Phi = (u_1, u_2, u_3, \varphi)^T$, а элементы операторной матрицы $\|L_{ij}\|$ имеют вид

$$\begin{aligned} L_{11} &= c_{11}\partial_1^2 + c_{66}\partial_2^2 + c_{44}\partial_3^2 - \rho R_*^2/c_*\partial_t^2, & L_{12} &= L_{21} = (c_{12} + c_{66})\partial_1\partial_2, \\ L_{13} &= L_{31} = (c_{13} + c_{44})\partial_1\partial_3, & L_{14} &= -L_{41} = -(e_{31} + e_{15})\partial_1\partial_3, \\ L_{22} &= c_{66}\partial_1^2 + c_{11}\partial_2^2 + c_{44}\partial_3^2 - \rho R_*^2/c_*\partial_t^2, & L_{23} &= L_{32} = (c_{13} + c_{44})\partial_2\partial_3, \\ L_{24} &= -L_{42} = -(e_{31} + e_{15})\partial_2\partial_3, & L_{33} &= c_{44}\partial_1^2 + c_{44}\partial_2^2 + c_{33}\partial_3^2 - \rho R_*^2/c_*\partial_t^2, \\ L_{34} &= -L_{43} = -e_{15}(\partial_1^2 + \partial_2^2) - e_{33}\partial_3^2, & L_{44} &= \varepsilon_{11}(\partial_1^2 + \partial_2^2) + \varepsilon_{33}\partial_3^2. \end{aligned} \quad (2)$$

В соотношениях (2) c_{ij} – отнесенные к c_* безразмерные упругие постоянные, e_{ij} – отнесенные к c_*/E_* безразмерные пьезомодули, ε_{ij} – отнесенные к c_*/E_*^2 безразмерные диэлектрические проницаемости, ρ – плотность пьезоактивного материала волновода, $\partial_j = \partial/\partial x_j$, $\partial_t = \partial/\partial t$.

Распространение в рассматриваемом волноводе нормальных электроупругих волн, характеризуемых функциями напряженности вектора упругих динамических перемещений $\mathbf{U} = \text{Re}(\mathbf{U}_0(x_1, x_2)e^{-i(\omega t - kx_3)})$ и потенциала квазистатического электрического поля $\varphi = \text{Re}(\varphi_0(x_1, x_2)e^{-i(\omega t - kx_3)})$ описывается однородной спектральной задачей относительно комплексных амплитудных компонент $\mathbf{U}_0^T = (u_1^{(0)}(x_1, x_2), u_2^{(0)}(x_1, x_2), u_3^{(0)}(x_1, x_2))$, $\varphi^{(0)}(x_1, x_2)$ полей \mathbf{U} , φ . Она включает в себя систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\|\tilde{L}_{ij}\| \Phi^{(0)} = 0, \quad \Phi^{(0)} = (u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)}, \varphi^{(0)})^T, \quad (3)$$

а также краевые условия для $u_j^{(0)}, \varphi^{(0)}$ на участках граничной поверхности волновода. В уравнениях (3) элементы матрицы операторов имеют представления вида (2) с формальной заменой $\partial_3 \rightarrow ik$, $\partial_t \rightarrow -i\omega$, где k – безразмерное отнесенное к R_*^{-1} волновое число, ω – круговая частота нормальной волны.

Граничные условия, дополняющие систему дифференциальных уравнений (3), отражают физические предположения о состоянии различных участков границы волновода. В настоящей работе рассматривается случай жесткого закрепления внешней и

внутренней цилиндрических поверхностей волновода, покрытых сверхтонкими проводящими безинерционными электродами. Предполагается, что на поверхностях секторного выреза имеются сверхтонкие проводящие нерастяжимые мембранные покрытия, короткозамкнутые с электродным покрытием цилиндрических поверхностей. Сформулированные краевые условия имеют вид

$$(u_r)_{\Gamma_j} = (u_\theta)_{\Gamma_j} = (u_z)_{\Gamma_j} = (\varphi)_{\Gamma_j} = 0 \quad j = 0, 1, \quad (4)$$

$$\Gamma_0 = \{r = R_0, \theta \in [-\alpha, \alpha]\}, \quad \Gamma_1 = \{r = R_1, \theta \in [-\alpha, \alpha]\};$$

$$(\sigma_{\theta\theta})_{\Gamma_\pm} = (u_r)_{\Gamma_\pm} = (u_z)_{\Gamma_\pm} = (\varphi)_{\Gamma_\pm} = 0, \quad (5)$$

$$\Gamma_\pm = \{R_1 \leq r \leq R_0; \theta = \pm\alpha\},$$

где u_α и $\sigma_{\alpha\beta}$ – соответственно упругие перемещения и механические напряжения на основных площадках цилиндрической системы координат.

2. Аналитическое интегрирование системы волновых уравнений. Для интегрирования уравнений вида (3) вводятся представления искомых функций $u_j^{(0)}, \varphi^{(0)}$ через обобщенные волновые потенциалы φ_j :

$$u_1^{(0)} = \partial_1 \varphi_1 + \partial_2 \varphi_4, \quad u_2^{(0)} = \partial_2 \varphi_1 - \partial_1 \varphi_4, \quad u_3^{(0)} \equiv \varphi_2, \quad \varphi^{(0)} \equiv \varphi_3. \quad (6)$$

В результате система уравнений (3) приводится к виду

$$\begin{aligned} & \partial_1 [(c_{11}D^2 - c_{44}k^2 + \Omega^2)\varphi_1 + ik(c_{13} + c_{44})\varphi_2 - ik(e_{31} + e_{15})\varphi_3] + \\ & \quad + \partial_2 [(c_{66}D^2 - c_{44}k^2 + \Omega^2)\varphi_4] = 0; \\ & \partial_2 [(c_{11}D^2 - c_{44}k^2 + \Omega^2)\varphi_1 + ik(c_{13} + c_{44})\varphi_2 - ik(e_{31} + e_{15})\varphi_3] - \\ & \quad - \partial_1 [(c_{66}D^2 - c_{44}k^2 + \Omega^2)\varphi_4] = 0; \end{aligned} \quad (7)$$

$$[ik(c_{13} + c_{44})\varphi_1 + c_{44}\varphi_2 - e_{15}\varphi_3] D^2 + (\Omega^2 - c_{33}k^2)\varphi_2 + e_{33}k^2\varphi_3 = 0;$$

$$[ik(e_{31} + e_{15})\varphi_1 + e_{15}\varphi_2 + \varepsilon_{11}\varphi_3] D^2 - e_{33}k^2\varphi_2 - \varepsilon_{33}k^2\varphi_3 = 0,$$

где $D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2$ – двумерный оператор Лапласа, Ω^2 – приведенный безразмерный частотный параметр нормальной волны.

Первые два уравнения системы (7) можно совместно записать в форме

$$\text{grad}F_1 + \text{rot}[(0, 0, F_2)] = 0, \quad (8)$$

$$F_1 = (c_{11}D^2 - c_{44}k^2 + \Omega^2)\varphi_1 + ik(c_{13} + c_{44})\varphi_2 - ik(e_{31} + e_{15})\varphi_3,$$

$$F_2 = (c_{66}D^2 - c_{44}k^2 + \Omega^2)\varphi_4, \quad (9)$$

откуда, с учетом известного из теории поля представления вектор-функции в виде суммы потенциальной и вихревой частей, и следствия, согласно которому нулевое однородное поле имеет нулевые скалярный и векторный потенциалы, получаем

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0. \quad (10)$$

Таким образом, следствием (3) является система уравнений

$$\begin{aligned} L_{11}\varphi_1 + L_{12}\varphi_2 + L_{13}\varphi_3 &= 0, \\ L_{21}\varphi_1 + L_{22}\varphi_2 + L_{23}\varphi_3 &= 0, \\ L_{31}\varphi_1 + L_{32}\varphi_2 + L_{33}\varphi_3 &= 0, \\ L_{44}\varphi_4 &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} L_{11} &= c_{11}D^2 - c_{44}k^2 + \Omega^2, & L_{12} &= ik(c_{13} + c_{44}), & L_{13} &= -ik(e_{31} + e_{15}), \\ L_{21} &= ik(c_{13} + c_{44})D^2, & L_{22} &= c_{44}D^2 + \Omega^2 - c_{33}k^2, & L_{23} &= -e_{15}D^2 + e_{33}k^2, \\ L_{31} &= ik(e_{31} + e_{15})D^2, & L_{32} &= e_{15}D^2 - e_{33}k^2, & L_{33} &= \varepsilon_{11}D^2 - \varepsilon_{33}k^2, \\ L_{44} &= c_{66}D^2 - c_{44}k^2 + \Omega^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Для φ_j вводятся представления

$$\varphi_j = A_j\chi(x_1, x_2), \quad (13)$$

где $\chi(x_1, x_2)$ – функции, удовлетворяющие метагармоническому уравнению $D^2\chi(x_1, x_2) + \gamma^2\chi(x_1, x_2) = 0$. Таким образом, следствием (11) будет однородная система линейных алгебраических уравнений относительно A_j :

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{11}A_1 + \tilde{L}_{12}A_2 + \tilde{L}_{13}A_3 &= 0, \\ \tilde{L}_{21}A_1 + \tilde{L}_{22}A_2 + \tilde{L}_{23}A_3 &= 0, \\ \tilde{L}_{31}A_1 + \tilde{L}_{32}A_2 + \tilde{L}_{33}A_3 &= 0, \\ \tilde{L}_{44}A_4 &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

определитель которой зависит от параметра γ . Выражения для элементов матрицы \tilde{L}_{ij} системы (14) получаются из выражений для операторов (12) формальной заменой $D^2 \rightarrow -\gamma^2$.

Система (14) распадается на независимую подсистему относительно постоянных A_1, A_2, A_3 и отдельное уравнение для A_4 . Условие нетривиальной разрешимости подсистемы для A_1, A_2, A_3 , т. е. равенство нулю ее определителя, имеет вид степенного характеристического уравнения относительно значений параметра γ :

$$\alpha_1\gamma^6 + \alpha_2\gamma^4 + \alpha_3\gamma^2 + \alpha_4 = 0, \quad (15)$$

в котором

$$\alpha_1 = -c_{11}e_{15}^2 - c_{11}c_{44}\varepsilon_{11}, \quad \dots, \quad \alpha_4 = k^2(c_{44}k^2 - \Omega^2)(-c_{33}\varepsilon_{33}k^2 - e_{33}^2k^2 + \varepsilon_{33}\Omega^2).$$

Каждому найденному из (15) значению $\gamma^2 = \gamma_j^2$ ($j = \overline{1, 3}$) соответствует определенное с точностью до константного множителя нетривиальное решение подсистемы в виде

$$\mathbf{A}_j = (A_{1j}, A_{2j}, A_{3j}) = \tilde{A}_j \cdot (\beta_{1j}, \beta_{2j}, \beta_{3j}), \quad (16)$$

где β_{pj} можно выбрать в форме домножаемых на одинаковый нормирующий множитель алгебраических дополнений к любой из строк матрицы $\|\tilde{L}_{nm}\|$. При выборе в качестве указанной строки первой строки матрицы $\|\tilde{L}_{nm}\|$, а в качестве нормирующего множителя L_{33}^{-1} получаем

$$\begin{aligned}\beta_{1j} &= \tilde{L}_{22}^{(j)} - \tilde{L}_{23}^{(j)} \cdot \tilde{L}_{32}^{(j)} / \tilde{L}_{33}^{(j)}, & \beta_{2j} &= -\tilde{L}_{21}^{(j)} + \tilde{L}_{31}^{(j)} \cdot \tilde{L}_{23}^{(j)} / \tilde{L}_{33}^{(j)}, \\ \beta_{3j} &= (\tilde{L}_{21}^{(j)} \cdot \tilde{L}_{32}^{(j)} - \tilde{L}_{31}^{(j)} \cdot \tilde{L}_{22}^{(j)}) / \tilde{L}_{33}^{(j)}, & \tilde{L}_{nm}^{(j)} &= \tilde{L}_{nm} \Big|_{\gamma=\gamma_j}.\end{aligned}\quad (17)$$

Таким образом, представления для функций φ_p ($p = \overline{1, 3}$) имеют форму

$$\varphi_p = \sum_{j=1}^3 A_j \beta_{pj} \chi_j(x_1, x_2), \quad (18)$$

где χ_j – метагармонические функции, определяемые из уравнений $D^2 \chi_j + \gamma_j^2 \chi_j = 0$.

Представляя решение однородного уравнения для φ_4 в форме (13), получаем

$$\varphi_4 = A_4 \chi_4(x_1, x_2), \quad (19)$$

где $\gamma_4^2 = (\Omega^2 - c_{44} k^2) c_{66}^{-1}$.

В итоге выражения для компонент комплексного амплитудного вектора исследуемых нормальных волн будут иметь вид

$$\begin{aligned}u_1^{(0)} &= \sum_{j=1}^3 A_j \beta_{1j} \partial_1 \chi_j(x_1, x_2) + A_4 \partial_2 \chi_4(x_1, x_2), \\ u_2^{(0)} &= \sum_{j=1}^3 A_j \beta_{1j} \partial_2 \chi_j(x_1, x_2) - A_4 \partial_1 \chi_4(x_1, x_2), \\ u_3^{(0)} &= \sum_{j=1}^3 A_j \beta_{2j} \chi_j(x_1, x_2), \\ \varphi^{(0)} &= \sum_{j=1}^3 A_j \beta_{3j} \chi_j(x_1, x_2).\end{aligned}\quad (20)$$

3. Получение дисперсионных уравнений. Дисперсионные соотношения для семейств нормальных волн в рассматриваемых волноводах выводятся из граничных условий (4), (5), для записи которых через функции χ_j на базе известных соотношений связи компонент напряженно-деформированного состояния на основных площадках декартовой и цилиндрической координатных систем могут быть получены представления

$$u_r^{(0)} = \sum_{j=1}^3 A_j \beta_{1j} \partial_r \chi_j + A_4 r^{-1} \partial_\theta \chi_4, \quad u_\theta^{(0)} = \sum_{j=1}^3 A_j \beta_{1j} r^{-1} \partial_\theta \chi_j - A_4 \partial_r \chi_4, \quad (21)$$

$$u_z^{(0)} = \sum_{j=1}^3 A_j \beta_{2j} \chi_j, \quad \varphi^{(0)} = \sum_{j=1}^3 A_j \beta_{3j} \chi_j,$$

где $\partial_r = \partial/\partial r$, $\partial_\theta = \partial/\partial\theta$.

Множество волн исследуемого типа образует суперпозицию независимых подмножеств волн с различной симметрией функций волновых перемещений в области сечения волновода. Следовательно, дисперсионные соотношения целесообразно получать в отдельности для волн "симметричного" типа, которые имеют четность

$$\begin{aligned} u_r(r, -\theta) &= u_r(r, \theta), & u_\theta(r, -\theta) &= -u_\theta(r, \theta), \\ u_z(r, -\theta) &= u_z(r, \theta), & (r, \theta) &\in V; \end{aligned}$$

и волн "антисимметричного" типа с четностью

$$\begin{aligned} u_r(r, -\theta) &= -u_r(r, \theta), & u_\theta(r, -\theta) &= u_\theta(r, \theta), \\ u_z(r, -\theta) &= -u_z(r, \theta), & (r, \theta) &\in V. \end{aligned}$$

С учетом формы области, занимаемой сечением волновода, представления функций $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ выбираются в виде суперпозиции базисных решений метатармонических уравнений в областях внутреннего и внешнего типов

$$\begin{aligned} \varphi_p &= \sum_{j=1}^3 \left(A_j^{(1)} \beta_{pj} \chi_j^{(1)} + A_j^{(2)} \beta_{pj} \chi_j^{(2)} \right) \quad (p = \overline{1, 3}), \\ \varphi_4 &= A_4^{(1)} \chi_4^{(1)} + A_4^{(2)} \chi_4^{(2)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь $\chi_j^{(1)}, \chi_j^{(2)}$ – соответственно базисные решения метатармонических уравнений для областей внутреннего и внешнего типов.

Для волн "симметричного" типа вводятся априори удовлетворяющие условию (5) представления $\chi_j^{(1)}, \chi_j^{(2)}$, соответствующие независимым семействам волн с различными показателями изменчивости n по угловой координате:

$$\begin{aligned} \chi_{jn}^{(1)} &= J_{\lambda_n}(\gamma_j r) \cos \lambda_n \theta, & \chi_{4n}^{(1)} &= J_{\lambda_n}(\gamma_4 r) \sin \lambda_n \theta, \\ \chi_{jn}^{(2)} &= Y_{\lambda_n}(\gamma_j r) \cos \lambda_n \theta, & \chi_{4n}^{(2)} &= Y_{\lambda_n}(\gamma_4 r) \sin \lambda_n \theta, \\ \lambda_n &= (2n + 1)\pi/2\alpha \quad (j = \overline{1, 3}; n = \overline{0, \infty}). \end{aligned} \quad (23)$$

С учетом ортогональности систем функций $\{\cos \lambda_n \theta\}, \{\sin \lambda_n \theta\}$ на интервале $\theta \in [-\alpha, \alpha]$ для семейств волн "симметричного" типа с показателем n следуют дисперсионные уравнения

$$F_n(\Omega, k) = \det \|\Delta_{nmpij}\| = 0 \quad (m = 0, 1; p = 1, 2; i, j = \overline{1, 4}), \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{nm11j} &= \beta_{1j} (\lambda_n R_m^{-1} J_{\lambda_n}(\gamma_j R_m) - \gamma_j J_{\lambda_{n+1}}(\gamma_j R_m)), & \Delta_{nm114} &= \lambda_n R_m^{-1} J_{\lambda_n}(\gamma_4 R_m), \\ \Delta_{nm12j} &= -\beta_{1j} \lambda_n R_m^{-1} J_{\lambda_n}(\gamma_j R_m), & \Delta_{nm124} &= -(\lambda_n R_m^{-1} J_{\lambda_n}(\gamma_4 R_m) - \gamma_4 J_{\lambda_{n+1}}(\gamma_4 R_m)), \\ \Delta_{nm13j} &= \beta_{2j} J_{\lambda_n}(\gamma_j R_m), & \Delta_{nm134} &= 0, \\ \Delta_{nm14j} &= \beta_{3j} J_{\lambda_n}(\gamma_j R_m), & \Delta_{nm144} &= 0, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{nm21j} &= \beta_{1j} (\lambda_n R_m^{-1} Y_{\lambda_n}(\gamma_j R_m) - \gamma_j Y_{\lambda_{n+1}}(\gamma_j R_m)), & \Delta_{nm214} &= \lambda_n R_m^{-1} Y_{\lambda_n}(\gamma_4 R_m), \\ \Delta_{nm22j} &= -\beta_{1j} \lambda_n R_m^{-1} Y_{\lambda_n}(\gamma_j R_m), & \Delta_{nm224} &= -(\lambda_n R_m^{-1} Y_{\lambda_n}(\gamma_4 R_m) - \gamma_4 Y_{\lambda_{n+1}}(\gamma_4 R_m)), \\ \Delta_{nm23j} &= \beta_{2j} Y_{\lambda_n}(\gamma_j R_m), & \Delta_{nm234} &= 0, \\ \Delta_{nm24j} &= \beta_{3j} Y_{\lambda_n}(\gamma_j R_m), & \Delta_{nm244} &= 0, \\ & & (j = \overline{1, 3}; m = 0, 1). \end{aligned}$$

По аналогичной схеме для семейств волн "антисимметричного" типа при выборе представлений

$$\begin{aligned} \chi_{jn}^{(1)} &= J_{\eta_n}(\gamma_j r) \sin \eta_n \theta, & \chi_{4n}^{(1)} &= J_{\eta_n}(\gamma_4 r) \cos \eta_n \theta, \\ \chi_{jn}^{(2)} &= Y_{\eta_n}(\gamma_j r) \sin \eta_n \theta, & \chi_{4n}^{(2)} &= Y_{\eta_n}(\gamma_4 r) \cos \eta_n \theta, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\eta_n = n\pi/\alpha \quad (j = \overline{1, 3}; n = \overline{1, \infty})$$

следуют дисперсионные соотношения

$$\tilde{F}_n(\Omega, k) = \det \left\| \tilde{\Delta}_{nmpij} \right\| = 0 \quad (m = 0, 1; p = 1, 2; i, j = \overline{1, 4}). \quad (27)$$

Выражения для $\tilde{\Delta}_{nmpij}$ имеют структуру, качественно сходную со структурой выражений (25).

4. Результаты численных исследований. Конкретный анализ дисперсионных спектров для исследуемых типов нормальных волн осуществлен применительно к волноводам из аксиально-поляризованной пьезокерамики $BaCaTiO_3$ [3, 9] с физико-механическими параметрами $c_{11} = 15.8$, $c_{12} = 6.9$, $c_{13} = 6.75$, $c_{33} = 15.0$, $c_{44} = 4.5$, $e_{31} = -3.1$, $e_{33} = 13.5$, $e_{15} = 10.9$, $\varepsilon_{11} = 88.5$, $\varepsilon_{33} = 80.535$. Приведенные нормированные значения постоянных соответствуют выбору параметров c_* и E_* со значениями $c_* = 10^{10} H/m^2$, $E_* = 10^{10} H/K$.

Анализ ветвей действительных и мнимых корней дисперсионных уравнений (24), (27) проводился методом бисекции интервала перемены знака дисперсионной функции. Алгоритм поиска корней построен по схеме, сочетающей нахождения значений k для фиксируемых величин параметра Ω и нахождения значений Ω для фиксируемых величин параметра k . Безразмерный частотный параметр Ω варьировался в пределах $\Omega \in [0; 32]$, безразмерное волновое число – в пределах $\text{Re } k \in [0; 10]$, $\text{Im } k \in [0; 10]$.

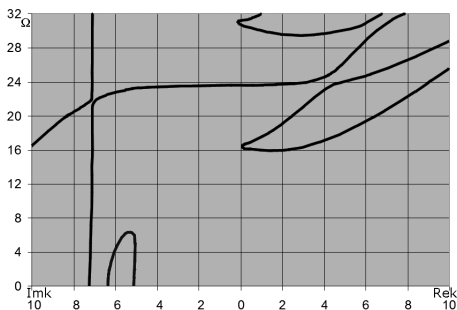


Рис. 2.

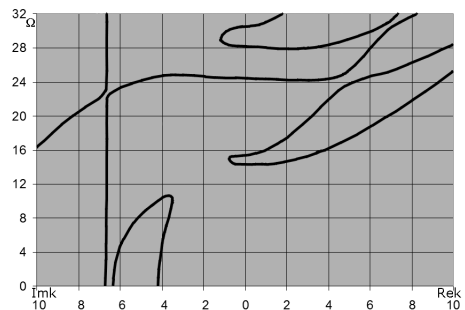


Рис. 3.

На рис. 2, 3 приведены соответственно действительные и мнимые ветви дисперсионных спектров нормальных волн "симметричного" типа с показателем $n = 0$ для

волноводов с угловыми мерами сечения $\alpha = \pi/4$ и $\alpha = \pi/2$. Как показывает их анализ, увеличение угловых размеров сечения волновода ведет к снижению частот запираания бегущих волн при сохранении качественной картины чередования ветвей дисперсионного спектра. Характерным является отсутствие в спектрах мод бегущих нормальных волн с нулевой частотой запираания и наличие в мнимой части спектров фрагментов, которые объединяются в "почти вертикальные" дисперсионные кривые, характерные для спектров связанных нормальных электроупругих волн [4 – 8]. Значения $\text{Im}k$, характеризующие "почти вертикальные" фрагменты спектра, уменьшаются с ростом α .

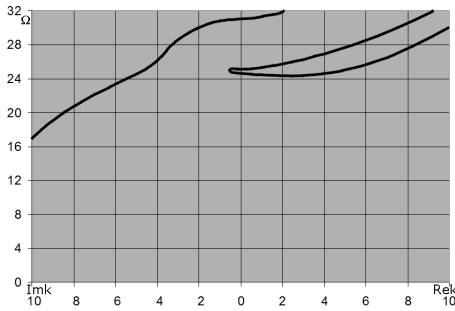


Рис. 4.

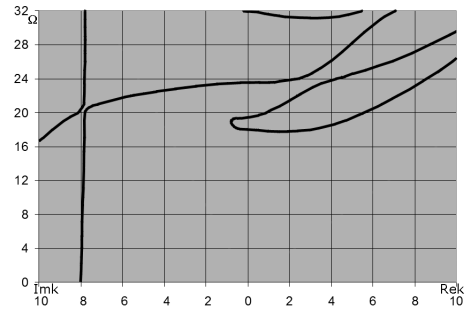


Рис. 5.

На рис. 4, 5 представлены дисперсионные спектры для нормальных волн "симметричного" типа с показателем $n = 1$ в волноводах с угловыми мерами сечения $\alpha = \pi/4$ и $\alpha = \pi/2$ соответственно. Частоты запираания первых двух мод бегущих волн в спектре волновода на рис. 5 выше частот запираания подобных мод в случае $n = 0$ (рис. 3), а частоты запираания третьей бегущей волны очень близки. Для спектра волн с $n = 1$ наблюдается рост значений $\text{Im}k$, соответствующего "почти вертикальной" ветви. В случае волновода с $\alpha = \pi/4$ количественные различия в спектрах нормальных волн с $n = 0$ и $n = 1$ гораздо существеннее, чем в случае $\alpha = \pi/2$. Это выражается, в частности, в более резком росте частот запираания бегущих волн из мод с одинаковыми номерами. Можно также отметить, что низшие моды в спектрах с $n = 1$ (рис. 4, 5) имеют выраженные участки обратной волны.

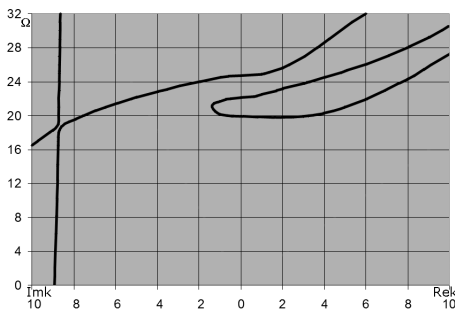


Рис. 6.

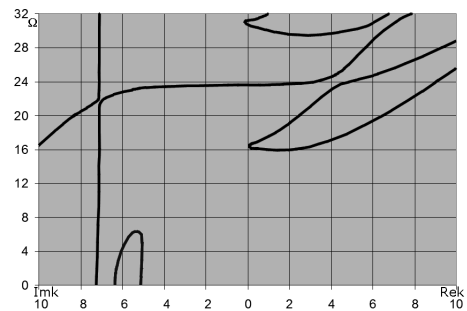


Рис. 7.

Рис. 6, 7 иллюстрируют распределения действительных и мнимых ветвей дисперсионных спектров для волн "антисимметричного" типа с показателем $n = 1$ в волноводах с мерами сечения $\alpha = \pi/4$ и $\alpha = \pi/2$. Эти спектры имеют много элементов качественной близости со спектрами симметричных волн при $n = 0$; частоты запираания двух низших мод из спектра при $n = 1$ повышаются, частоты запираания третьей моды практически совпадают.

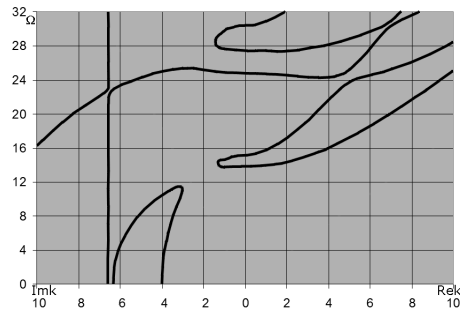


Рис. 8.

Наконец, динамика перестройки спектров волн с $n = 0$ в случае волноводов с $\alpha = \pi/2$ (рис. 3) и $\alpha = 3\pi/4$ (рис. 8), как показывают расчеты, замедляется и эти спектры достаточно близки качественно и количественно.

На рис. 9 – 12 в качестве иллюстрации кинематических и энергетических свойств

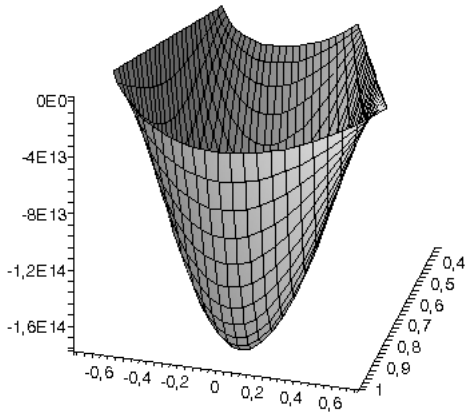


Рис. 9.

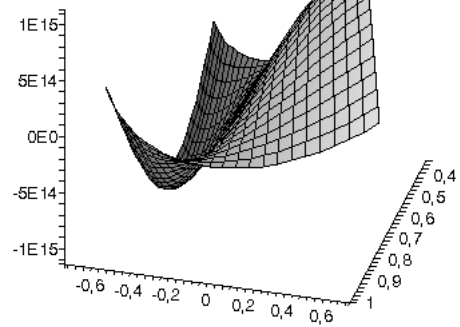


Рис. 10.

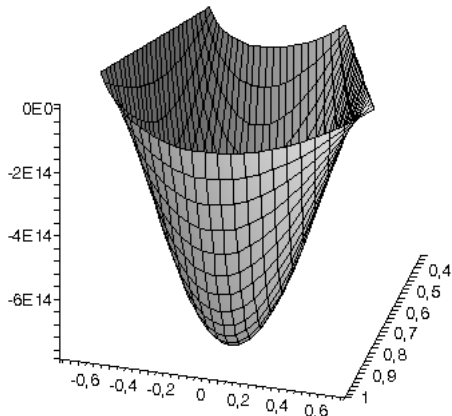


Рис. 11.

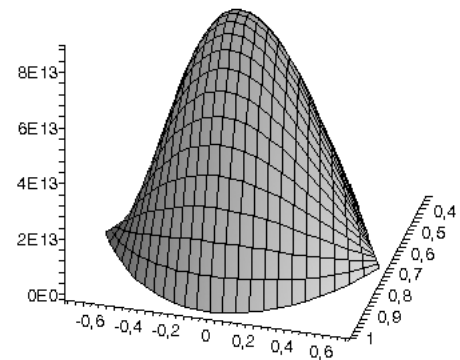


Рис. 12.

исследуемых нормальных волн соответственно представлены амплитудные формы волновых перемещений u_r , u_θ , u_z и потенциала квазистатического электрического поля φ в сечении волновода с секторным вырезом меры $\alpha = \pi/4$ для волны "симметричного" типа из первой моды дисперсионного спектра с $n = 0$, $k = 2$, $\Omega = 15.971$. Полученные данные о формах могут быть использованы для определения способа оптимального воз-

буждения соответствующих бегущих волн и способа получения доступа к переносимой волнами этого типа сигнальной информации.

Проведенные численные исследования подтверждают гипотезу о возможности управления структурой и свойствами дисперсионных спектров нормальных волн в пьезоактивных цилиндрических волноводах за счет изменения геометрии сечения. Варьирование угловой меры секторного выреза является одним из способов управления дисперсионными свойствами волновода.

1. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К.: Наук. думка, 1981. – 284 с.
2. *Микер Т., Мейтцлер А.* Волноводное распространение в протяженных цилиндрах и пластинках // Физическая акустика / Под ред. У. П. Мэзона. Т. 1, ч. А. – М.: Мир, 1966. – С. 140–203.
3. *Ивина Н. Ф., Касаткин Б. А.* Нормальные волны в анизотропном пьезоактивном волноводе // Дефектоскопия. – 1975. – № 4. – С. 27–33.
4. *Шульга Н. А., Болжисев А. М.* Колебания пьезоэлектрических тел. – К.: Наук. думка, 1990. – 228 с.
5. *Шульга Н. А., Григоренко А. Я., Лоза И. А.* Осесимметричные электроупругие волны в полном пьезокерамическом цилиндре // Прикл. механика. – 1984. – 20, № 1. – С. 79–86.
6. *Григоренко А. Я., Лоза И. А., Шульга Н. А.* Распространение осесимметричных волн в пьезокерамическом полном цилиндре // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1983. – № 3. – С. 34–37.
7. *Shulga N.A.* Propagation of harmonic waves in anisotropic piezoelectric cylinders. Waveguides with complicated properties // Int. Appl. Mech. – 2002. – 38, № 12. – P. 1440–1463.
8. *Пузырев В. В.* Дисперсионные спектры электроупругих волн в продольно-поляризованных пьезокерамических цилиндрах с секторным вырезом в круговом поперечном сечении // Вісн. Донецького ун-ту, Сер. А: Природничі науки. – 2006. – Вип.1. – С. 176–183.
9. *Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г.* Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физическая акустика / Под ред. У. П. Мэзона. Т. 1, ч. А. – М.: Мир, 1966. – С. 204–326.