ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2006. Вып. 36

УДК 531.38; 539.3

©2006. **С.Н. Судаков**

О ВРАЩЕНИИ УПРУГОГО ЭЛЛИПСОИДА С МОДУЛЕМ ЮНГА, ЗАДАННЫМ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ КООРДИНАТ

Исследованы деформации упругого тела эллипсоидальной формы, вызванные равномерным вращением вокруг главной оси. Предполагается, что модуль Юнга задан квадратичной функцией координат.

Пусть дано упругое эллипсоидальное тело, граница которого в прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ описывается уравнением

$$x_1^2/c_1^2 + x_2^2/c_2^2 + x_3^2/c_3^2 = 1, \tag{1}$$

где c_1, c_2, c_3 — константы. Плотность ρ и коэффициент Пуассона ν — константы, а модуль Юнга E является следующей функцией координат:

$$E = E_0(1 - x_1^2/c_1^2 - x_2^2/c_2^2 - x_3^2/c_3^2), \tag{2}$$

где E_0 — константа.

Требуется определить перемещения, которые совершат точки тела относительно осей $Ox_1x_2x_3$, если тело вместе с системой координат $Ox_1x_2x_3$ будет приведено во вращение с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси Ox_3.

Уравнения теории упругости, описывающие равновесие приведенного во вращение упругого тела, имеют вид [1, 2]

$$\operatorname{div}\Pi - \rho\,\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = 0, \tag{3}$$

где $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор перемещений точек тела относительно осей $Ox_1x_2x_3$; $\mathbf{r} = \mathbf{x} + \mathbf{u}$; $\mathbf{x}$ — координатный вектор, описывающий положение точек тела относительно осей $Ox_1x_2x_3$ при отсутствии вращения; $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$; Π — тензор напряжений с компонентами

$$p_{ii} = 2\mu\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \lambda\theta, \quad p_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad i \neq j\,, \tag{4}$$

$$\theta = \mathtt{div}\,\mathbf{u},$$

$$2\mu = \frac{E}{1+\nu}\,, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,.$$

Из выражений (1) и (2) следует, что компоненты тензора напряжений p_{ij} обращаются в нуль на границе эллипсоида. Следовательно, на границе не будут действовать внешние поверхностные силы.

Подставляя выражения (4) в уравнения (3) и учитывая (2), получаем

$$\begin{gathered}\mu\Delta u_1 + (\mu+\lambda)\frac{\partial\theta}{\partial x_1} + 2\frac{\partial\mu}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\mu}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) + \\ + \frac{\partial\mu}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial\lambda}{\partial x_1}\theta + \rho f_1 = 0 \quad (123),\end{gathered} \tag{5}$$

где $f_1 = \omega^2(x_1 + u_1)$, $\quad f_2 = \omega^2(x_2 + u_2)$, $\quad f_3 = 0$. Решение системы уравнений (5) ищем в виде

$$u_i = q_{i1}x_1 + q_{i2}x_2 + q_{i3}x_3, \quad i = 1, 2, 3, \tag{6}$$

где q_{ij} — константы.

Подставляя выражения (6) в уравнения (5), находим

$$-2\mu_0\left[\frac{2x_1}{c_1^2}\,q_{11} + \frac{x_2}{c_2^2}\,(q_{12}+q_{21}) + \frac{x_3}{c_3^2}\,(q_{13}+q_{31})\right] -$$

$$-\lambda_0(q_{11}+q_{22}+q_{33})\,\frac{2x_1}{c_1^2} + \rho\omega^2[(1+q_{11})x_1 + q_{12}x_2 + q_{13}x_3] = 0,$$

$$-2\mu_0\left[\frac{2x_2}{c_2^2}\,q_{22} + \frac{x_3}{c_3^2}\,(q_{23}+q_{32}) + \frac{x_1}{c_1^2}\,(q_{21}+q_{12})\right] -$$

$$-\lambda_0(q_{11}+q_{22}+q_{33})\,\frac{2x_2}{c_2^2} + \rho\omega^2[(1+q_{22})x_2 + q_{23}x_3 + q_{21}x_1] = 0,$$

$$-2\mu_0\left[\frac{2x_3}{c_3^2}\,q_{33} + \frac{x_1}{c_1^2}\,(q_{31}+q_{13}) + \frac{x_2}{c_2^2}\,(q_{32}+q_{23})\right] - \lambda_0(q_{11}+q_{22}+q_{33})\,\frac{2x_3}{c_3^2} = 0,$$

где

$$\mu_0 = \frac{E_0}{2(1+\nu)}\,, \quad \lambda_0 = \frac{\nu E_0}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,.$$

Полученные равенства должны выполняться при любых значениях x_1, x_2, x_3. Поэтому уравнения для q_{ij} будут иметь вид

$$\begin{gathered}
[2(\lambda_0+2\mu_0) - \rho c_1^2\omega^2]q_{11} + 2\lambda_0 q_{22} + 2\lambda_0 q_{33} = \rho c_1^2\omega^2,\\
2\lambda_0 q_{11} + [2(\lambda_0+2\mu_0) - \rho c_2^2\omega^2]q_{22} + 2\lambda_0 q_{33} = \rho c_2^2\omega^2,\\
\lambda_0 q_{11} + \lambda_0 q_{22} + (\lambda_0+2\mu_0)q_{33} = 0,
\end{gathered} \tag{7}$$

$$(2\mu_0 - \rho c_2^2\omega^2)q_{12} + 2\mu_0 q_{21} = 0, \qquad 2\mu_0 q_{12} + (2\mu_0 - \rho c_1^2\omega^2)q_{21} = 0, \tag{8}$$

$$(2\mu_0 - \rho c_3^2\omega^2)q_{23} + 2\mu_0 q_{32} = 0, \qquad q_{23} + q_{32} = 0, \tag{9}$$

$$(2\mu_0 - \rho c_3^2\omega^2)q_{13} + 2\mu_0 q_{31} = 0, \qquad q_{13} + q_{31} = 0. \tag{10}$$

Системы (7)—(10) решаются независимо друг от друга. Решение системы (7) имеет вид

$$q_{ii} = \frac{\Delta_{ii}}{\Delta}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{11}$$

где

$$\begin{gathered}
\Delta = \rho^2\omega^4 c_1^2c_2^2(\lambda_0+2\mu_0) - 8\rho\omega^2\mu_0(\lambda_0+\mu_0)(c_1^2+c_2^2) + 16\mu_0^2(3\lambda_0+2\mu_0),\\
\Delta_{11} = \rho\omega^2[a_1 - \rho\omega^2c_1^2c_2^2(\lambda_0+2\mu_0)],\\
\Delta_{22} = \rho\omega^2[a_2 - \rho\omega^2c_1^2c_2^2(\lambda_0+2\mu_0)],\\
\Delta_{33} = 2\rho\omega^2\lambda_0[-2\mu_0(c_1^2+c_2^2) + \rho\omega^2c_1^2c_2^2],\\
a_1 = 2c_1^2(\lambda_0+\mu_0) - c_2^2\lambda_0, \quad a_2 = 2c_2^2(\lambda_0+\mu_0) - c_1^2\lambda_0.
\end{gathered} \tag{12}$$

Значения ω^2, при которых $\Delta = 0$, определяются формулой

$$\omega_{1,2}^2 = 4\mu_0 \frac{(\lambda_0+\mu_0)(c_1^2+c_2^2) \pm \sqrt{(\lambda_0+\mu_0)^2(c_1^2+c_2^2)^2 - c_1^2c_2^2(\lambda_0+2\mu_0)(3\lambda_0+2\mu_0)}}{\rho c_1^2 c_2^2(\lambda_0+2\mu_0)} .$$

Очевидно, что в числителе этой формулы квадрат первого слагаемого больше подкоренного выражения. Преобразовав подкоренное выражение к виду

$$(c_1^2-c_2^2)^2(\lambda_0+\mu_0)^2 + c_1^2c_2^2\lambda_0^2,$$

убеждаемся, что оно положительно. Следовательно, Δ обращается в нуль при двух различных значениях величины $|\omega|$.

Определитель системы (8) приводится к виду

$$\Delta_* = \rho\omega^2[\rho\omega^2 c_1^2c_2^2 - 2\mu_0(c_1^2+c_2^2)].$$

Он обращается в нуль при следующих значениях ω:

$$\omega = 0, \quad \omega = \omega_* = \pm\sqrt{\frac{2\mu_0(c_1^2+c_2^2)}{\rho c_1^2 c_2^2}} .$$

При $\omega = 0$ вращения нет и, следовательно, все перемещения должны равняться нулю. При $\omega \neq \omega_*$ будем иметь

$$q_{12} = q_{21} = 0. \tag{13}$$

Системы (9) и (10) имеют одинаковые определители, которые приводятся к виду $\Delta_{**} = -\rho c_3^2\omega^2$ и всегда будут отличны от нуля при $\omega \neq 0$. Следовательно,

$$q_{23} = q_{32} = q_{13} = q_{31} = 0 \tag{14}$$

при всех значениях ω.

Учитывая равенства (6), (13), (14), получаем окончательные выражения для перемещений

$$u_i = q_{ii}\, x_i, \quad i = 1, 2, 3, \tag{15}$$

где q_{ii} определены формулой (11). Из выражений (12) для Δ и Δ_{33} и (25) следует, что при выполнении условия $\omega^2 \leq \omega_*^2$, где

$$\omega_*^2 = \min\left(\frac{2\mu_0(3\lambda_0+2\mu_0)}{\rho(\lambda_0+\mu_0)(c_1^2+c_2^2)}, \quad \frac{2\mu_0(c_1^2+c_2^2)}{\rho c_1^2 c_2^2}\right),$$

справедливо неравенство $q_{33} < 0$. Тогда, используя формулу (15) для u_3, заключаем, что равномерные вращения эллипсоида вокруг главной оси приводят к его сжатию вдоль этой оси.

Рассмотрим как будет происходить деформация вдоль осей Ox_1 и Ox_2. В случае $c_1 = c_2$, когда недеформированный эллипсоид является эллипсоидом вращения, из двух последних равенств (12) получаем $a_1 = a_2 = c_1^2(\lambda_0 + 2\mu_0) > 0$. Тогда из (11) с учетом соотношений (12), следует, что при выполнении условия $\omega^2 < \omega_0^2$, где

$$\omega_0^2 = \min\left(\frac{\mu_0(3\lambda_0+2\mu_0)}{\rho c_1^2(\lambda_0+\mu_0)}, \quad \frac{2\mu_0}{\rho c_1^2(\lambda_0+2\mu_0)}\right),$$

будем иметь $q_{11} = q_{22} > 0$. Используя далее формулу (15) для u_1 и u_2, приходим к выводу, что в рассматриваемом случае эллипсоид будет растягиваться вдоль осей Ox_1 и Ox_2, сохраняя при этом осевую симметрию.

При условии $c_1 > c_2$ выполняется неравенство $a_1 > 0$. Здесь возможны два случая:

1) Случай $c_1^2/c_2^2 < 2(1+\mu_0/\lambda_0)$. В этом случае $a_2 > 0$. Тогда из выражений (12) для $\Delta,\ \Delta_1,\ \Delta_2$ и (11) следует, что при выполнении условия $\omega^2 < \omega_1^2$, где

$$\omega_1^2 = \min\left(\frac{2\mu_0(3\lambda_0+2\mu_0)}{\rho(\lambda_0+\mu_0)(c_1^2+c_2^2)},\quad \frac{a_2}{\rho c_1^2 c_2^2(\lambda_0+2\mu_0)}\right),$$

выполняются неравенства $q_{11} > 0,\ q_{22} > 0$. Следовательно, как следует из (15), эллипсоид получит растяжения вдоль осей Ox_1 и Ox_2.

2) Случай $c_1^2/c_2^2 < 2(1+\mu_0/\lambda_0)$. Теперь $a_2 \leq 0$. Из выражений (12) для $\Delta,\ \Delta_1,\ \Delta_2$ и (11) следует, что при выполнении условия $\omega^2 < \omega_1^2$, где

$$\omega_1^2 = \min\left(\frac{2\mu_0(3\lambda_0+2\mu_0)}{\rho(\lambda_0+\mu_0)(c_1^2+c_2^2)},\quad \frac{a_1}{\rho c_1^2 c_2^2(\lambda_0+2\mu_0)}\right),$$

выполняются неравенства $q_{11} > 0,\ q_{22} < 0$. Тогда из (15) следует, что эллипсоид получит растяжение вдоль оси Ox_1 и сжатие вдоль оси Ox_2.

Случай $c_1 < c_2$ исследуется аналогично.

1. *Ляв А.* Математическая теория упругости. – М.; Л.: Объединен. науч.-техн. изд-во НКТП СССР, 1935. – 675 с.
2. *Черноусько Ф.Л.* О движении вязкоупругого твердого тела относительно центра масс // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1980. – № 1. – С. 22–26.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
sudakov@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 17.02.06