ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2006. Вып. 36

УДК 531.38, 531.36

©2006. **Б.И. Коносевич, Ю.Б. Коносевич**

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ВОЗМУЩЕННЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ СИНХРОННОГО ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ

Рассматривается гироскоп в кардановом подвесе, установленный на неподвижном основании в поле силы тяжести и имеющий вертикальную наружную ось подвеса. Относительно оси ротора действует момент, равный алгебраической сумме момента сил трения и вращающего момента электродвигателя синхронного типа. Моменты сил трения и какие-либо управляющие моменты относительно осей подвеса отсутствуют. Уравнения движения такой системы допускают семейство решений, описывающих ее стационарные движения (регулярные прецессии или равномерные вращения ротора).

В статье изучаются семейства стационарных движений, для которых выполнено наиболее простое и общее условие устойчивости – условие положительности второй производной по внутреннему карданову углу от приведенной потенциальной энергии силы тяжести. Показано, что соответствующие возмущенные движения с течением времени стремятся к стационарным движениям из того же семейства, и дана оценка области притяжения.

1. Механическая модель. Задачу о гироскопе в кардановом подвесе рассмотрим в обобщенной постановке, когда "рамки" подвеса имеют произвольную форму, внутренняя ось подвеса неколлинеарна наружной оси подвеса и оси ротора, и все эти оси, вообще говоря, не пересекаются в одной точке. Ротор является динамически симметричным относительно своей оси вращения во внутренней рамке. Относительно оси ротора действуют момент сил трения и вращающий момент синхронного электродвигателя. Какие-либо диссипативные или управляющие моменты на осях подвеса предполагаются отсутствующими. Наружная ось подвеса неподвижна и направлена вертикально.

Положение системы в каждый момент времени t определяют углы α, β, φ, где α – угол поворота наружной рамки относительно основания, β – угол поворота внутренней рамки относительно наружной, φ – угол поворота ротора относительно внутренней рамки. При сделанных предположениях кинетическая энергия системы выражается формулой

$$T = \frac{1}{2}\big[G(\beta)\dot\alpha^2 + H\dot\beta^2 + C\dot\varphi^2 + 2N(\beta)\dot\alpha\dot\beta + 2Q(\beta)\dot\alpha\dot\varphi + 2R\dot\beta\dot\varphi\big], \tag{1}$$

где C – осевой момент инерции ротора, коэффициенты H, R зависят только от механических параметров, коэффициенты G, N, Q, а также потенциальная энергия силы тяжести U зависят от угла β и механических параметров по формулам вида

$$\begin{aligned} &G(\beta) = g_0 + g_1\sin\beta + g_2\cos\beta + g_3\sin 2\beta + g_4\cos 2\beta, \quad N(\beta) = n_0 + n_1\sin\beta + n_2\cos\beta,\\ &Q(\beta) = q_0 + q_1\sin\beta, \quad U(\beta) = u_0 + u_1\sin\beta + u_2\cos\beta. \end{aligned} \tag{2}$$

Выражения коэффициентов формул (2) и величин H, R через механические параметры следуют из формул (8)–(15) статьи [1], если положить в них $\theta^1 = 0$ (наружная ось подвеса вертикальна), $A^3_{22} = A^3_{33} = A$, $A^3_{11} = C$, $A^3_{ij} = 0$ $(i \neq j)$, $c = 0$ (ротор динамически симметричен). Из этих выражений следует, что $q_1 \neq 0$,

$$n_0 = H\cos\theta^2 \quad (H > 0), \qquad q_0 = C\cos\theta^2\cos\theta^3, \quad R = C\cos\theta^3. \tag{3}$$

Здесь θ^2, θ^3 – углы, образованные внутренней осью подвеса с наружной осью подвеса и с осью ротора $(0 < \theta^2, \theta^3 \leq \pi/2)$.

Так как кинетическая энергия (1) является определенно положительной квадратичной формой скоростей $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\varphi}$, то при любом β выполняются неравенства Сильвестра

$$J(\beta) > 0, \quad G(\beta)H - N^2(\beta) > 0, \quad G(\beta) > 0, \tag{4}$$

где $J(\beta)$ – определитель формы.

2. Модель синхронного электродвигателя. Для гироскопа в кардановом подвесе внутренняя "рамка" является статором электродвигателя, а ротор гироскопа – ротором электродвигателя. Силы, действующие на ротор со стороны статора, создают относительно оси ротора момент $L = L_1 + L_2$, равный алгебраической сумме вращающего момента двигателя L_1 и момента сил сопротивления L_2.

Вращающий момент L_1 синхронного двигателя формируется следующим образом. В статоре двигателя создается магнитное поле, результирующий вектор напряженности которого $\boldsymbol{H}_*$ постоянен по модулю, ортогонален оси ротора и равномерно вращается вокруг нее, составляя угол $\omega_* t + \varphi_*$ с направлением отсчета угла φ. Ротор синхронного двигателя имеет собственное постоянное магнитное поле, результирующий вектор напряженности которого $\boldsymbol{H}$ ортогонален оси ротора. В результате взаимодействия этих двух полей возникает вращающий момент L_1, который стремится совместить направление $-\boldsymbol{H}$ с $\boldsymbol{H}_*$. Следовательно, если обозначить через γ угол между векторами $\boldsymbol{H}_*$ и $-\boldsymbol{H}$, то $L_1 = L_1(\gamma)$, причем при $0 < |\gamma| < \pi$ знак $L_1(\gamma)$ противоположен знаку γ. При $\gamma = 0, \pm\pi$ будет $L_1(0) = 0$. Угол $\gamma = \varphi - \omega_* t - \varphi_*$ называется углом мощности [2].

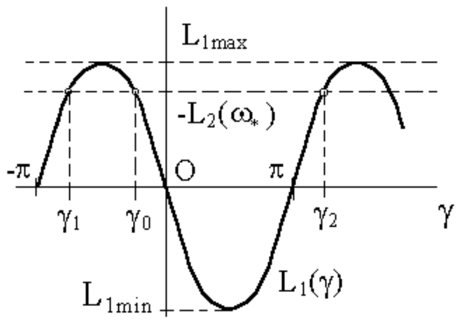

Рис. 1. График зависимости $L_1(\gamma)$ и равновесные значения угла γ

Если угол γ получает приращение, кратное 2π, то взаимное положение векторов $\boldsymbol{H}_*$ и $-\boldsymbol{H}$ не изменяется. Поэтому не изменяется и вращающий момент $L_1(\gamma)$. Следовательно, момент $L_1(\gamma)$ является 2π-периодической функцией угла γ. В дальнейшем эта функция предполагается непрерывно дифференцируемой. Ее максимальное значение $L_{1\max}$ положительно, а минимальное – отрицательно, так как при некоторых значениях угла γ момент L_1 является вращающим, а при некоторых – тормозящим. Таким образом, в рамках рассматриваемой модели график зависимости $L_1 = L_1(\gamma)$ изображается в виде синусоидальной кривой (рис. 1).

Момент $L_2(\dot{\varphi})$ сил сопротивления является отрицательной монотонно убывающей функцией $\dot{\varphi}$.

Режим равномерного вращения ротора неподвижного синхронного двигателя $\varphi = \omega t + \varphi_0$ может существовать только при $\omega = \omega_*$, так как в противном случае в дифференциальном уравнении вращения ротора $C\ddot{\varphi} = L_1 + L_2$ правая часть не равна тождественно нулю, и следовательно, $\ddot{\varphi} \not\equiv 0$.

Режим равномерного вращения $\varphi = \omega_* t + \varphi_0$ существует при условии $L_{1\max} + L_2(\omega_*) \geq 0$. Только в этом случае существует значение угла γ, при котором вращающий момент синхронного двигателя уравновешивает момент сил сопротивления при $\dot{\varphi} = \omega_*$, т. е. разрешимо уравнение

$$L_1(\gamma) + L_2(\omega_*) = 0. \tag{5}$$

Возможны четыре типа равномерных вращений синхронного электродвигателя, которые соответствуют решениям уравнения (5), лежащим на участке убывания вращающего момента $L_1(\gamma)$, на участке его возрастания, в точке его локального максимума или минимума. Очевидно, что решения первых двух типов это уравнение имеет при условии $L_{1\max} + L_2(\omega_*) > 0$. Пользуясь теоремами Барбашина–Красовского ([3], теоремы 1.5.2 и 1.6.3; [4], теорема 2.1.3), нетрудно показать, что режим первого типа асимптотически устойчив, а остальные режимы неустойчивы, и следовательно, нереализуемы. Поэтому далее рассматривается решение γ_0 уравнения (5), лежащее на участке убывания момента $L_1(\gamma)$. Сдвигая начало отсчета угла γ в точку γ_0, имеем $\gamma_0 = 0$.

Представим момент $L = L_1(\gamma) + L_2(\dot\varphi)$ в виде суммы $L = L_p(\gamma) + L_d(\dot\gamma)$ потенциального и диссипативного моментов

$$L_p(\gamma) = L_1(\gamma) + L_2(\omega_*), \qquad L_d(\dot\gamma) = L_2(\dot\varphi) - L_2(\omega_*). \tag{6}$$

Поскольку функция $L_2(\dot\varphi)$ – монотонно убывающая по $\dot\varphi$, то момент $L_d(\dot\gamma)$ – монотонно убывающая функция $\dot\gamma$, обращающаяся в нуль при $\dot\gamma = \dot\varphi - \omega_* = 0$. Поэтому

$$\dot\gamma L_d(\dot\gamma) < 0 \quad (\dot\gamma \neq 0), \qquad L_d(0) = 0. \tag{7}$$

Момент $L_p(\gamma)$ можно выразить по формулам

$$L_p(\gamma) = -\frac{d}{d\gamma}U_1(\gamma), \qquad U_1(\gamma) = -\int\limits_0^\gamma L_p(\sigma)\,d\sigma. \tag{8}$$

Так как $L_p(\gamma)$ – периодическая функция γ, то она может быть представлена в виде $L_p(\gamma) = \overline{L}_p + \widetilde{L}_p(\gamma)$, где $\overline{L}_p$ – среднее значение $L_p(\gamma)$ за период, а $\widetilde{L}_p(\gamma) = L_p(\gamma) - \overline{L}_p$ – периодическая функция с нулевым средним значением. Поэтому потенциальная энергия $U_1(\gamma)$ равна сумме $U_1(\gamma) = -\gamma\overline{L}_p + \widetilde{U}_1(\gamma)$ линейной функции $-\gamma\overline{L}_p$ и периодической функции $\widetilde{U}_1(\gamma) = -\int_0^\gamma \widetilde{L}_p(\sigma)\,d\sigma$.

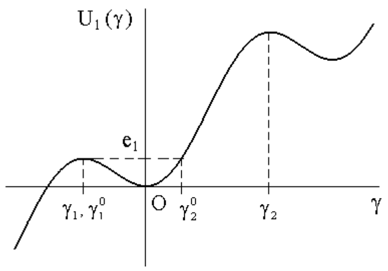

Рис. 2. График зависимости $U_1(\gamma)$

В случае, когда разложение $L_1(\gamma)$ в ряд Фурье содержит только одну гармонику (как на рис. 1), график зависимости $U_1(\gamma)$ имеет вид, изображенный на рис. 2. В общем случае на низшую гармонику налагаются более высокие и график $U_1(\gamma)$ имеет более сложный вид. Но и этом случае поведение кривой $U_1(\gamma)$ в окрестности точки $\gamma = 0$ остается таким же, как на рис. 2, а именно, при $\gamma = 0$ функция $U_1(\gamma)$ имеет изолированный минимум, равный нулю.

Действительно, пусть γ_1 и γ_2 – ближайшие к $\gamma_0 = 0$ решения уравнения (5), причем $\gamma_1 < 0 < \gamma_2$ (см. рис. 1). Так как функция $L_1(\gamma)$ убывает в окрестности точки $\gamma_0 = 0$, то в ее левой полуокрестности $L_1(\gamma) > L_1(\gamma_0) = -L_2(\omega_*)$, а в правой полуокрестности $L_1(\gamma) < L_1(\gamma_0) = -L_2(\omega_*)$. Первое из этих неравенств обращается в равенство при $\gamma = \gamma_1$, а второе – при $\gamma = \gamma_2$. Отсюда в соответствии с (6) получаем

$$\frac{dU_1(\gamma)}{d\gamma} = -L_p(\gamma) \begin{cases} < 0, & \gamma \in (\gamma_1; 0); \\ = 0, & \gamma = \gamma_1,\ 0,\ \gamma_2; \\ > 0, & \gamma \in (0; \gamma_2). \end{cases}$$

Следовательно, на интервалах $(\gamma_1; 0)$, $(0; \gamma_2)$ подынтегральный дифференциал в (8) отрицателен и поэтому $U_1(\gamma) > 0$ $(\gamma \in (\gamma_1; \gamma_2),\ \gamma \neq 0)$, $U_1(0) = 0$.

Итак, пусть за начало отсчета угла $\gamma = \varphi - \omega_* t$ выбран корень уравнения (5), лежащий на участке убывания вращающего момента $L_1(\gamma)$, а γ_1 и γ_2 – ближайшие к $\gamma = 0$ корни уравнения (5), лежащие слева и справа от точки $\gamma = 0$ (см. рис. 1). Тогда на отрезке $[\gamma_1; \gamma_2]$ график зависимости $U_1(\gamma)$ имеет такой же вид, как на рис. 2, так что функция $U_1(\gamma)$ имеет в точке $\gamma = 0$ изолированный минимум, монотонно убывает на $[\gamma_1; 0]$, монотонно возрастает на $[0; \gamma_2]$, и $dU_1(\gamma_k)/d\gamma = 0,\ k = 1, 2$.

3. Стационарные режимы и условия их устойчивости. При сделанных предположениях обобщенные силы для лагранжевых координат α, β, φ равны 0, $-U'$, L. Здесь и далее штрихом обозначается дифференцирование по β. Лагранжевы уравнения движения системы, записанные в соответствии с выражением (1) для кинетической энергии, имеют семейство решений вида

$$\dot{\alpha} = \Omega^0,\ \beta = \beta^0,\ \varphi = \omega t + \varphi_0, \tag{9}$$

где $\omega = \omega_*$, а постоянные Ω^0, β^0 связаны соотношением

$$-\Omega^0 \left[\frac{1}{2}\Omega^0 G'(\beta^0) + \omega Q'(\beta^0)\right] + U'(\beta^0) = 0. \tag{10}$$

Эти уравнения можно записать в виде системы нормального вида с фазовым вектором $(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\varphi}, \beta, \varphi)$. Они допускают интеграл

$$G(\beta)\dot{\alpha} + N(\beta)\dot{\beta} + Q(\beta)\dot{\varphi} = p \quad (p = \mathrm{const}). \tag{11}$$

Введем вместо $\dot{\alpha}$ переменную p по формуле (11), а вместо φ введем угловую переменную $\gamma = \varphi - \omega t - \varphi_0$. Тогда получим преобразованную систему уравнений

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\frac{(p-\omega Q)N + \dot{\beta}(GH - N^2) + \dot{\gamma}(GR - QN)}{G} + \frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{(p - \omega Q - \dot{\beta}N - \dot{\gamma}Q)^2}{2G} + U\right] = 0, \\
\frac{d}{dt}\frac{(p-\omega Q)Q + \dot{\beta}(GR - QN) + \dot{\gamma}(GC - Q^2)}{G} = L, \qquad \frac{dp}{dt} = 0,
\end{gathered} \tag{12}$$

определяющую $(p, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma)$. Аргументы $(\dot{\gamma}, \gamma)$ у функции L и аргумент β у функций G, N, Q, U здесь для краткости опущены. При фиксированном p первые два уравнения (12) образуют приведенную систему $S(p)$, соответствующую данному p.

Так как $G(\beta) > 0$ при любом β согласно (4), то замена переменных $(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\varphi}, \beta, \varphi)$ переменными $(p, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma)$ взаимно однозначна и непрерывна в обе стороны. Поэтому устойчивость любого решения исходной лагранжевой системы эквивалентна устойчивости соответствующего решения преобразованной системы (12).

Решению (9) лагранжевой системы соответствует решение

$$p = p^0, \qquad \beta = \beta^0, \qquad \gamma = 0 \tag{13}$$

системы (12). Оно существует, если выполнено эквивалентное (10) условие

$$-\frac{p^0 - \omega Q(\beta^0)}{G(\beta^0)}\left[\frac{G'(\beta^0)}{2G(\beta^0)}\big(p^0 - \omega Q(\beta^0)\big) + \omega Q'(\beta^0)\right] + U'(\beta^0) = 0. \tag{14}$$

Определим приведенную потенциальную энергию силы тяжести формулой

$$f(p,\beta) = \frac{[p-\omega Q(\beta)]^2}{2G(\beta)} + U(\beta) \tag{15}$$

и введем обозначения

$$\begin{aligned} &K_1(\beta) = G(\beta)R - N(\beta)Q(\beta), \\ &K_2(p,\beta) = \big[p-\omega Q(\beta)\big]\big[G'(\beta)Q(\beta) - G(\beta)Q'(\beta)\big] + \omega G(\beta)Q'(\beta)Q(\beta). \end{aligned} \tag{16}$$

Тогда условие (14) существования решения (13) у системы (12) эквивалентно равенству $f'(p^0,\beta^0)=0$, а достаточное условие его устойчивости, полученное путем исследования линейного приближения, состоит в выполнении двух неравенств [5]

$$f''(p^0,\beta^0) > 0, \tag{17}$$

$$|K_1(\beta^0)| + |K_2(p^0,\beta^0)| \neq 0. \tag{18}$$

Они выражают условие отрицательности действительных частей всех корней характеристического уравнения линеаризованной приведенной системы $S(p^0)$.

При выполнении этих неравенств устойчивость стационарного решения (13) уравнений (12) выводится в [5] следующим образом. Во-первых, при $f''(p^0,\beta^0) > 0$ и значениях p, близких к p^0, приведенная система $S(p)$ имеет изолированную стационарную точку $(\dot\beta,\dot\gamma,\beta,\gamma) = (0,0,\beta^*(p),0)$, где $\beta^*(p)$ – непрерывная функция, неявно определенная соотношением $f'(p,\beta)=0 \quad (\beta^0=\beta^*(p^0))$. Во-вторых, из непрерывности функций (15), (16) в левых частях неравенств (17), (18) следует, что при малых начальных возмущениях для стационарной точки $(0,0,\beta^*(p),0)$ системы $S(p)$ сохраняется свойство отрицательности действительных частей всех корней характеристического уравнения. Тогда, по теореме Ляпунова, данная точка является асимптотически устойчивой для приведенной системы $S(p)$, так что при достаточно малых начальных возмущениях для возмущенного решения этой системы имеют место асимптотические соотношения

$$\dot\beta(t), \dot\gamma(t), \beta(t)-\beta^*(p), \quad \gamma(t) \to 0 \quad (t\to\infty). \tag{19}$$

С учетом непрерывности $\beta^*(p)$ отсюда следует устойчивость решения (13) системы (12) по p,β и его асимптотическая устойчивость по $\dot\beta,\dot\gamma,\gamma$. В соответствии с полученной в [6] оценкой (13.1.4), скорость сходимости в (19) экспоненциальная.

При нарушении условия (18), то есть при $f''(p^0,\beta^0) > 0$ и $K_1(\beta^0) = K_2(p^0,\beta^0) = 0$, характеристическое уравнение для стационарной точки $(0,0,\beta^0,0)$ приведенной системы $S(p^0)$ имеет корень с нулевой действительной частью, и поэтому устойчивость решения (13) в [5] уже не гарантируется.

В статье [7] с помощью второго метода Ляпунова установлен более общий критерий устойчивости стационарных движений, чем (17), (18), а именно, показано, что для устойчивости стационарных движений достаточно и, как правило, необходимо, чтобы функция $f(p^0,\beta)$ имела при $\beta=\beta^0$ изолированный минимум по β. Отсюда, в частности, следует, что для устойчивости решения (13) системы (12) достаточно выполнения одного лишь неравенства (17), а условие (18) может нарушаться. Такой вывод не противоречит результату работы [5], так как использованный в этой работе метод линеаризации фактически направлен на установление условий экспоненциальной устойчивости стационарного решения приведенной системы, тогда как принятый в [7] метод функций Ляпунова обеспечивает "простую", неасимптотическую устойчивость, так что свойства (19) здесь уже могут не выполняться.

Ниже будет показано, что при $f''(p^0,\beta^0)>0$ асимптотические свойства (19) выполняются, если предположение (18) заменить более слабым предположением

$$|K_1(\beta)|+|K_2(p^0,\beta)|\overset{\beta}{\not\equiv}0, \tag{20}$$

которое всегда выполняется при допустимых значениях параметров. Будет также дана оценка области притяжения стационарной точки системы $S(p)$.

4. Асимптотические свойства возмущенного движения при $\boldsymbol{f''(p^0,\beta^0)>0}$. Вместо соотношения (20) удобнее проверять его отрицание.

Лемма 1. Постоянная $\widehat{p}$ такая, что

$$K_1(\beta)\overset{\beta}{\equiv}0,\quad K_2(\widehat{p},\beta)\overset{\beta}{\equiv}0 \tag{21}$$

существует тогда и только тогда, когда (см. обозначения в (2)):

$$\begin{aligned}&g_2=0,\quad g_3=0,\quad g_4\neq 0,\quad q_0(2q_0g_4+q_1g_1)-q_1{}^2(g_0+g_4)=0,\\ &g_0R-q_0n_0-q_1n_1/2=0,\ g_1R-q_0n_1-q_1n_0=0,\ n_2=0,\ g_4R+q_1n_1/2=0.\end{aligned} \tag{22}$$

При выполнении этих соотношений $\widehat{p}=2\omega q_0+\omega q_1g_1/2g_4$.

Доказательство. В [8] выведены условия, при которых

$$K_1(\beta)\equiv 0,\quad [\widehat{p}-\omega Q(\beta)]Q(\beta)/G(\beta)\equiv \text{const}. \tag{23}$$

Продифференцировав последнее тождество по β, получим $K_2(\widehat{p},\beta)\equiv 0$. Поэтому условия выполнения тождеств (21) эквивалентны выведенным в [8] условиям выполнения тождеств (23). А эти условия записываются в виде (22) и $\widehat{p}=2\omega q_0+\omega q_1g_1/2g_4$. □

Лемма 2. Конструкции гироскопа в кардановом подвесе, удовлетворяющей условиям (22), не существует.

Доказательство. Предположим, что соотношения (22) выполнены. Запишем формулы (2) для $G(\beta),N(\beta)$ с учетом первого, второго и седьмого соотношений (22):

$$G(\beta)=g_0+g_1\sin\beta+g_4\cos 2\beta,\quad N(\beta)=n_0+n_1\sin\beta.$$

Отсюда, пользуясь равенством (3) для n_0, имеем $G(0)=g_0+g_4,\ \ N(0)=n_0=H\cos\theta^2$. Тогда неравенство $G(0)H-N^2(0)>0$, вытекающее из (4), записывается в виде $(g_0+$ $+g_4)H-H^2\cos^2\theta^2>0$. Разделим на $H>0$ и опять воспользуемся (3). Получаем

$$g_0+g_4>n_0\cos\theta^2. \tag{24}$$

Складывая пятое из соотношений (22) с восьмым, приходим к равенству $(g_0+g_4)R-$ $-q_0n_0=0$. Покажем, что оно невыполнимо. Действительно, подставив в его левую часть выражения (3) для R,q_0 и воспользовавшись неравенством (24), получаем $(g_0+g_4)R-$ $-q_0n_0>0$. Следовательно, соотношения (22) несовместны. □

Теперь, предполагая, что для стационарного решения (13) преобразованной системы (12) имеет место неравенство (17): $f''(p^0, \beta^0) > 0$, изучим асимптотическое поведение возмущенных решений.

Сначала покажем, что решение (13) принадлежит к однопараметрическому семейству стационарных решений, которые существуют при значениях p из некоторого интервала $(p_1; p_2)$, содержащего p^0. Как отмечено выше, условием существования стационарного решения при данных p, β является равенство $f'(p, \beta) = 0$. В соответствии с теоремой о неявной функции, при выполнении неравенства (17) на плоскости (p, β) существует прямоугольная область

$$X^0 = \big\{(p, \beta) : |p - p^0| < a^0,\ |\beta - \beta^0| < b^0\big\},$$

в которой $f''(p, \beta) > 0$, и уравнение $f'(p, \beta) = 0$ однозначно определяет непрерывную функцию $\beta = \beta^*(p)$, причем $\beta^0 = \beta^*(p^0)$.

Интервал $(p^0 - a^0; p^0 + a^0)$, на котором определена функция $\beta = \beta^*(p)$, и область X^0 можно расширить следующим образом. Пусть в точке (p^1, β^1) кривой $\beta = \beta^*(p)$, соответствующей правому концу интервала $(p^0 - a^0; p^0 + a^0)$, выполнено неравенство $f''(p^1, \beta^1) > 0$, аналогичное (17). Тогда на плоскости (p, β) существует прямоугольник

$$X^1 = \big\{(p, \beta) : |p - p^1| < a^1,\ |\beta - \beta^1| < b^1\big\},$$

в котором уравнение $f'(p, \beta) = 0$ однозначно определяет β как непрерывную функцию p. Для значений p таких, что одновременно $|p - p^0| < a^0, |p - p^1| < a^1$, эта функция, очевидно, совпадает с исходной функцией $\beta = \beta^*(p)$. Следовательно, она является непрерывным продолжением исходной функции на интервал $(p^1; p^1 + a^1)$.

Этот процесс можно продолжать как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения p до тех пор, пока сохраняется неравенство $f''(p, \beta^*(p)) > 0$. В результате получим промежуток $(p_1; p_2)$ (возможно, бесконечный), на котором существует непрерывная ветвь кривой $\beta = \beta^*(p)$, определенной на плоскости (p, β) уравнением $f'(p, \beta) = 0$.

В фазовом пространстве системы (12), т. е. в пространстве $(p, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma)$, точки вида $(p, 0, 0, \beta^*(p), 0)$ являются при $p \in (p_1; p_2)$ стационарными точками этой системы. Они лежат на кривой $\beta = \beta^*(p)$, расположенной в плоскости (p, β) этого пространства.

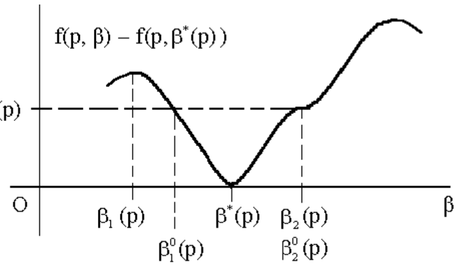

Рис. 3. График зависимости $f(p, \beta) - f(p, \beta^*(p))$ от β.

По построению, при каждом $p \in (p_1; p_2)$ значение $\beta^*(p)$ является точкой изолированного минимума $f(p, \beta)$ как функции β. Так как при данном p функция $f(p, \beta)$ является непрерывной 2π-периодической по β, то всегда существуют отличные от $\beta^*(p)$ значения β, где $f'(p, \beta) = 0$. Они соответствуют точкам изолированного максимума $f(p, \beta)$. Кроме того, могут существовать точки перегиба $f(p, \beta)$ как функции β, в них также $f'(p, \beta) = 0$. Обозначим через $\beta_1(p), \beta_2(p)$ ближайшие к $\beta^*(p)$ значения β, где $f'(p, \beta) = 0$ $(\beta_1(p) < \beta^*(p) < \beta_2(p))$. Так как $f''(p, \beta^*(p)) > 0$, то при $\beta \in (\beta_1(p); \beta^*(p))$ имеем $f'(p, \beta) < 0$, при $\beta \in (\beta^*(p); \beta_2(p))$ будет $f'(p, \beta) > 0$, и наконец, $f'(p, \beta) = 0$ при $\beta = \beta^*(p)$ и $\beta = \beta_j(p),\ j = 1, 2$.

Итак, при любом $p \in (p_1; p_2)$ значение $\beta^*(p)$ есть точка минимума $f(p, \beta)$ как функции β на промежутке $(\beta_1(p); \beta_2(p))$. Слева от точки $\beta^*(p)$ функция $f(p, \beta)$ монотонно убывает, а справа – монотонно возрастает. Этими же свойствами обладает и разность $f(p,\beta)-f(p,\beta^*(p))$ с тем отличием, что она принимает в точке своего минимума $\beta^*(p)$ нулевое значение (рис. 3). Таким образом, при фиксированном $p\in(p_1;p_2)$ эта разность является определенно положительной функцией возмущения $\beta-\beta^*(p)$.

Покажем, что для каждого $p\in(p_1;p_2)$ стационарное решение $(0,0,\beta^*(p),0)$ приведенной системы $S(p)$ асимптотически устойчиво. При выбранном $p\in(p_1;p_2)$ рассмотрим в области

$$D_p=\{(\dot\beta,\dot\gamma,\beta,\gamma):\ \beta\in(\beta_1(p);\beta_2(p)),\ \gamma\in(\gamma_1;\gamma_2)\}$$

фазового пространства системы $S(p)$ функцию

$$V_p(\dot\beta,\dot\gamma,\beta,\gamma)=T_*(\dot\beta,\dot\gamma,\beta)+f(p,\beta)-f(p,\beta^*(p))+U_1(\gamma), \tag{25}$$

где

$$T_*(\dot\beta,\dot\gamma,\beta)=\frac{\dot\beta^2[G(\beta)H-N^2(\beta)]+2\dot\beta\dot\gamma[G(\beta)R-Q(\beta)N(\beta)]+\dot\gamma^2[G(\beta)C-Q^2(\beta)]}{2G(\beta)}, \tag{26}$$

$f(p,\beta)$ определена в (15), а $U_1(\gamma)$ – в (8). Ее производная в силу системы $S(p)$ равна

$$\dot V_p(\dot\beta,\dot\gamma,\beta,\gamma)=\dot\gamma L_d(\dot\gamma) \tag{27}$$

и в соответствии с (7) является функцией знакопостоянной отрицательной.

Так как $f(p,\beta)-f(p,\beta^*(p))$ есть определенно положительная функция возмущения $\beta-\beta^*(p)$, а $T_*(\dot\beta,\dot\gamma,\beta)$ и $U_1(\gamma)$ определенно положительны по $\dot\beta,\dot\gamma$ и γ, то V_p есть определенно положительная функция всех возмущений $\dot\beta,\dot\gamma,\beta-\beta^*(p),\gamma$ фазовых переменных системы $S(p)$ в области D_p.

Чтобы воспользоваться теоремой Барбашина-Красовского, найдем значения $\widetilde p$ постоянной p, при которых существуют положительные полутраектории, где $\dot V_p\equiv 0$. Для функции $V_{\widetilde p}$ верна лемма из [7], согласно которой на тех траекториях $\dot\beta(t),\dot\gamma(t),\beta(t),\gamma(t)$ системы $S(\widetilde p)$, где $\dot V_{\widetilde p}\equiv 0$, должно быть $\dot\gamma(t)=0,\ \gamma(t)=0$ при всех $t\ge t_0$. Поэтому функции $\dot\beta(t),\beta(t)$ тождественно по $t\ge t_0$ удовлетворяют соотношениям

$$\dot\beta^2(t)\frac{G(\beta(t))H-N^2(\beta(t))}{G(\beta(t))}+f(\widetilde p,\beta(t))-f(\widetilde p,\beta^*(\widetilde p))=e, \tag{28}$$

$$\frac{[\widetilde p-\omega Q(\beta(t))]Q(\beta(t))}{G(\beta(t))}+\dot\beta(t)\frac{G(\beta(t))R-Q(\beta(t))N(\beta(t))}{G(\beta(t))}=k, \tag{29}$$

где $e\ge 0, k$ – постоянные. Первое из них при $\dot\gamma\equiv 0,\gamma\equiv 0$ следует из (25)–(27), а второе вытекает из второго уравнения (12).

Предполагая, что рассматриваемая траектория не совпадает со стационарной точкой $(0,0,\beta^*(\widetilde p),0)$, имеем $e>0$. А так как $\beta^*(\widetilde p)$ есть точка минимума $f(\widetilde p,\beta)-f(\widetilde p,\beta^*(\widetilde p))$, то при достаточно малых $e>0$ соотношение (28) определяет на плоскости $(\dot\beta,\beta)$ замкнутые фазовые траектории, охватывающие стационарную точку. Для таких траекторий $\beta(t)$ является периодической функцией t.

Но если коэффициент при $\dot\beta$ в (29) отличен от тождественного нуля, то соотношение (29) определяет $\dot\beta$ как однозначную функцию β, и следовательно, соответствующая траектория не будет замкнутой. Значит, данный коэффициент тождественно равен нулю, то есть, с учетом первого обозначения (22), $K_1(\beta(t)) \equiv 0$. В таком случае соотношение (29) принимает вид $[\widetilde{p} - \omega Q(\beta(t))]Q(\beta(t))/G(\beta(t)) \equiv k$, где k – постоянная. Продифференцируем это тождество по t. На интервалах, где $\dot{\beta}(t) \neq 0$, с учетом второго обозначения (16) имеем $K_2(\widetilde{p}, \beta(t)) \equiv 0$.

Так как при периодической зависимости β от t величина β не является постоянной, то полученные равенства $K_1(\beta(t)) \equiv 0$, $K_2(\widetilde{p}, \beta(t)) \equiv 0$ должны быть тождествами не только по t, но и по β, то есть должны выполняться тождества (21). Таким образом, приведенная система $S(p)$ имеет при некотором $p = \widetilde{p}$ отличное от $(0, 0, \beta^*(\widetilde{p}), 0)$ решение, на котором $\dot{V}_{\widetilde{p}} \equiv 0$, только в случае, когда при данном $\widetilde{p}$ выполняются тождества (21). Но из лемм 1, 2 следует, что таких значений $\widetilde{p}$ не существует.

Итак, при любом $p \in (p_1; p_2)$ система $S(p)$ не имеет в окрестности стационарной точки $(0, 0, \beta^*(p), 0)$ отличных от этой точки целых положительных полутраекторий, на которых $\dot{V}_p \equiv 0$. Следовательно, при любом $p \in (p_1; p_2)$ для стационарной точки $(0, 0, \beta^*(p), 0)$ приведенной системы $S(p)$ выполнены условия теоремы Барбашина–Красовского (см. теорему 1.5.2 в [3] и теорему 2.1.3 в [4]). Поэтому стационарная точка $(0, 0, \beta^*(p), 0)$ системы $S(p)$ при $p \in (p_1; p_2)$ асимптотически устойчива, так что для возмущенного решения этой системы выполняются асимптотические соотношения (19).

5. Область притяжения для стационарной точки. При $p \in (p_1; p_2)$ полагаем

$$e_0(p) = \min_{j=1,2}[f(p, \beta_j(p)) - f(p, \beta^*(p))], \quad e_1 = \min_{k=1,2} U_1(\gamma_k), \qquad e(p) = \min\{e_0(p), e_1\}. \quad (30)$$

Среди значений β из отрезка $[\beta_1(p); \beta_2(p)]$ неравенству $f(p, \beta_j(p)) - f(p, \beta^*(p)) < e_0(p)$ удовлетворяют точки принадлежащего этому отрезку открытого интервала $(\beta_1^0(p); \beta_2^0(p))$ (см. рис. 3), а среди значений γ из отрезка $[\gamma_1, \gamma_2]$ неравенству $U_1(\gamma) < e_1$ удовлетворяют точки принадлежащего этому отрезку открытого интервала (γ_1^0, γ_2^0) (см. рис. 2).

Покажем, что при каждом $p \in (p_1; p_2)$ множество

$$V_p^{-1} = \{(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma) \in \overline{D}_p : V_p(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma) < e(p)\}, \quad (31)$$

где

$$\overline{D}_p = \{(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma) : \beta \in [\beta_1(p); \beta_2(p)], \ \gamma \in [\gamma_1; \gamma_2]\}, \quad (32)$$

содержится в области притяжения стационарной точки $(0, 0, \beta^*(p), 0))$ системы $S(p)$.

Сначала установим ограниченность V_p^{-1}. Согласно (25) функция $V_p(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma)$ является суммой трех слагаемых: $T_*(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta)$, $f(p, \beta) - f(p, \beta^*(p))$, $U_1(\gamma)$. Вследствие (4), первое из них неотрицательно при всех значениях $(\dot{\beta}, \dot{\gamma})$ независимо от значения β, второе неотрицательно при $\beta \in [\beta_1(p); \beta_2(p)]$ (см. рис. 3), а третье неотрицательно при $\gamma \in [\gamma_1; \gamma_2]$ (см. рис. 2). Таким образом, в соответствии с определением множества V_p^{-1}, на этом множестве функция $V_p(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma)$ равна сумме трех неотрицательных слагаемых и меньше числа $e(p) > 0$. Следовательно, для точек множества V_p^{-1} выполняются неравенства

$$0 \leq T_*(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta) < e(p), \quad 0 \leq f(p, \beta) - f(p, \beta^*(p)) < e(p), \quad 0 \leq U_1(\gamma) < e(p). \quad (33)$$

Покажем, что первому неравенству (33) удовлетворяют только значения $(\dot{\beta}, \dot{\gamma})$ из круга конечного радиуса. Из (4) следует, что при каждом β функция $T_*(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta)$ есть определенно положительная квадратичная форма переменных $\dot\beta, \dot\gamma$ с непрерывными 2π-периодическими по β коэффициентами. Поэтому при $\beta \in [0; 2\pi]$ существует непрерывная функция $\delta(\beta)$ такая, что преобразование поворота координат $\dot\beta, \dot\gamma$ на угол $\delta(\beta)$ приводит T_* к виду $T_* = a_1(\beta)x_1^2 + a_2(\beta)x_2^2$, где $a_1(\beta), a_2(\beta) > 0$ – непрерывные, и следовательно, ограниченные функции β на отрезке $[0; 2\pi]$. Полагая $a(\beta) = \min_{j=1,2} a_j(\beta)$, $a = \min_{\beta\in[0;2\pi]} a(\beta)$, имеем $0 < a < +\infty$, $T_* \geq a(\beta)(x_1^2 + x_2^2) \geq a(x_1^2 + x_2^2) = a(\dot\beta^2 + \dot\gamma^2)$. Таким образом, первому неравенству (33) удовлетворяют только те значения $\dot\beta, \dot\gamma$, для которых $\dot\beta^2 + \dot\gamma^2 < e(p)/a$. Два других неравенства (33) не налагают ограничений на переменные $\dot\beta, \dot\gamma$. Отсюда следует ограниченность множества V_p^{-1} по $\dot\beta, \dot\gamma$.

Далее из (30) следует, что второму неравенству (33) удовлетворяют лишь те точки $(\dot\beta, \dot\gamma, \beta, \gamma) \in \overline{D}_p$, для которых $f(p, \beta) - f(p, \beta^*(p)) < e_0(p)$ при $\beta \in [\beta_1(p); \beta_2(p)]$, т. е. точки определенного выше интервала $(\beta_1^0(p); \beta_2^0(p))$ (см. рис. 3), лежащего в $[\beta_1(p); \beta_2(p)]$ и поэтому конечного.

Аналогичным образом, среди точек $(\dot\beta, \dot\gamma, \beta, \gamma) \in \overline{D}_p$ третьему неравенству (30) удовлетворяют лишь те, для которых $U_1(\gamma) < e_1$ при $\gamma \in [\gamma_1; \gamma_2]$, т. е. только точки определенного выше интервала $(\gamma_1^0; \gamma_2^0)$, лежащего в $[\gamma_1; \gamma_2]$ (см. рис. 2).

Итак, ограниченность множества V_p^{-1} доказана.

Нетрудно показать, что любую точку $x = (\dot\beta, \dot\gamma, \beta, \gamma) \in V_p^{-1}$ можно соединить со стационарной точкой $x_0 = (0, 0, \beta^*(p), 0)$ лежащей в V_p^{-1} двузвенной ломаной, составленной из отрезков $[x_0;\ x_1]$ и $[x_1; x]$, где $x_1 = (0, 0, \beta, \gamma)$. Поэтому V_p^{-1} – область.

Согласно определению (41), $V_p^{-1} \subset \overline{D}_p$. Покажем, что $V_p^{-1} \subset D_p$. Точки области V_p^{-1}, лежащие на границе D_p, удовлетворяют хотя бы одному из условий:

$$\begin{array}{lll} 1)\ V_p(\dot\beta, \dot\gamma, \beta, \gamma) < e(p), & \beta = \beta_1(p) \text{ или } \beta = \beta_2(p), & \gamma \in [\gamma_1; \gamma_2]; \\ 2)\ V_p(\dot\beta, \dot\gamma, \beta, \gamma) < e(p), & \beta \in [\beta_1(p); \beta_2(p)], & \gamma = \gamma_1 \text{ или } \gamma = \gamma_2. \end{array}$$

Рассмотрим точки типа 1. Из (30) следует, что $f(p, \beta) - f(p, \beta^*(p)) \geq e_0(p)$ при $\beta = \beta_j(p),\ j = 1, 2$. Поэтому для точек типа 1 выполняется неравенство

$$V_p(\dot\beta, \dot\gamma, \beta, \gamma) \geq f(p, \beta) - f(p, \beta^*(p)) \geq e_0(p). \tag{34}$$

Если $e_0(p) \leq e_1$, то $e(p) = e_0(p)$ согласно (30), и из (34) следует, что $V_p(\dot\beta, \dot\gamma, \beta, \gamma) \geq e(p)$. Это противоречит определению точек типа 1. Если же $e_0(p) > e_1$, то $e(p) = e_1$ согласно (30), и из (34) следует неравенство $V_p(\dot\beta, \dot\gamma, \beta, \gamma) > e_1 = e(p)$, также невыполнимое для граничных точек типа 1. Следовательно, таких точек не существует. Точно так же устанавливаем несуществование граничных точек типа 2. Так как точек типов 1, 2 не существует, то $V_p^{-1} \subset D_p$.

Теперь, следуя доказательству теоремы 1.5.2 из [3], рассмотрим возмущенную траекторию $(\dot\beta(t), \dot\gamma(t), \beta(t), \gamma(t))$ приведенной системы $S(p)$, проходящую в начальный момент t_0 через точку $(\dot\beta_0, \dot\gamma_0, \beta_0, \gamma_0)$ области V_p^{-1}. Из (27), (7) следует, что при всех $t \geq t_0$ выполняется неравенство

$$V_p(\dot\beta(t), \dot\gamma(t), \beta(t), \gamma(t)) \leq V_p(\dot\beta_0, \dot\gamma_0, \beta_0, \gamma_0) < e(p).$$

Поэтому множество Ω_p всех ω-предельных точек данной траектории не пусто и лежит внутри V_p^{-1}, т. е. $\Omega_p \subset V_p^{-1}$.

В случае, когда Ω_p совпадает со стационарной точкой $(0, 0, \beta^*(p), 0)$, возмущенная траектория стремится при $t \to \infty$ к данной стационарной точке. В случае, когда множество Ω_p не совпадает со стационарной точкой $(0, 0, \beta^*(p), 0)$, это множество должно содержать отличные от $(0, 0, \beta^*(p), 0)$ целые полутраектории, на которых $\dot{V}_p \equiv 0$ [4]. Но $\Omega_p \subset V_p^{-1}$, и при этом, как показано выше, $V_p^{-1} \subset D_p$, где D_p не содержит отличных от $(0, 0, \beta^*(p), 0)$ целых полутраекторий, для которых $\dot{V}_p \equiv 0$. Следовательно, случай, когда множество Ω_p не совпадает со стационарной точкой $(0, 0, \beta^*(p), 0)$, невозможен. Поэтому траектория с начальным значением в V_p^{-1} остается в V_p^{-1} при всех $t \geq t_0$ и стремится к стационарной точке $(0, 0, \beta^*(p), 0)$ при $t \to \infty$.

Объединяя результаты двух предыдущих пунктов, приходим к следующей теореме.

Теорема. Пусть для стационарного решения (13) системы (12) выполнено неравенство (17): $f''(p^0, \beta^0) > 0$, где функция $f(p, \beta)$ определена формулой (15). С помощью теоремы о неявной функции построим интервал $(p_1; p_2)$ и три определенные на нем функции: $\beta_1(p), \beta_2(p), \beta^*(p)$, удовлетворяющие соотношению $f'(p, \beta) = 0$, причем функция $\beta^*(p)$ непрерывна, а значение $\beta^*(p)$ является точкой минимума $f(p, \beta)$ на интервале $(\beta_1(p); \beta_2(p))$. При каждом $p \in (p_1; p_2)$ введем число $e(p)$ по формулам (30) и определим множество V_p^{-1} по формулам (31), (32). Тогда для любого $p \in (p_1; p_2)$:

1) стационарное решение $(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma) = (0, 0, \beta^*(p), 0)$ приведенной системы $S(p)$ асимптотически устойчиво;

2) любое решение системы $S(p)$, принадлежащее V_p^{-1} в начальный момент t_0, остается в V_p^{-1} при всех $t > t_0$ и стремится к $(0, 0, \beta^*(p), 0)$ при $t \to \infty$.

Утверждение теоремы останется справедливым, если включить в интервал $(p_1; p_2)$ значения p, для которых при $\beta = \beta^*(p)$ выполнено общее условие минимума $f(p, \beta)$ по β, а именно

$$f'(p, \beta^*(p)) = 0, f''(p, \beta^*(p)) = 0, ..., f^{(n-1)}(p, \beta^*(p)) = 0, \ f^{(n)}(p, \beta^*(p)) > 0,$$

где $n > 0$ – четное. Для гироскопа в кардановом подвесе n принимает одно из значений 2, 4, 6 [7].

1. *Коносевич Б.И.* Скорость ухода оси ротора в обобщенной задаче о гироскопе в кардановом подвесе // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 82–92.
2. *Лищенко А.И.* Синхронные двигатели с автоматическим регулированием возбуждения. – К.: Техника, 1969. – 192 с.
3. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости – М.: Наука, 1967. – 224 с.
4. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости – М.: Мир, 1980. – 302 с.
5. *Коносевич Ю.Б.* Условия устойчивости стационарных режимов движения синхронного гироскопа в кардановом подвесе // Механика твердого тела. – 2003. – Вып. 33. – С. 90–96.
6. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений – М.: Изд-во иностр. лит., 1958. – 475 с.
7. *Коносевич Ю.Б.* Критерий устойчивости стационарных движений синхронного гироскопа в кардановом подвесе // Механика твердого тела. – 2005. – Вып. 35. – С. 115–123.
8. *Коносевич Б.И.* Асимптотические свойства некоторых движений асинхронного гироскопа в кардановом подвесе // Там же. – 1982. – Вып. 14. – С. 87–92.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
konos@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 15.06.06