УДК 531.36:531.38

©2006. **Ю.Н. Кононов**

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ N СВЯЗАННЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ С ПОЛОСТЯМИ, СОДЕРЖАЩИМИ ЖИДКОСТЬ

В работах [1, 2] получено характеристическое уравнение возмущенного движения несвободной и свободной системы n связанных твердых тел с полостями, содержащими идеальную жидкость (ССТТЖ). В данной работе проведены дальнейшие исследования этого уравнения, подробно рассмотрены случаи $n = 1, 2, 3$, выведены рекуррентные формулы для коэффициентов характеристического уравнения, получены необходимые условия устойчивости равномерного вращения свободной системы n одинаковых гироскопов Лагранжа с жидкостью.

1. Несвободная ССТТЖ. Обозначим через S_i тело, которое состоит из твердого тела S_i^0, имеющего полость, целиком заполненную однородной идеальной несжимаемой жидкостью с плотностью ρ_i. Твердые тела S_i^0 и S_{i-1}^0 $(1 < i \le n)$ имеют одну общую точку O_i. Точка O_1 твердого тела S_1^0 неподвижна. Обозначим через $\boldsymbol{\omega}_i$ абсолютную угловую скорость твердого тела S_i^0; $\mathbf{s}_i = \mathbf{O}_i\mathbf{O}_{i+1}$; $\mathbf{c}_i = \mathbf{O}_i\mathbf{C}_i$ (C_i – центр масс тела S_i).

Характеристическое уравнение возмущенного движения, относительно равномерного вращения вокруг вертикали системы n гироскопов Лагранжа, связанных упругими сферическими шарнирами и содержащими идеальную жидкость, имеет вид [1, 2]

$$|\|a_{ij}\|_{i,j=1}^n| = 0. \tag{1}$$

Здесь

$$a_{ij} = \mu_{ij} \quad (j \ne i-1, i, i+1), \quad a_{ii-1} = \mu_{i-1i} + \frac{k_{i-1}}{\lambda^2}, \quad a_{ii+1} = \mu_{ii+1} + \frac{k_i}{\lambda^2}, \quad a_{ii} = F_i,$$

$$F_i = A_i' + \frac{C_i\omega_{0i}}{\lambda} + \frac{a_i g - k_{i-1} - k_i}{\lambda^2} - (\lambda + \omega_{0i}) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{E_{il}}{\lambda + \widetilde{\lambda}_{il}}, \qquad \mu_{ij} = \mu_{ji},$$

$$\widetilde{\lambda}_{il} = \omega_{0i} - \lambda_{il} = \omega_{0i}\lambda_{il}', \qquad \lambda_{il}' = 1 - \frac{2}{\kappa_{il}}, \qquad \mu_{ij} = s_i a_j \qquad (i < j),$$

$$A_i' = A_i + s_i^2 \sum_{k=i+1}^{n} m_k, \qquad a_i = m_i c_i + s_i \sum_{k=i+1}^{n} m_k;$$

ω_{0i} – невозмущенная угловая скорость вращения i-го тела; A_i, C_i – экваториальный и осевой моменты инерции тела S_i относительно точки O_i; m_i – масса тела S_i. Под идеальным упругим сферическим шарниром будем подразумевать идеальный сферический шарнир, в котором на твердые тела S_{i-1}^0 и S_i^0 действует упругий восстанавливающий момент ($\mathbf{L}_i = k_{i-1}(\mathbf{s}_{i-1}) \times \mathbf{s}_i/(|\mathbf{s}_{i-1}||\mathbf{s}_i|)$, $k_{i-1} \ge 0$, $k_1 = k_n = 0$). Коэффициенты E_{il}, λ_{il}' определяются только геометрией полости τ_i, и их значения для эллипсоидальной, цилиндрической и конической полостей приведены в работах [3, 4].

Если центр масс последнего тела S_n совпадает с точкой O_n ($c_n = 0$, $a_n = 0$), то характеристическое уравнение (1) можно записать в виде

$$F_n \begin{vmatrix} F_1 & \dots & \mu_{1n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{1n-1} & \dots & F_{n-1} \end{vmatrix} - \frac{k_{n-1}^2}{\lambda^4} \begin{vmatrix} F_1 & \dots & \mu_{1n-2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{1n-2} & \dots & F_{n-2} \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Аналогичная ситуация наблюдается, если точка O_2 совпадает с точкой O_1 $(s_1 = 0)$

$$F_1 \begin{vmatrix} F_2 & \dots & \mu_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{2n} & \dots & F_n \end{vmatrix} - \frac{k_1^2}{\lambda^4} \begin{vmatrix} F_3 & \dots & \mu_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{3n} & \dots & F_n \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

Если отсутствует упругий восстанавливающий момент в шарнире O_n $(k_{n-1} = 0)$ или в шарнире O_2 $(k_1 = 0)$, то уравнения (2) и (3) распадаются на два уравнения. Уравнения $F_n = 0$ и $F_1 = 0$ [3, 4] описывают возмущенное движение соответственно последнего и первого гироскопов Лагранжа с жидкостью вокруг их центров масс. Следовательно, если вращения одного из этих гироскопов неустойчиво, то и вращение всей системы неустойчиво. То, что уравнения (2) и (3) при определенных условиях могут распадаться на два, играет существенную роль для решения задачи о возможности стабилизации неустойчивого движения твердого тела с жидкостью, вращающимися одним или двумя твердыми телами [5, 6].

Необходимое условие устойчивости равномерного вращения системы n гироскопов Лагранжа, содержащих идеальную жидкость, состоит в действительности всех корней уравнения (1). Оставляя конечное число членов F_i, можно, по аналогии с работой [3], привести это уравнение к полиномиальному виду.

При отсутствии жидкости $(\rho_i = 0,\ E_{il} = 0)$ характеристическое уравнение (1) совпадает с известным уравнением [7].

Рассмотрим некоторые частные случаи уравнения (1).

Пусть $n = 3$

$$\begin{vmatrix} F_1 & \mu_1 + k_1/\lambda^2 & \mu_2 \\ \mu_1 + k_1/\lambda^2 & F_2 & \mu_3 + k_2/\lambda^2 \\ \mu_2 & \mu_3 + k_2/\lambda^2 & F_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

Здесь

$$F_i = A_i' + \frac{\widetilde{C}_i}{\lambda} + \frac{a_i g - k_{i-1} - k_i}{\lambda^2} - (\lambda + \omega_{0i}) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{E_{il}}{\lambda + \widetilde{\lambda}_{il}}, \quad \widetilde{C}_i = C_i \omega_{0i}, \quad k_0 = k_3 = 0,$$

$$A_1' = A_1 + m_{23} s_1^2, \quad A_2' = A_2 + m_3 s_2^2, \quad A_3' = A_3, \quad \widetilde{\lambda}_{il} = \lambda_i' \omega_{0i} = (1 - \frac{2}{\kappa_{il}})\omega_{0i}, \qquad (5)$$

$$\mu_1 = s_1 a_2, \quad \mu_2 = s_1 a_3, \quad \mu_3 = s_2 a_3, \quad s_i = O_i O_{i+1}, \quad c_i = O_i C_i,$$

$$a_1 = m_1 c_1 + s_1 m_{23}, \quad a_2 = m_2 c_2 + s_2 m_3, \quad a_3 = m_3 c_3, \quad m_{23} = m_2 + m_3.$$

Если i-й упругий сферический шарнир вырождается в цилиндрический $(k_i = \infty)$, то уравнение (4) существенно упрощается. Так, например, пусть

a) $k_1 = \infty$, $k_2 \neq \infty$, тогда это уравнение имеет вид

$$[\widetilde{F}_1 + \widetilde{F}_2 + \widetilde{F}_3 + 2(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)]K_2 + (\mu_2 + \mu_3)^2 - (\widetilde{F}_1 + \widetilde{F}_2 + 2\mu_1)\widetilde{F}_3 = 0,$$

$b)$ $k_1 \neq \infty$, $k_2 = \infty$, тогда

$$[\widetilde{F}_1 + \widetilde{F}_2 + \widetilde{F}_3 + 2(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)]K_1 + (\mu_1 + \mu_2)^2 - (\widetilde{F}_2 + \widetilde{F}_3 + 2\mu_3)\widetilde{F}_1 = 0,$$

$c)$ $k_1 = \infty$, $k_2 = \infty$, тогда

$$\widetilde{F}_1 + \widetilde{F}_2 + \widetilde{F}_3 + 2(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) = 0, \tag{6}$$

где

$$\widetilde{F}_i = A_i' + \frac{\widetilde{C}_i}{\lambda} + \frac{a_i g}{\lambda^2} - (\lambda + \omega_{0i})\sum_{l=1}^{\infty} \frac{E_{il}}{\lambda + \widetilde{\lambda}_{il}}, \qquad K_i = \frac{k_i}{\lambda^2}.$$

При $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_{02} = \omega_0$ последнее уравнение совпадает с характеристическим уравнением для одного твердого тела с тремя полостями, а при различных ω_{0i} по форме похоже на характеристическое уравнение для одного тела с двумя жидкими роторами, что и естественно было ожидать при введении двух цилиндрических шарниров.

При $n = 2$ характеристическое уравнение (4) запишется следующим образом

$$\begin{vmatrix} F_1 & \mu + k/\lambda^2 \\ \mu + k/\lambda^2 & F_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

Здесь $\mu = \mu_1$, $k = k_1$, а в соотношениях (5) следует положить $m_3 = 0$.

Если отсутствует упругий восстанавливающий момент ($k = 0$) и центр масс второго тела S_2 совпадает с точкой O_2 ($c_2 = 0$, $a_2 = 0$, $\mu = 0$), то характеристическое уравнение (7) распадается на два уравнения и, как было отмечено ранее, из неустойчивости вращения одного гироскопа следует неустойчивость вращения всей системы.

Если упругий сферический шарнир вырождается в цилиндрический ($k = \infty$), то уравнение (7) имеет вид

$$\widetilde{F}_1 + \widetilde{F}_2 + 2\mu = 0. \tag{8}$$

В большинстве практически важных случаев, основной эффект влияния жидкости на движение твердого тела можно учесть, рассматривая только основной тон колебания жидкости ($l = 1$). В работах [3, 4] было оценено влияние более высоких тонов на устойчивость вращения твердого тела с цилиндрической полостью и показано, что при определенных условиях добавление новых тонов колебаний жидкости приводит к незначительному количественному изменению области неустойчивости. Следует также отметить, что в случае эллипсоидальных полостей и полостей, образованных софокусными эллипсоидами из бесконечного спектра собственных частот λ_{il} на движение твердого тела влияние оказывает только первая частота λ_{il} ($E_{il} = 0$ при $l \neq 1$). В [3, 4] также показано, что необходимым условием устойчивости равномерного вращения одного гироскопа Лагранжа с идеальной жидкостью является вращение относительно оси наибольшего момента инерции. Этот результат будет неоднократно использован в данной работе.

Уравнение (4) с учетом основного тона колебания жидкости ($l = 1$) записывается в виде полинома девятой степени

$$b_0\lambda^9 + b_1\lambda^8 + ... + b_8\lambda + b_9 = 0. \tag{9}$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
&b_0 = b_0^*,\\
&b_i = b_{i1}\widetilde{\lambda}_1 + b_{i2}\widetilde{\lambda}_2 + b_{i3}\widetilde{\lambda}_3 + b_{i12}\widetilde{\lambda}_1\widetilde{\lambda}_2 + b_{i13}\widetilde{\lambda}_1\widetilde{\lambda}_3 + b_{i23}\widetilde{\lambda}_2\widetilde{\lambda}_3 +\\
&+ b_{i-3}^*(0,0,0)\widetilde{\lambda}_1\widetilde{\lambda}_2\widetilde{\lambda}_3 + b_i^* \quad (i=\overline{1,8}),\\
&b_9 = \widetilde{b}_6\widetilde{\lambda}_1\widetilde{\lambda}_2\widetilde{\lambda}_3;\\
\\
&b_0^*(E_1,E_2,E_3) = A_1^*A_2^*A_3^* - A_1^*\mu_3^2 - A_2^*\mu_2^2 - A_3^*\mu_1^2 + 2\mu_1\mu_2\mu_3,\\
&b_1^*(E_1,E_2,E_3) = (A_2^*A_3^* - \mu_3^2)C_1^* + (A_1^*A_3^* - \mu_2^2)C_2^* + (A_1^*A_2^* - \mu_1^2)C_3^*,\\
&b_2^*(E_1,E_2,E_3) = [(\mu_2+\mu_3)^2 - (A_1^* + A_2^* + 2\mu_1)A_3^*]k_1 +\\
&+ [(\mu_1+\mu_2)^2 - (A_2^* + A_3^* + 2\mu_3)A_1^*]k_2 + C_1^*C_2^*A_3^* + C_1^*C_3^*A_2^* + C_2^*C_3^*A_1^* -\\
&- [(C_2^*A_3^* + C_3^*A_2^*)a_1 + (C_1^*A_3^* + C_3^*A_1^*)a_2 + (C_1^*A_2^* + C_2^*A_1^*)a_3]g,\\
&b_3^*(E_1,E_2,E_3) = C_1^*C_2^*C_3^* - [(A_1^* + A_2^* + 2\mu_1)C_3^* + (C_1^* + C_2^*)A_3^*]k_1 -\\
&- [(A_2^* + A_3^* + 2\mu_3)C_1^* + (C_2^* + C_3^*)A_1^*]k_2 +\\
&+ [(C_2^*A_3^* + C_3^*A_2^*)a_1 + (C_1^*A_3^* + C_3^*A_1^*)a_2 + (C_1^*A_2^* + C_2^*A_1^*)a_3]g,\\
&b_4^*(E_1,E_2,E_3) = (A_1^* + A_2^* + A_3^* + 2\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3)k_1k_2 -\\
&- [(C_1^* + C_2^*)C_3^* + g(A_1^* + A_2^* + 2\mu_1)a_3 + g(a_1+a_2)A_3^*]k_1 -\\
&- [(C_2^* + C_3^*)C_1^* + g(A_2^* + A_3^* + 2\mu_3)a_1 + g(a_2+a_3)A_1^*]k_2 +\\
&+ [C_2^*C_3^*a_1 + C_1^*C_3^*a_2 + C_1^*C_2^*a_3 + (A_1^*a_2a_3 + A_2^*a_1a_3 + A_3^*a_1a_2)g]g,\\
&b_5^*(E_1,E_2,E_3) = (C_1^* + C_2^* + C_3^*)k_1k_2 - g[(C_1^* + C_2^*)a_3 + (a_1+a_2)C_3^*]k_1 -\\
&- g[(C_2^* + C_3^*)a_1 + (a_2+a_3)C_1^*]k_2 + (C_1^*a_2a_3 + C_2^*a_1a_3 + C_3^*a_1a_2)g^2,\\
&b_6^* = \widetilde{b}_6 = [(a_1+a_2+a_3)k_1k_2 - (a_1+a_2)a_3k_1 - (a_2+a_3)a_1k_2 - a_1a_2a_3g]g;\\
\\
&b_{i1} = b_{i-1}^*(0,E_2,E_3), \quad b_{i2} = b_{i-1}^*(E_1,0,E_3), \quad b_{i3} = b_{i-1}^*(E_1,E_2,0),\\
&b_{i12} = b_{i-2}^*(0,0,E_3), \quad b_{i13} = b_{i-2}^*(0,E_2,0), \quad b_{i23} = b_{i-2}^*(E_1,0,0) \quad (i=\overline{1,8}),\\
\\
&b_{-1}^* = b_{-2}^* = 0, \quad b_7^* = b_8^* = 0, \quad b_{81} = b_{82} = b_{83} = 0,\\
&b_{71} = b_{72} = b_{73} = \widetilde{b}_6, \quad b_{812} = b_{813} = b_{823} = \widetilde{b}_6; \quad A_i^* = A_i' - E_i,\\
&C_i^* = \widetilde{C}_i - \widetilde{E}_i, \quad \widetilde{C}_i = C_i\omega_{0i}, \quad \widetilde{E}_i = E_i\omega_{0i}, \quad \widetilde{\lambda}_i = \lambda_i'\omega_{0i}, \quad \lambda_i' = 1 - \frac{2}{\kappa_i}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Если только k-ое твердое тело не содержит жидкость, то степень уравнения (9) понижается на единицу, коэффициенты b_i $(i=\overline{0,8})$ вычисляются по формулам (10), в которых следует положить $E_k = 0$ и $\widetilde{\lambda}_k = 0$. Если жидкость отсутствует в двух твердых телах, то степень уравнения (9) понижается на две единицы, а если в трех твердых телах ($E_1 = E_2 = E_3 = 0$, $\widetilde{\lambda}_1 = \widetilde{\lambda}_2 = \widetilde{\lambda}_3 = 0$), то это уравнение будет иметь шестую степень.

Уравнение (7) ($n = 2$) с учетом основного тона колебаний жидкости ($l = 1$) записывается в виде полинома шестой степени:

$$b_0\lambda^6 + b_1\lambda^5 + ... + b_5\lambda + b_6 = 0. \tag{11}$$

Здесь
$$b_0 = b_0^*,$$
$$b_i = b_{i1}\widetilde{\lambda}_1 + b_{i2}\widetilde{\lambda}_2 + b_{i-2}^*(0,0)\widetilde{\lambda}_1\widetilde{\lambda}_2 + b_i^* \quad (i = \overline{1,5}),$$
$$b_6 = \widetilde{b}_4\widetilde{\lambda}_1\widetilde{\lambda}_2;$$

$$\begin{aligned}
&b_0^*(E_1, E_2) = A_1^*A_2^* - \mu^2, \quad b_1^*(E_1, E_2) = A_2^*C_1^* + A_1^*C_2^*,\\
&b_2^*(E_1, E_2) = C_1^*C_2^* + (A_1^* + A_2^* + 2\mu)k + (A_1^*a_2 + A_2^*a_1)g,\\
&b_3^*(E_1, E_2) = -(C_1^* + C_2^*)k - (\widetilde{E}_1a_2 + \widetilde{E}_2a_1)g,\\
&b_4^* = \widetilde{b}_4 = [a_1a_2g - (a_1 + a_2)k]g, \quad b_{-1}^* = 0;
\end{aligned} \tag{12}$$

$$b_{i1} = b_{i-1}^*(0, E_2), \quad b_{i2} = b_{i-1}^*(E_1, 0), \quad b_{51} = b_{52} = \widetilde{b}_4;$$

$$\mu_1 = \mu, \quad k_1 = k.$$

Если только k-ое твердое тело не содержит жидкость, то порядок уравнения (11) понижается на единицу, а коэффициенты b_i ($i = \overline{1,5}$) вычисляются по формулам (12), в которых следует положить $E_k = 0$ и $\widetilde{\lambda}_k = 0$, а если жидкость отсутствует и во втором твердом теле, то порядок уравнения (11) понижается на две единицы.

Полученные характеристические уравнения (9) и (11) в виде полиномов девятой и шестой степеней и их различные варианты дают возможность проведения аналитических и численных исследований необходимых условий устойчивости для широкого круга задач. Коэффициенты этих уравнений представлены в виде рекуррентных формул. Выведенные уравнения позволяют рассмотреть, к примеру, задачу о стабилизации неустойчивого вращения твердого тела с жидкостью при помощи вращающихся одного [5] или двух твердых тел. На основании полученных уравнений может быть рассмотрена и более общая задача о стабилизации движения ССТТЖ при помощи вращающихся твердых тел или вращающихся твердых тел с жидкостью.

2. Свободная ССТТЖ. При движении по инерции ССТТЖ в характеристическом уравнении (1) следует положить $g = 0$ и сделать пересчет тензора инерции A_i^c относительно центра масс тела S_i [1, 2]. В этом случае остаются в силе ранее полученные формулы (2)–(4) и (6)–(12) и сделанные по ним выводы. Исключение представляют уравнения (9) и (11), которые теперь будут соответственно восьмой ($b_9 = 0$) и пятой ($b_6 = 0$) степеней. Коэффициенты b_i вычисляются по формулам (10) и (12), в которых следует считать $g = 0$.

Уравнение (1) при движении по инерции n одинаковых гироскопов Лагранжа с жидкостью ($c_i = c$, $s_i = 2c$, $m_i = m$, $A_i^c = A$) запишется в виде

$$\begin{vmatrix} F_1 & \mu_{12} + k_1/\lambda^2 & \mu_{13} & \dots & \mu_{1n-1} & \mu_{1n} \\ \mu_{12} + k_1/\lambda^2 & F_2 & \mu_{23} + k_2/\lambda^2 & \dots & \mu_{2n-1} & \mu_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{1n} & \mu_{2n} & \mu_{3n} & \dots & \mu_{n-1n} + k_n/\lambda^2 & F_n \end{vmatrix} = 0, \qquad (13)$$

где $\mu_{ij} = \mu(2i-1)a_j$, $A_i' = A + \mu mc[(2n-2i+1)(2i-1)-n]$, $(A_1' = A_n')$, $a_i = (2n-2i+1)mc$, $\mu = c/n$.

Рассмотрим некоторые частные случаи уравнения (13) при $\omega_{01} = \omega_{02} = ... = \omega_{0n} = \omega_0$ и $k_1 = k_2 = ... = k_{n-1} = k$.

Пусть $n = 2$. В этом случае уравнение (13) имеет вид

$$(F+1)(F-2K) = 0. \qquad (14)$$

Здесь

$$K = \frac{k}{\lambda^2}\frac{1}{mc^2}, \qquad F = \frac{1}{mc^2}\left[A + \frac{C\omega_0}{\lambda} - (\lambda + \omega_0)\sum_{l=1}^{\infty}\frac{E_l}{\lambda + \widetilde{\lambda}_l}\right].$$

Уравнение (14) распадается на два уравнения

$$\begin{gathered} A + \frac{C\omega_0}{\lambda} - \frac{2k}{\lambda^2} - (\lambda + \omega_0)\sum_{l=1}^{\infty}\frac{E_l}{\lambda + \widetilde{\lambda}_l} = 0, \\ A + mc^2 + \frac{C\omega_0}{\lambda} - (\lambda + \omega_0)\sum_{l=1}^{\infty}\frac{E_l}{\lambda + \widetilde{\lambda}_l} = 0. \end{gathered} \qquad (15)$$

Первое описывает вращение одного твердого тела с жидкостью вокруг его центра масс с удвоенным восстанавливающим моментом, а второе – с присоединенным экваториальным моментом. По аналогии с работой [3], из анализа этих уравнений при рассмотрении только основного тона колебаний жидкости ($l = 1$) следует, что при отсутствии упругого восстанавливающего момента равномерное вращение системы двух одинаковых гироскопов Лагранжа с жидким заполнением будет устойчивым при $C > A + mc^2$, т.е. когда вращение происходит относительно оси наибольшего момента инерции с учетом присоединенной массы. Неустойчивость может появиться, когда $C < A$ и только при положительных значениях $\lambda_1 < 1$. Это обобщает результаты для одного твердого тела, содержащего жидкость [3], на систему двух одинаковых твердых тел с жидкостью.

При $k = \infty$ уравнение (14) будет следующим:

$$F + 1 = 0. \qquad (16)$$

Таким образом, при наличии упругого восстанавливающего момента в сферическом шарнире необходимое условие устойчивости свободного равномерного вращения двух одинаковых гироскопов Лагранжа, содержащих идеальную жидкость, определяется двумя условиями из (15): устойчивостью вращения вокруг центра масс одного гироскопа Лагранжа с удвоенным восстанавливающим моментом и устойчивостью вращения второго гироскопа с присоединенным экваториальным моментом. При отсутствии упругого момента ($k = 0$) первое условие определяется устойчивостью вращения одного гироскопа вокруг его центра масс. Если сферический шарнир вырождается в цилиндрический ($k = \infty$), то из двух условий остается только второе.

Пусть $n = 3$. В этом случае уравнение (13) также распадаются на два уравнения

$$F + \frac{1}{3} - K = 0, \quad F^2 - 3(K-1)F - 8K = 0,$$

а при $k = \infty$ имеет вид $\quad F + 8/3 = 0$.

Пусть $n = 4$. Уравнение (13) распадается на два

$$F^2 - 2(K-3)F - 10K = 0, \quad F^2 - (4K-1)F + 2K^2 - 3K = 0, \tag{17}$$

а при $k = \infty$ запишется следующим образом: $\quad F + 5 = 0$.

Пусть $n = 5$, тогда

$$F^3 - 5(K-2)F^2 + (5K^2 - 47K + 5)F + 40K^2 - 16K = 0, \quad 5F^2 - 5(3K-2)F + 5K^2 - 21K + 1 = 0,$$

а при $k = \infty$ имеет вид $\quad F + 8 = 0$.

Из формул (16), (17) следует, что при отсутствии упругого момента в сферическом шарнире ($k = 0$) необходимое условие устойчивости для различного числа гироскопов Лагранжа будет следующим:

$$\begin{aligned} &C > A + mc^2 \quad (n = 2), \qquad C > A + 3mc^2 \quad (n = 3), \\ &C > A + 6mc^2 \quad (n = 4), \qquad C > A + (5 + 2\sqrt{5})mc^2 \quad (n = 5), \end{aligned} \tag{18}$$

а для цилиндрического шарнира ($k = \infty$):

$$\begin{aligned} &C > A + mc^2 \quad (n = 2), \qquad C > A + 8mc^2/3 \quad (n = 3), \\ &C > A + 5mc^2 \quad (n = 4), \qquad C > A + 8mc^2 \quad (n = 5). \end{aligned} \tag{19}$$

На основании приведенных соотношений (18), (19) можно сделать вывод, что вырождение сферического шарнира в цилиндрический приводит к "улучшению"необходимых условий устойчивости.

Уравнение (13) при $k = 0$ всегда содержит корни уравнения $F = 0$. Это связано с симметричностью матрицы уравнения (13). Таким образом, если вращение вокруг центра масс одного твердого тела с жидкостью будет неустойчиво, то отсюда сразу следует неустойчивость всей системы. По всей видимости, этот вывод будет справедлив и в более общем случае, когда $k = 0$ и ω_{0i} – различны.

Характеристическое уравнение возмущенного движения свободной системы при $n = 3$ имеет вид (4). Необходимо только величины A'_i, μ_i вычислять по формулам

$$\begin{aligned} &A'_1 = A_1 + \frac{m_1 m_{23}}{m} c_1^2, \quad A'_2 = A_2 + \frac{1}{m}(m_2 m_{31} c_2^2 - 2 m_2 m_3 c_2 s_2 + m_3 m_{12} s_2^2), \\ &A'_3 = A_3 + \frac{m_3 m_{12}}{m} c_3^2, \quad \mu_1 = \frac{m_1 c_1}{m}(m_2 c_2 + m_3 s_2), \quad \mu_2 = \frac{m_1 m_3}{m} c_1 c_3, \\ &\mu_3 = \frac{m_3 c_3}{m}[m_1 s_2 + m_2(s_2 - c_2)]. \end{aligned} \tag{20}$$

При отсутствии упругого восстанавливающего момента между твердыми телами S_1^0 и S_2^0 ($k_1 = 0$) и совпадении центра масс первого тела S_1 с точкой O_2 ($C_1O_1 = c_1 = 0$,

$a_1 = 0$) или при отсутствии упругого восстанавливающего момента между твердыми телами S_2^0 и S_3^0 ($k_2 = 0$) и совпадении центра масс третьего тела S_3 с точкой O_3 ($C_3O_2 = c_2 = 0$, $a_3 = 0$) уравнение (4) распадается на два уравнения.

Если тела S_1 и S_3 являются конгруэнтными ($A_1 = A_3 = A$, $C_1 = C_3 = C$, $m_1 = m_3 = \widetilde{m}$, $s_2 = 2c_2$, $\mu_1 = \mu_3 = \mu$, $E_{1l} = E_{3l} = E_l$, $c_1 = c_2 = c$, $\widetilde{\lambda}_{1l} = \widetilde{\lambda}_{3l} = \widetilde{\lambda}_l$) и $\omega_{01} = \omega_{03} = \omega_0$, $k_1 = k_2 = k$, то $F_1 = F_3 = F$ и в этом случае уравнение (4) также распадается на два уравнения

$$F - \mu_2 = 0, \quad \left[F_2(F + \mu_2) - 2\left(\mu + \frac{k}{\lambda^2}\right)^2\right] = 0. \tag{21}$$

Для $k = \infty$ уравнение (21)записывается следующим образом

$$\widetilde{F_2} + 2(\tilde{F} + 2\mu + \mu_2) = 0.$$

Из первого уравнения (21) следует, что необходимым условием устойчивости свободного вращения трех гироскопов Лагранжа с жидким заполнением при одинаковых первом и третьем гироскопов, является условие

$$C > A + \frac{\widetilde{m}m_2c^2}{2\widetilde{m} + m_2}.$$

Таким образом, необходимым условием устойчивости свободного вращения n одинаковых гироскопов Лагранжа с идеальной жидкостью, связанных сферическими шарнирами, является равномерное вращение одного из них относительно оси наибольшего момента инерции с учетом присоединенной массы в экваториальном моменте. Замена сферического шарнира цилиндрическим приводит, по-видимому, к стабилизации вращения ССТТЖ.

1. *Кононов Ю.Н.* О движении системы двух твердых тел с полостями, содержащими жидкость // Механика твердого тела. – 1997. – Вып. 29. – С. 76-85.
2. *Кононов Ю.Н.* О движении системы связанных твердых тел с полостями, содержащими жидкость // Там же. – 2000. – Вып. 30. – С. 207-216.
3. *Докучаев Л.В., Рвалов Р.В.* Об устойчивости стационарного вращения твердого тела с полостью, содержащей жидкость // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – № 2. – С. 6-14.
4. *Докучаев Л.В.* Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. – М.: Машиностроение, 1987. – 232 с.
5. *Кононов Ю.Н., Хомяк Т.В.* Об эффекте стабилизации неустойчивого вращения твердого тела с жидкостью вращающимся твердым телом // Механика твердого тела – 2004. – Вып. 34. – С. 161-169.
6. *Kononov Y.N., Khomyak T.V.* On the rotation stabilization of the unstable gyroscope containing fluid by rotating the rigid body // Facta Universitatis. Series Mechanics, Automatic Control and Robotics. – 2005. – **4**, № 17 – P. 195-201.
7. *Савченко А.Я., Болграбская И.А., Кононыхин Г.А.* Устойчивость движения систем связанных твердых тел. – Киев: Наук. думка, 1991. – 166 с.

Донецкий национальный ун-т
kononov@univ.donetsk.ua

Получено 23.06.06