УДК 531.38

 М.Е. Лесина, Я.В. Зиновьева

НОВОЕ ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ДВУХ ГИРОСКОПОВ ЛАГРАНЖА, СОЧЛЕНЕННЫХ УПРУГИМ СФЕРИЧЕСКИМ ШАРНИРОМ

Постановки задачи о движении двух связанных тел, ориентированные на цели и методы аналитической динамики, даны в цикле работ [1 – 16], включенных позже в монографию [17]. Предложено шесть форм уравнений рассматриваемой задачи [17, с. 109-114]. Найдены девять случаев интегрируемости. В этой статье предложена седьмая форма уравнений движения и найдено новое точное решение.

Новая форма уравнений движения. Без ограничения на распределение масс тел уравнения движения в работе [18] получены методами неголономной механики в виде уравнений Эйлера—Лагранжа. Однако точные решения их авторы искали лишь для осесимметричных тел. С помощью интегралов проведена редукция к системе трех уравнений первого порядка. В [17, с. 110-113] эта задача сведена к двум уравнениям первого порядка в трех формах.

Приведем уравнения[1] (5.47)*, (5.48)* монографии [17]:

$$H\dot{\omega}_2 = Nn_0\Omega_1 + (A_0 n - H\omega_3)\omega_1, \tag{1}$$

$$H\dot{\Omega}_2 = Nn\omega_1 + (An_0 - H\Omega_3)\Omega_1. \tag{2}$$

Вместо ω_1, Ω_1 вводим новые переменные (5.57)*

$$\omega_1 = (\xi + 1)\varkappa, \qquad \Omega_1 = (\xi - 1)\varkappa, \tag{3}$$

тогда, вследствие (5.59)*,

$$\dot{\theta} = -2\varkappa. \tag{4}$$

Переменные ω_3, Ω_3, входящие в (1), (2), записаны конечными соотношениями в (5.55)*:

$$\omega_3 = (\Omega_2 - \omega_2\cos\theta)/\sin\theta, \qquad \Omega_3 = (\Omega_2\cos\theta - \omega_2)/\sin\theta. \tag{5}$$

Вместо циклических интегралов введем новые величины

$$n = Hk, \qquad n_0 = Hk_0, \tag{6}$$

где

$$H = AA_0 - N^2 > 0, \tag{7}$$

и перейдем в уравнениях (1), (2) к дифференцированию по θ, подставив в них соотношения (3), (4), (6):

$$2\omega_2' = -Nk_0(\xi - 1) - (A_0 k - \omega_3)(\xi + 1), \qquad 2\Omega_2' = -Nk(\xi + 1) - (Ak_0 - \Omega_3)(\xi - 1)$$

[1]При ссылке на формулы из [17] будем снабжать их номера звездочкой.

(штрихом обозначено дифференцирование по θ). Эти уравнения запишем в виде

$$\xi(A_0k + Nk_0 - \omega_3) = -2\omega_2' + Nk_0 - A_0k + \omega_3, \tag{8}$$

$$\xi(Ak_0 + Nk - \Omega_3) = -2\Omega_2' - Nk + Ak_0 - \omega_3. \tag{9}$$

Вначале необходимо выделить случаи, в которых коэффициенты при ξ в уравнениях (8), (9) порознь или вместе обращаются в нуль.

Пусть

$$A_0k + Nk_0 - \omega_3 \neq 0, \tag{10}$$

$$Ak_0 + Nk - \Omega_3 = 0, \tag{11}$$

тогда

$$\Omega_3 = Ak_0 + Nk, \tag{12}$$

при этом из уравнения (9) находим $\Omega_2' = -Nk$ и

$$\Omega_2(\theta) = C_0 - Nk\theta. \tag{13}$$

Из конечных соотношений (5) с учетом (12), (13) получим

$$\omega_2(\theta) = (C_0 - Nk\theta)\cos\theta - (Ak_0 + Nk)\sin\theta, \tag{14}$$

$$\omega_3(\theta) = (C_0 - Nk\theta)\sin\theta + (Ak_0 + Nk)\cos\theta. \tag{15}$$

При условии (10) из уравнения (8) определяем $\xi(\theta)$:

$$\xi(\theta) = -3 + 2\frac{A_0k + 2Nk_0 + Nk\cos\theta}{A_0k + Nk_0 - (C_0 - Nk\theta)\sin\theta - (Ak_0 + Nk)\cos\theta}. \tag{16}$$

Сравнивая (12), (13)–(16) с соотношениями (11.6)*, (11.7)*, (11.3)*, замечаем, что при условиях (10), (11) получаем решение, найденное М.Е. Лесиной [17].

Аналогично, считая что

$$A_0k_0 + Nk - \Omega_3 \neq 0, \qquad A_0k + Nk_0 - \omega_3 = 0, \tag{17}$$

получаем такие выражения

$$\omega_3 = A_0k + Nk_0, \tag{18}$$

$$\omega_2' - Nk_0 = 0, \tag{19}$$

$$\omega_2(\theta) = C + Nk_0\theta, \tag{20}$$

$$\Omega_2(\theta) = (C + Nk_0\theta)\cos\theta + (A_0k + Nk_0)\sin\theta, \tag{21}$$

$$\Omega_3(\theta) = -(C + Nk_0\theta)\sin\theta + (A_0k + Nk_0)\cos\theta, \tag{22}$$

$$\xi(\theta) = 3 - 2\frac{Ak_0 + 2Nk + Nk_0\cos\theta}{Ak_0 + Nk_0 + (C + Nk_0\theta)\sin\theta - (A_0k + Nk_0)\cos\theta}. \tag{23}$$

Соотношениями (18)—(23) определено решение, аналогичное указанному выше в [17].

Теперь предположим, что выполнены условия (12), (13) и (18), (20), но эти четыре переменные связанны соотношениями (5), из которых с учетом (13), (20) следует

$$\omega_3\sin\theta = C_0 - Nk\theta - (C + Nk_0\theta)\cos\theta, \qquad \Omega_3\sin\theta = (C_0 - Nk\theta)\cos\theta - (C + Nk_0\theta).$$

Подставив в эти выражения соотношения (12), (18), получим

$$(A_0 k + N k_0)\sin\theta \equiv C_0 - Nk\theta - (C + Nk_0\theta)\cos\theta,$$

$$(A k_0 + N k)\sin\theta \equiv (C_0 - Nk\theta)\cos\theta - C - Nk_0\theta.$$

Выполнение этих тождеств возможно лишь при условиях

$$A_0 k + N k_0 = 0, \quad A k_0 + N k = 0, \quad C = 0, \quad C_0 = 0, \quad N k_0 = 0, \quad N k = 0$$

или следующих из них таких

$$C = C_0 = 0, \qquad\qquad k = k_0 = 0. \tag{24}$$

Запишем решение задачи при полученных условиях. Как следует из (12), (13), (18), (20)

$$\omega_2 = 0, \qquad \Omega_2 = 0, \tag{25}$$

$$\omega_3 = 0, \qquad \Omega_3 = 0. \tag{26}$$

А из циклических интегралов (5.11)*

$$\omega_3 + \dot\varphi = \frac{n}{J} = \widetilde{n}, \qquad \Omega_3 + \dot\Phi = \frac{n_0}{J_0} = \widetilde{n_0} \tag{27}$$

и условий (24), (6), (26) имеем $\dot\varphi = 0$, $\dot\Phi = 0$, т. е. угловые скорости собственных вращений тел равны нулю. Тогда угловые скорости тел S, S_0 таковы

$$\boldsymbol{\omega}_* = \omega_1 \mathbf{e}_1 = (\xi + 1)\varkappa \mathbf{e}_1, \tag{28}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_* = \Omega_1 \mathbf{e}_1 = (\xi - 1)\varkappa \mathbf{e}_1. \tag{29}$$

Переменные ξ и $\varkappa$ найдем из интегралов (5.18)*, (5.14)*:

$$G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = g^2, \tag{30}$$

где

$$\begin{aligned} G_1 &= (A - N\cos\theta)\omega_1 + (A_0 - N\cos\theta)\Omega_1,\\ G_2 &= (A - N\cos\theta)\omega_2 + (A_0\cos\theta - N)\Omega_2 - n_0\sin\theta,\\ G_3 &= (A_0\Omega_2 - N\omega_2)\sin\theta + n + n_0\cos\theta, \end{aligned} \tag{31}$$

$$A(\omega_1^2 + \omega_2^2) + A_0(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) - 2N(\Omega_1\omega_1\cos\theta + \Omega_2\omega_2) + 2\Pi(\theta) = 2h. \tag{32}$$

При условиях (25), (26), (28), (29) из (30), (32) находим

$$\varkappa(\theta) = \frac{g}{(A + A_0 - 2N\cos\theta)\xi + A - A_0}, \tag{33}$$

$$(A + A_0 - 2N\cos\theta)\xi + (A - A_0) = 2g\sqrt{\frac{AA_0 - N^2\cos^2\theta}{(A + A_0 - 2N\cos\theta)[2h - 2\Pi(\theta)] - g^2}}\ .$$

Исключая ξ из соотношения (33), находим

$$2\varkappa(\theta) = \sqrt{\frac{(A + A_0 - 2N\cos\theta)[2h - 2\Pi(\theta)] - g^2}{AA_0 - N^2\cos^2\theta}}. \tag{34}$$

Отметим, что, вследствие неравенства (7), $AA_0 - N^2\cos^2\theta > 0$. Подставив это выражение для $\varkappa(\theta)$ в (4), получим уравнение

$$\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{(A + A_0 - 2N\cos\theta)[2h - 2\Pi(\theta)] - g^2}{AA_0 - N^2\cos^2\theta}},$$

из которого определим зависимость t от угла θ:

$$t - t_0 = -\int\sqrt{\frac{AA_0 - N^2\cos^2\theta}{(A + A_0 - 2N\cos\theta)[2h - 2\Pi(\theta)] - g^2}}\,d\theta. \tag{35}$$

Конкретизируя взаимодействия тел, примем

$$\Pi(\theta) = -C_*^2\cos\theta \tag{36}$$

и, подставив это выражение в правую часть (35), находим

$$t - t_0 = -\int\sqrt{\frac{AA_0 - N^2\cos^2\theta}{(A + A_0 - 2N\cos\theta)[2h + 2C_*^2\cos\theta] - g^2}}\,d\theta. \tag{37}$$

Вместо угла θ введем новую переменную

$$u = \cos\theta \tag{38}$$

и запишем соотношение (37) в виде

$$t - t_0 = -\int\frac{AA_0 - N^2u^2}{\sqrt{(AA_0 - N^2u^2)(1 - u^2)[(A + A_0 - 2Nu)(2h + 2C_*^2u) - g^2]}}\,du.$$

Отметим, что стоящий справа интеграл – гиперэллиптический.

Итак, в этом решении

$$\mathbf{g} = g\mathbf{e}_1, \tag{39}$$

$$\boldsymbol{\omega}_* = \frac{g + 2(A_0 - N\cos\theta)}{A + A_0 - 2N\cos\theta}\varkappa(\theta)\mathbf{e}_1, \qquad \boldsymbol{\Omega}_* = \frac{g - 2(A - N\cos\theta)}{A + A_0 - 2N\cos\theta}\varkappa(\theta)\mathbf{e}_1,$$

а $\varkappa(\theta)$ определено соотношением (34) с учетом (36).

Будем считать, что уравнение (8) определяет переменную ξ

$$\xi = \frac{-2\omega_2' + Nk_0 - A_0k + \omega_3}{A_0k + Nk_0 - \omega_3}, \tag{40}$$

а исключая ξ из (9), приходим к такому уравнению

$$(-2\Omega_2' + Ak_0 - Nk - \Omega_3)(A_0k + Nk_0 - \omega_3) + (2\omega_2' + A_0k + Nk_0 - \omega_3)(Ak_0 + Nk - \Omega_3) = 0. \tag{41}$$

Подставив в (40), (41) соотношение (5), находим

$$\xi = \frac{-2\omega_2' \sin\theta + Nk_0 \sin\theta - A_0 k \sin\theta + \Omega_2 - \omega_2 \cos\theta}{(A_0 k + Nk_0)\sin\theta - \Omega_2 + \omega_2 \cos\theta}, \tag{42}$$

$$\begin{gathered}[2\Omega_2' \sin\theta + \Omega_2 \cos\theta - \omega_2 - (Ak_0 - Nk)\sin\theta][-\Omega_2 + \omega_2\cos\theta +\\ +(A_0k + Nk_0)\sin\theta] + [-\Omega_2 + \omega_2\cos\theta + 2\omega_2'\sin\theta +\\ +(A_0k - Nk_0)\sin\theta][\Omega_2\cos\theta - \omega_2 - (Ak_0 + Nk)\sin\theta] = 0.\end{gathered} \tag{43}$$

При условиях (10), (17) считаем, что потенциальная энергия упругого элемента в интеграле (5.14)* не конкретизирована, перенесем произвол в ее определении на переменную $\omega_2(\theta)$, тогда уравнение (43) представит собой уравнение Абеля второго рода

$$\Omega_2'[\Omega_2 + f_3(\theta)] = f_2(\theta)\Omega_2^2 + f_1(\theta)\Omega_2 + f_0(\theta), \tag{44}$$

где

$$\begin{gathered}f_3(\theta) = -\omega_2\cos\theta - (A_0k + Nk_0)\sin\theta, \qquad f_2(\theta) = -\mathrm{ctg}\theta,\\ f_1(\theta) = \omega_2'\cos\theta + Ak_0 + A_0k\cos\theta + \omega_2(\sin\theta + 2\cos\theta\,\mathrm{ctg}\theta),\\ f_0(\theta) = [-\omega_2 - (Ak_0 + Nk)\sin\theta]\omega_2' - [\omega_2\mathrm{ctg}\theta + A_0k + Ak_0\cos\theta]\omega_2 - Hkk_0\sin\theta.\end{gathered} \tag{45}$$

Введем новую функцию

$$\eta(\theta) = (\Omega_2 + f_3(\theta))\sin\theta, \tag{46}$$

или

$$\eta(\theta) = [\Omega_2 - \omega_2\cos\theta - (A_0k + Nk_0)\sin\theta]\sin\theta;$$

вследствие условий (10), (5) η отлична от нуля и

$$\Omega_2(\theta) = \frac{\eta}{\sin\theta} + \omega_2\cos\theta + (A_0k + Nk_0)\sin\theta. \tag{47}$$

После подстановки (47) в уравнение (44) получим

$$\eta\eta' = F_1(\theta)\eta + F_0(\theta), \tag{48}$$

где

$$\begin{gathered}F_1(\theta) = [2\omega_2\sin\theta - 2(A_0k + Nk_0)\cos\theta + Ak_0 - Nk_0\cos\theta]\sin\theta,\\ F_0(\theta) = (\omega_2' - Nk_0)[-\omega_2\sin\theta + (A_0k + Nk_0)\cos\theta - (Ak_0 + Nk)]\sin^3\theta.\end{gathered}$$

Случай интегрируемости. Как известно, уравнение Абеля (48) при произвольных функциях $F_1(\theta), F_0(\theta)$ нельзя проинтегрировать в квадратурах.

Потребуем, чтобы

$$F_0(\theta) = 0. \tag{49}$$

Так как при выводе уравнения (44) (а, следовательно, и (48)) предполагали, что

$$\omega_2' - Nk_0 \neq 0,$$

то вместо условия (49) имеем такое

$$\omega_2\sin\theta = (A_0k + Nk_0)\cos\theta - Ak_0 - Nk, \tag{50}$$

а
$$F_1(\theta) = -(Ak_0 + 2Nk + Nk_0\cos\theta)\sin\theta. \qquad (51)$$
Вследствие (49) уравнение (48) примет вид
$$\eta(\eta' - F_1(\theta)) = 0. \qquad (52)$$
Как следует из (46), (45), (5), условие $\eta = 0$ эквивалентно условию (18), которое уже рассмотрено. Поэтому будем считать $\eta \neq 0$, тогда из (52), (51) находим
$$\eta(\theta) = \eta_0 + (Ak_0 + 2Nk)\cos\theta + \frac{1}{2}Nk_0\cos^2\theta,$$
а затем из (47) следует
$$\Omega_2\sin\theta = \eta_0 + A_0k + Nk_0 + Nk\cos\theta + \frac{1}{2}Nk_0\cos^2\theta. \qquad (53)$$
Из соотношений (5), после подстановки в них (50), (53), имеем
$$\omega_3\sin^2\theta = \eta_0 + (2Nk + Ak_0)\cos\theta + (A_0k + Nk_0)\sin^2\theta + \frac{1}{2}Nk_0\cos^2\theta, \qquad (54)$$
$$\Omega_3\sin^2\theta = Ak_0 + Nk + \eta_0\cos\theta + Nk\cos^2\theta + \frac{1}{2}Nk_0\cos^3\theta. \qquad (55)$$
Из (42) с учетом (50), (53) определяем
$$\xi(\theta) = -\frac{2(A_0k + Nk_0) - 2(Ak_0 + Nk)\cos\theta + 2Nk_0\sin^2\theta}{\eta_0 + (Ak_0 + 2Nk)\cos\theta + \frac{1}{2}Nk_0\cos^2\theta} - 1. \qquad (56)$$
Для вычисления $\omega_1(\theta)$, $\Omega_1(\theta)$ используем интегралы (30), (32).

Подставив в (31) выражения (3), (50), (53), находим
$$G_1(\theta) = \frac{\varkappa}{B}\{3N^2k_0\cos^3\theta - A_0Nk_0\cos^2\theta - 2[A^2k_0 + 4N^2k_0 + N\widetilde{\eta}]\cos\theta + 4(A + A_0)Nk_0 + 2A_0\widetilde{\eta}\},$$
$$2B = -[Nk_0\cos^2\theta + (2Ak_0 + 4Nk)\cos\theta - 2(A + A_0)k + 2\widetilde{\eta}], \qquad \widetilde{\eta} = \eta_0 + (A + A_0)k,$$
$$G_2\sin\theta = \frac{1}{2}A_0Nk_0\cos^3\theta + \left(AA_0 - \frac{5}{2}N^2\right)k_0\cos^2\theta +$$
$$+(2A + A_0)Nk_0\cos\theta - A(A + A_0)k_0 + (A_0\cos\theta - N)\widetilde{\eta},$$
$$G_3(\theta) = \left[\frac{1}{2}A_0N\cos^2\theta + (AA_0 - 2N^2)\cos\theta + (A + A_0)N\right]k_0 + A_0\widetilde{\eta}.$$
После этого из интеграла (30) определяем
$$2\varkappa(u) =$$
$$= -\frac{[Nk_0u^2 + 2(Ak_0 + 2Nk)u - 2(A + A_0)k + 2\widetilde{\eta}]\sqrt{P_5(u)}}{3N^2k_0u^3 - A_0Nk_0u^2 - 2(A^2k_0 + 4N^2k_0 + N\widetilde{\eta})u + 4(A + A_0)Nk_0 + 2A_0\widetilde{\eta})\sqrt{1 - u^2}}, \qquad (57)$$

где

$$\begin{aligned}
&P_5(u) = M_0u^5 + M_1u^4 + M_2u^3 + M_3u^2 + M_4u + M_5,\\
&M_0 = \tfrac{1}{2}A_0N^3k_0^2,\\
&M_1 = -\tfrac{1}{4}(A_0^2 + 9N^2)N^2k_0^2,\\
&M_2 = 2A_0N^2\widetilde{\eta}k_0 + [-A^2A_0 + 3(2A + A_0)N^2]Nk_0^2,\\
&M_3 = -g^2 - (A_0^2 + 5N^2)N\widetilde{\eta}k_0 + A^2A_0(2A + A_0)k_0^2 - (8A^2 + 4AA_0 + A_0^2)N^2k_0^2 - 4N^4k_0^2,\\
&M_4 = 2A_0\widetilde{\eta}^2N + 2[A^2A_0 + (2A + 3A_0)N^2]\widetilde{\eta}k_0 + 4(A + A_0)(A^2 + N^2)Nk_0^2,\\
&M_5 = g^2 - (A_0^2 + N^2)\widetilde{\eta}^2 - 2(A + A_0)^2N\widetilde{\eta}k_0 - (A + A_0)^2(A^2 + N^2)k_0^2.
\end{aligned} \tag{58}$$

Зависимость времени t от переменной u находим из (4), подставив в него (57),

$$t - t_0 = \int \frac{3N^2k_0u^3 - A_0Nk_0u^2 - 2(N\widetilde{\eta} + A^2k_0 + 4N^2k_0)u + 4(A + A_0)Nk_0 + 2A_0\widetilde{\eta}}{[-Nk_0u^2 - 2(Ak_0 + 2Nk)u + 2(A + A_0)k - 2\widetilde{\eta}]\sqrt{P_5(u)}}du. \tag{59}$$

Затем обращением гиперэллиптического интеграла получим зависимость u от времени t.

Запишем интегралы (30), (32) с учетом (3)

$$\varkappa^2\left[A(\xi+1)^2 + A_0(\xi-1)^2 - 2N\cos\theta(\xi^2-1)\right] = 2h - 2\Pi(\theta) + 2N\Omega_2\omega_2 - A\omega_2^2 - A_0\Omega_2^2,$$

$$[(A - N\cos\theta)(\xi+1) + (A_0 - N\cos\theta)(\xi-1)]^2\varkappa^2 = g^2 - G_2^2 - G_3^2.$$

Исключая $\varkappa^2$ из этих интегралов, получим выражение для потенциальной энергии в виде

$$\begin{gathered}
[2h - 2\Pi(\theta)](A + A_0 - 2N\cos\theta)(A\omega_2^2 + A_0\Omega_2^2 - 2N\Omega_2\omega_2)-\\
-(G_2^2 + G_3^2) + g^2 + \frac{4(AA_0 - N^2\cos^2\theta)(g^2 - G_2^2 - G_3^2)}{[(A + A_0 - 2N\cos\theta)\xi + A - A_0]^2},
\end{gathered} \tag{60}$$

где

$$\begin{gathered}
G_2^2 + G_3^2 = (A + A_0 - 2N\cos\theta)(A\omega_2^2 + A_0\Omega_2^2 - 2N\Omega_2\omega_2) - H(\omega_2^2 + \Omega_2^2 - 2\omega_2\Omega_2\cos\theta)+\\
+2H[-(Ak_0 + Nk)\omega_2 + (A_0k + Nk_0)\Omega_2]\sin\theta + H^2(k^2 + k_0^2 + 2kk_0\cos\theta).
\end{gathered} \tag{61}$$

Из циклических интегралов (27) с учетом (54), (55), (4) находим

$$\varphi = \varphi_0 + \left(\frac{Hk}{J} - \frac{2A_0k + Nk_0}{2}\right)t + \int \frac{2\eta_0 + Nk_0 + 2(Ak_0 + 2Nk)\cos\theta}{4\varkappa\sin^2\theta}d\theta, \tag{62}$$

$$\Phi = \Phi_0 + \left(\frac{Hk_0}{J_0} + Nk\right)t + \int \frac{2(Ak_0 + 2Nk) + 2\eta_0\cos\theta + Nk_0\cos^3\theta}{4\varkappa\sin^2\theta}d\theta, \tag{63}$$

где $\varkappa(\theta)$ определено соотношением (57). Таким образом построено решение, определяемое соотношениями (3), (50), (53)–(56), (57), (62), (63), (60).

Как следует из (61), (50),(53), (56), выражение для потенциальной энергии представит собой рациональную функцию $\sin\theta, \cos\theta$.

Частные случаи решения. Из соотношений (58) замечаем, что коэффициенты M_0, M_1, M_2 многочлена $P_5(u)$ обращаются в нуль при $Nk_0 = 0$.

Рассмотрим случаи

$$N = 0, \qquad k_0 = 0; \tag{64}$$

$$N \neq 0, \qquad k_0 = 0; \tag{65}$$

$$N = 0, \qquad k_0 \neq 0. \tag{66}$$

При условии (66) одно из тел системы закреплено в центре масс, а при условии (65) значение циклической постоянной $k_0 = 0$.

При условиях (64) решение (50), (53), (56) имеет вид

$$\omega_2 \sin\theta = A_0 k \cos\theta, \tag{67}$$

$$\Omega_2 \sin\theta = \widetilde{\eta} - Ak, \tag{68}$$

$$\xi = \frac{(A_0 - A)k + \widetilde{\eta}}{(A_0 + A)k - \widetilde{\eta}}, \tag{69}$$

$$2\varkappa \sin\theta = \frac{[(A + A_0)k - \widetilde{\eta}]\sqrt{-g^2\cos^2\theta + g^2 - A_0^2\widetilde{\eta}^2}}{A_0\widetilde{\eta}}.$$

Введем параметры

$$b = \frac{g\eta_0}{A_0[(A + A_0)k + \eta_0]}, \qquad \sin\gamma_1 = \frac{[(A + A_0)k + \eta_0]A_0}{g}.$$

Отметим, что $\eta_0 = b\sin\gamma_1$. Теперь соотношение (59) принимает вид

$$b(t - t_0) = -\int \frac{du}{\sqrt{\cos^2\gamma_1 - u^2}}.$$

Откуда устанавливаем зависимость между θ и временем t

$$\cos\theta = \cos\gamma_1 \cos[b(t - t_0)]. \tag{70}$$

Для $\varkappa(t)$ получаем соотношение

$$\varkappa(t) = -\frac{b\cos\gamma_1 \sin[b(t - t_0)]}{2\sqrt{1 - \cos^2\gamma_1\cos^2[b(t - t_0)]}}\ . \tag{71}$$

Подставив (71), (69) в (3), находим

$$\omega_1(t) = \frac{A_0 k}{\sin\gamma_1}\frac{\cos\gamma_1 \sin[b(t - t_0)]}{\sqrt{1 - \cos^2\gamma_1\cos^2[b(t - t_0)]}}\ , \tag{72}$$

$$\Omega_1(t) = \frac{(b\sin\gamma_1 + A_0 k)\cos\gamma_1 \sin[b(t - t_0)]}{\sin\gamma_1\sqrt{1 - \cos^2\gamma_1\cos^2[b(t - t_0)]}}\ . \tag{73}$$

Учитывая (70), из (67), (68) получим

$$\omega_2(t) = \frac{A_0 k\cos\gamma_1 \cos[b(t - t_0)]}{\sqrt{1 - \cos^2\gamma_1\cos^2[b(t - t_0)]}}\ , \tag{74}$$

$$\Omega_2(t) = \frac{A_0k + b\sin\gamma_1}{\sqrt{1-\cos^2\gamma_1\cos^2[b(t-t_0)]}}. \tag{75}$$

Внесем (74), (75), (70) в (5) и определим

$$\omega_3(t) = A_0k + \frac{b\sin\gamma_1}{1-\cos^2\gamma_1\cos^2[b(t-t_0)]}, \qquad \Omega_3(t) = \frac{b\sin\gamma_1\cos\gamma_1\cos[b(t-t_0)]}{1-\cos^2\gamma_1\cos^2[b(t-t_0)]},$$

а после этого из циклических интегралов (27) находим зависимости от времени углов собственного вращения тел

$$\varphi(t) = \varphi_0 + b_1t + \mathrm{arctg}[\sin\gamma_1\mathrm{ctg}[b(t-t_0)]], \tag{76}$$

$$\Phi(t) = \Phi_0 - \mathrm{arctg}[\mathrm{ctg}\gamma_1\sin[b(t-t_0)]], \tag{77}$$

где введено обозначение

$$b_1 = A_0\left(\frac{A}{J}-1\right)k.$$

Понадобятся выражения, $\sin\varphi, \cos\varphi, \sin\Phi, \cos\Phi$, которые определим из (76),(77):

$$\begin{aligned}\sin\varphi &= \frac{\sin\gamma_1\cos\beta\cos b(t-t_0) + \sin\beta\sin b(t-t_0)}{\sqrt{1-\cos^2\gamma_1\cos^2[b(t-t_0)]}},\\ \cos\varphi &= \frac{-\sin\gamma_1\sin\beta\cos b(t-t_0) + \cos\beta\sin b(t-t_0)}{\sqrt{1-\cos^2\gamma_1\cos^2 b(t-t_0)}},\end{aligned} \tag{78}$$

$$\begin{aligned}\cos\Phi &= \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\gamma_1\cos^2 b(t-t_0)}}[\sin\gamma_1\cos\Phi_0 + \cos\gamma_1\sin\Phi_0\sin b(t-t_0)],\\ \sin\Phi &= \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\gamma_1\cos^2 b(t-t_0)}}[\sin\gamma_1\sin\Phi_0 - \cos\gamma_1\cos\Phi_0\sin b(t-t_0)],\end{aligned} \tag{79}$$

где $\beta = \varphi_0 + b_1(t-t_0)$. Для вычисления компонент векторов угловых скоростей тел S и S_0 в базисах, неизменно связанных с этими телами, используем формулы (5.32)*, (5.37)*

$$\boldsymbol{\omega}^* = \omega_1^*\mathbf{e}_1^* + \omega_2^*\mathbf{e}_2^* + \frac{n}{J}\mathbf{e}_3, \qquad \boldsymbol{\Omega}^* = \Omega_1^*\mathbf{e}_1^{0*} + \Omega_2^*\mathbf{e}_2^{0*} + \frac{n_0}{J_0}\mathbf{e}_3^0, \tag{80}$$

$$\omega_1^* = \omega_1\cos\varphi + \omega_2\sin\varphi, \qquad \omega_2^* = -\omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi, \tag{81}$$

$$\Omega_1^* = \Omega_1\cos\Phi + \Omega_2\sin\Phi, \qquad \Omega_2^* = -\Omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi. \tag{82}$$

Подставив (72)—(75), (78), (79) в (81), (82), получим

$$\omega_1^* = A_0k\mathrm{ctg}\gamma_1\cos\beta, \qquad \omega_2^* = -A_0k\mathrm{ctg}\gamma_1\sin\beta, \tag{83}$$

$$\Omega_1^* = \frac{A_0k + b\sin\gamma_1}{\sin\gamma_1}\sin\Phi_0, \qquad \Omega_2^* = \frac{A_0k + b\sin\gamma_1}{\sin\gamma_1}\cos\Phi_0, \qquad \Omega_3^* = 0. \tag{84}$$

Из соотношений (84) заключаем, что компоненты тела S_0 в неизменно связанном с ним базисе постоянны, а следовательно, вектор $\boldsymbol{\Omega}^*$ имеет неизменное направление и в неподвижном пространстве.

1. *Лесина М.Е.* О колебаниях оси маховика в теле-носителе // Механика твердого тела. – 1979. – Вып. 11. – С. 32–37.
2. *Лесина М.Е.* Об условиях существования точных решений задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, соединенных сферическим шарниром // Там же. — 1984. — Вып. 16. –С. 32–36.
3. *Лесина М.Е.* Уравнение аксоидов в одном из решений задачи движения двух тел, соединенных сферическим шарниром // Там же. — 1984. – Вып. 16. – С. 36–42.
4. *Лесина М.Е.* Один класс инвариантных соотношений задачи о движении двух связанных тел // Там же. — 1986. – Вып. 18. — С. 47–53.
5. *Лесина М.Е.* К построению полного решения в одном случае интегрируемости задачи о движении двух связанных тел // Там же. — 1987. — Вып. 19. – С. 54–57.
6. *Лесина М.Е.* К построению полного решения задачи об относительном движении системы двух тел // Там же. — 1987. – Вып. 19. – С. 58–68.
7. *Лесина М.Е.* Три новых случая интегрируемости уравнений движения системы двух связанных твердых тел // Там же. – 1989. – Вып. 21. – С. 24–30.
8. *Лесина М.Е.* Аксоиды в одном случае интегрируемости задачи о движении двух тел, связанных сферическим шарниром // Там же. — 1991. — Вып. 23. — С. 43–50.
9. *Лесина М.Е.* Полное решение задачи об одном классе равноаксоидных движений по инерции двух тел, соединенных сферическим шарниром // Там же. — 1991. – Вып. 23. – С. 93–101.
10. *Лесина М.Е.* Гамильтонова форма уравнений задачи о движении двух связанных тел // Там же. – 1993. — Вып. 25. – С. 42–44.
11. *Лесина М.Е.* Сведение к квадратурам общего случая задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, сочлененных упругим сферическим шарниром // Там же. — 1996. — Вып. 26. – С.
12. *Лесина М.Е.* О математической модели гиросферы. – Донецк: ДонГТУ,1996. – 104 с.
13. *Лесина М.Е., Харламов А.П.* Новый подход к построению аксоидов в задаче о движении системы двух связанных тел // Там же. — 1993. – Вып. 25. – С. 30–42.
14. *Лесина М.Е., Харламов П.В.* Случаи интегрируемости уравнений движения по инерции двух тел, соединенных сферическим шарниром // Изв. АН СССР. — Сер. Механика твердого тела. – 1983. – № 4. – С. 26–31.
15. *Лесина М.Е., Шевченко Т.П.* Полное решение задачи о движении двух связанных тел в одном случае интегрируемости // Механика твердого тела. — 1988. – Вып. 20. – С. 71–76.
16. *Лесина М.Е., Шевченко Т.П.* Об одном случае движения двух тел, связанных сферическим шарниром, при нулевом моменте количества движения // Там же. — 1990. – Вып. 22. – С. 48–54.
17. *Лесина М.Е.* Точные решения двух новых задач аналитической динамики систем сочлененных тел. – Донецк: ДонГТУ, 1996. – 238 с.
18. *Харламов М.П., Кононыхин А.Г.* О движении по инерции системы двух твердых тел, связанных сферическим шарниром // Механика твердого тела. — 1980. — Вып. 12. – С. 52–63.

Донецкий национальный техн. ун-т

Получено 18.04.2006