

УДК 531.38

©2006. И.Н. Гашененко

ИЗОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

В задаче о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки изучены бифуркации трехмерных интегральных многообразий (совместных поверхностей уровня интегралов энергии и площадей) внутри невырожденных изоэнергетических поверхностей, гомеоморфных S^4 и $S^2 \times S^2$. Найдены критические значения постоянной площадей, разделяющие топологически неэквивалентные интегральные многообразия, а также их основные фазовые проекции. Введены специальные канонические переменные. Установлена аналогия между различными видами фазовых сечений, используемых в задачах динамики твердого тела.

Введение. Движение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки описывается дифференциальными уравнениями Эйлера–Пуассона, в безразмерных переменных запишем их в виде

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{r}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (1)$$

где $\mathbf{M} = A\boldsymbol{\omega}$ – кинетический момент движущегося тела, $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$ – тензор инерции тела в его неподвижной точке, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость, $\boldsymbol{\gamma}$ – орт силы тяжести, \mathbf{r} – орт, направленный из неподвижной точки к центру тяжести тела. Первые интегралы уравнений (1) определяются следующими формулами:

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\gamma} = h, \quad G = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\gamma} = g, \quad I = \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 1. \quad (2)$$

Фиксируя произвольные значения констант $(h, g) \in \mathbb{R}^2$, будем изучать совместные поверхности уровней первых интегралов (2). Трехмерные компактные интегральные многообразия

$$\mathcal{Q}_{h,g}^3 = \{H = h, G = g, I = 1\} \subset \mathbb{R}^3(\boldsymbol{\omega}) \times \mathbb{R}^3(\boldsymbol{\gamma})$$

(которые, как правило, действительно являются многообразиями [1]) играют важную роль в классификации фазовых траекторий уравнений (1). Траектория, проходящая через точку $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) \in \mathcal{Q}_{h,g}^3$, целиком содержится в $\mathcal{Q}_{h,g}^3$. Следовательно, достаточно грубым, но важнейшим с глобальной точки зрения инвариантом этой траектории является топологический тип $\mathcal{Q}_{h,g}^3$. С помощью приведенного потенциала

$$U_g(\boldsymbol{\gamma}) = \frac{g^2}{2(A\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma})} - \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\gamma}$$

(гладкой функции $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in S^2$ с невырожденными критическими точками) зададим на сфере Пуассона $S^2 = \{|\boldsymbol{\gamma}| = 1\}$ область возможности движения

$$\mathcal{U}_{h,g} = \{U_g(\boldsymbol{\gamma}) \leq h\} \subset S^2.$$

Тогда интегральные многообразия $\mathcal{Q}_{h,g}^3$, как следует из общей теории Смейла [1], стандартным образом надстраиваются над областями возможности движения $\mathcal{U}_{h,g}$. Слой

над произвольной точкой $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in S^2$ гомеоморфен либо окружности S^1 (если $\gamma \in \mathcal{U}_{h,g} \setminus \partial\mathcal{U}_{h,g}$), либо точке S^0 (если $\gamma \in \partial\mathcal{U}_{h,g}$), либо пуст (если $\gamma \notin \mathcal{U}_{h,g}$). Подробное описание топологии интегральных многообразий $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ имеется в работах [1-4].

Фиксированные уровни интегралов (2) ограничивают в пространстве $\mathbb{R}^3(\mathbf{M})$ трехмерную замкнутую область $\mathcal{V}_{h,g}$. Если значения констант h, g заданы, то точка с координатами (M_1, M_2, M_3) всегда принадлежит множеству

$$\mathcal{V}_{h,g} = \{f(\mathbf{M}) \geq 0\} \subset \mathbb{R}^3(\mathbf{M}),$$

где функция $f(\mathbf{M})$ записывается в виде

$$\begin{aligned} f &= (|\mathbf{M}|^2 - g^2)(1 - (T - h)^2) - [\mathbf{M} \cdot \mathbf{r} - (T - h)g]^2 = \\ &= -T^2 |\mathbf{M}|^2 + 2hT |\mathbf{M}|^2 + 2gT (\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{M} \cdot \mathbf{r})^2 + \\ &\quad + |\mathbf{M}|^2 (1 - h^2) - 2hg (\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}) - g^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Функция $f(\mathbf{M})$ имеет непосредственное отношение к уравнению Гесса [5]

$$\frac{1}{2} \frac{d|\mathbf{M}|^2}{dt} = \sqrt{f(\mathbf{M})}. \quad (4)$$

Детальному исследованию свойств $\mathcal{V}_{h,g}$ посвящены работы [6, 7]. Заметим, что любая точка (M_1, M_2, M_3) множества $\mathcal{V}_{h,g}$ является допустимой, т.е. соответствует действительным решениям уравнений (2) с начальными условиями, определяемыми константами h, g .

В этой работе изучается топологическая картина эволюции и перестроек (бифуркаций) интегральных многообразий $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ внутри изоэнергетической поверхности

$$\mathcal{E}_h^4 = \{H = h, I = 1\} \subset \mathbb{R}^3(\mathbf{M}) \times \mathbb{R}^3(\gamma).$$

Изоэнергетическая поверхность \mathcal{E}_h^4 является поверхностью уровня функции Гамильтона H , заданной на множестве $\mathbb{R}^3 \times S^2 = \{I = \gamma \cdot \gamma = 1\} \subset \mathbb{R}^3(\mathbf{M}) \times \mathbb{R}^3(\gamma)$. Известно, что в рассматриваемой задаче о движении твердого тела вокруг неподвижной точки многообразия \mathcal{E}_h^4 неособого уровня энергии h в пространстве $\mathbb{R}^3 \times S^2$ имеют достаточно простую топологию:

$$a) \mathcal{E}_h^4 = \emptyset, \text{ если } h < -1; \quad b) \mathcal{E}_h^4 = S^4, \text{ если } -1 < h < 1; \quad c) \mathcal{E}_h^4 = S^2 \times S^2, \text{ если } h > 1.$$

Далее показано, что изучение однопараметрического семейства интегральных многообразий $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ на каждой изоэнергетической поверхности \mathcal{E}_h^4 может быть наглядно и эффективно проведено методом фазовых сечений, основанном на применении специальных канонических переменных. Найдены бифуркационные значения постоянной площадей g , разделяющие различные типы $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ и их основных проекций – $\mathcal{U}_{h,g} \subset S^2(\gamma)$ и $\mathcal{V}_{h,g} \subset \mathbb{R}^3(\mathbf{M})$.

1. Специальные оси П.В.Харламова. Пусть e_i – собственный вектор оператора инерции A , соответствующий диагональной компоненте A_i . Положение тела в трехмерном координатном евклидовом пространстве задано ортонормированным репером (e_1, e_2, e_3) . Наряду с этим выберем новый ортонормированный базис (e'_1, e'_2, e'_3) так,

что

$$\begin{aligned} e_1' &= \mathbf{r}, \quad e_2' = \frac{1}{|\mathbf{r} \times e_1|} [(\mathbf{r} \times e_1) \cos \alpha + (\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times e_1)) \sin \alpha], \\ e_3' &= e_1' \times e_2' = \frac{1}{|\mathbf{r} \times e_1|} [(\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times e_1)) \cos \alpha - (\mathbf{r} \times e_1) \sin \alpha]. \end{aligned} \quad (5)$$

Угол α соответствует повороту координатных осей, жестко связанных с телом. Целесообразный выбор угла α позволит упростить дифференциальные уравнения движения. Следуя работе [8, §2.6], положим

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2r_1 r_2 r_3 A_1 (A_2 - A_3)}{A_2 (A_3 - A_1) (r_2^2 + r_3^2)^2 + A_1 (A_2 - A_3) (r_3^2 - r_2^2 r_1^2)}. \quad (6)$$

Формулами (5),(6) задано искомое преобразование от главных осей к специальным осям П.В. Харламова. В результате, первая координатная ось проведена через центр масс тела, а вторая и третья направлены так, чтобы интеграл энергии принял вид

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} a_{11} \mathcal{M}_1^2 + \frac{1}{2} a_{22} \mathcal{M}_2^2 + \frac{1}{2} a_{33} \mathcal{M}_3^2 + a_{12} \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2 + a_{13} \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_3 - \nu_1, \quad (7)$$

где \mathcal{M}_i – компоненты кинетического момента \mathcal{M} и ν_i – компоненты единичного вектора вертикали $\boldsymbol{\nu}$ в базисе (e_1', e_2', e_3') . В новых переменных интегралы G, I имеют тот же вид, что и в старых переменных:

$$\mathcal{G} = \mathcal{M} \cdot \boldsymbol{\nu} = g, \quad \mathcal{I} = \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1. \quad (8)$$

Изменение координатного базиса соответствует следующим преобразованиям гирационного тензора и тензора инерции твердого тела:

$$a = RBA^{-1}B^T R^T, \quad \mathcal{A} = a^{-1} = RBA B^T R^T,$$

где

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ \frac{(r_2^2 + r_3^2)}{\sqrt{r_2^2 + r_3^2}} & \frac{r_1 r_2}{\sqrt{r_2^2 + r_3^2}} & \frac{r_1 r_3}{\sqrt{r_2^2 + r_3^2}} \\ 0 & -\frac{r_3}{\sqrt{r_2^2 + r_3^2}} & \frac{r_2}{\sqrt{r_2^2 + r_3^2}} \end{pmatrix}.$$

Следствием соотношения (6) являются равенства

$$a_{23} = a_{32} = 0, \quad \mathcal{A}_{12} \mathcal{A}_{13} - \mathcal{A}_{11} \mathcal{A}_{23} = 0.$$

Рассмотрим простейшие частные случаи. Пусть $\mathbf{r} = (1, 0, 0)$, тогда преобразование подвижного базиса (5) не требуется, так как в исходных переменных $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma})$ гамильтониан имеет вид (7) с коэффициентами $a_{11} = A_1^{-1}, a_{22} = A_2^{-1}, a_{33} = A_3^{-1}, a_{12} = a_{13} = 0$. Случай Лагранжа характеризуется дополнительными условиями $A_2 = A_3 > A_1/2$, следовательно, тогда $a_{22} = a_{33} < 2a_{11}$.

Пусть центр масс тела находится в главной плоскости, $\mathbf{r} = (r_1, r_2, 0)$. В этом случае, в соответствии с (6), положим $\alpha = 0$. Далее находим известные выражения

$$B = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & 0 \\ -r_2 & r_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_1 r_1^2 + A_2 r_2^2 & (A_2 - A_1) r_1 r_2 & 0 \\ (A_2 - A_1) r_1 r_2 & A_1 r_2^2 + A_2 r_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$R = \text{diag}(1, 1, 1), \quad a = \mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} r_1^2 + A_2^{-1} r_2^2 & (A_2^{-1} - A_1^{-1}) r_1 r_2 & 0 \\ (A_2^{-1} - A_1^{-1}) r_1 r_2 & A_1^{-1} r_2^2 + A_2^{-1} r_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3^{-1} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Если распределение масс в твердом теле подчинено условиям Гесса [5]

$$r_1 \sqrt{A_1(A_3 - A_2)} = r_2 \sqrt{A_2(A_1 - A_3)}, \quad r_3 = 0, \quad A_1 > A_3 > A_2, \quad (11)$$

то коэффициенты матриц a, \mathcal{A} записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} a_{11} &= A_1^{-1} + A_2^{-1} - A_3^{-1}, \quad a_{22} = a_{33} = A_3^{-1}, \\ a_{12} = a_{21} &= \sqrt{(A_3^{-1} - A_1^{-1})(A_2^{-1} - A_3^{-1})}, \quad a_{13} = a_{31} = a_{23} = a_{32} = 0; \\ \mathcal{A}_{11} &= A_1 A_2 A_3^{-1}, \quad \mathcal{A}_{22} = A_1 + A_2 - A_1 A_2 A_3^{-1}, \quad \mathcal{A}_{33} = A_3, \\ \mathcal{A}_{12} = \mathcal{A}_{21} &= -A_3^{-1} \sqrt{A_1 A_2 (A_1 - A_3)(A_3 - A_2)}, \quad \mathcal{A}_{13} = \mathcal{A}_{31} = \mathcal{A}_{23} = \mathcal{A}_{32} = 0. \end{aligned}$$

Если распределение масс в твердом теле подчинено условиям Гриоли

$$r_1 \sqrt{A_3 - A_2} = r_2 \sqrt{A_1 - A_3}, \quad r_3 = 0, \quad A_1 > A_3 > A_2, \quad (12)$$

то коэффициенты матриц a, \mathcal{A} имеют вид

$$\begin{aligned} a_{11} &= A_3 A_1^{-1} A_2^{-1}, \quad a_{22} = A_1^{-1} + A_2^{-1} - A_3 A_1^{-1} A_2^{-1}, \quad a_{33} = A_3^{-1}, \\ a_{12} = a_{21} &= A_1^{-1} A_2^{-1} \sqrt{(A_1 - A_3)(A_3 - A_2)}, \quad a_{13} = a_{31} = a_{23} = a_{32} = 0; \\ \mathcal{A}_{11} &= A_1 + A_2 - A_3, \quad \mathcal{A}_{22} = \mathcal{A}_{33} = A_3, \\ \mathcal{A}_{12} = \mathcal{A}_{21} &= -\sqrt{(A_1 - A_3)(A_3 - A_2)}, \quad \mathcal{A}_{13} = \mathcal{A}_{31} = \mathcal{A}_{23} = \mathcal{A}_{32} = 0. \end{aligned}$$

2. Параметризация кривой $\partial\mathcal{U}_{h,g} \subset S^2$ и поверхности $\partial\mathcal{V}_{h,g} \subset \mathbb{R}^3$. Зафиксируем параметры, описывающие распределение масс в твердом теле. Пусть значение константы $h \in (-1, \infty)$ задано, а постоянная площадей g изменяется в допустимых пределах. Исследуем соответствующее этим условиям однопараметрическое семейство кривых $\partial\mathcal{U}_{h,g} \subset S^2$, описываемых уравнением

$$\frac{g^2}{2(\mathcal{A}\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu})} - \nu_1 = h.$$

Это уравнение может быть записано в следующем виде:

$$2(\nu_1 + h)(\mathcal{A}_{11}\nu_1^2 + \mathcal{A}_{22}\nu_2^2 + \mathcal{A}_{33}\nu_3^2 + 2\mathcal{A}_{12}\nu_1\nu_2 + 2\mathcal{A}_{13}\nu_1\nu_3 + 2\mathcal{A}_{23}\nu_2\nu_3) = g^2. \quad (13)$$

Вид кривой $\partial\mathcal{U}_{h,g}$ меняется с изменением g^2 . Следовательно, имеем $\partial\mathcal{U}_{h,g} = \partial\mathcal{U}_{h,-g}$. Введем на сфере Пуассона $S^2 = \{|\boldsymbol{\nu}| = 1\}$ угловые координаты $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ по формулам

$$\nu_1 = \cos \theta, \quad \nu_2 = \sin \theta \sin \varphi, \quad \nu_3 = \sin \theta \cos \varphi. \quad (14)$$

Подставим эти значения в левую часть (13), получим

$$f_1(\theta, \varphi) = 2(\cos \theta + h) [\mathcal{A}_{11} \cos^2 \theta + (\mathcal{A}_{22} \sin^2 \varphi + \mathcal{A}_{33} \cos^2 \varphi + 2\mathcal{A}_{23} \sin \varphi \cos \varphi) \sin^2 \theta + \\ + 2(\mathcal{A}_{12} \sin \varphi + \mathcal{A}_{13} \cos \varphi) \sin \theta \cos \theta].$$

Вид функции f_1 упрощается в специальных случаях, рассмотренных ранее (см. п. 1). Например, в случае Лагранжа функция f_1 зависит только от θ , а при условиях Гриоли (12) получим выражение

$$f_1(\theta, \varphi) = 2(\cos \theta + h)(\mathcal{A}_{11} \cos^2 \theta + \mathcal{A}_{22} \sin^2 \theta + 2\mathcal{A}_{12} \sin \theta \cos \theta \sin \varphi).$$

Особые точки кривых $\partial\mathcal{U}_{h,g}$ найдем из условий

$$\frac{\partial f_1(\theta, \varphi)}{\partial \theta} = \frac{\partial f_1(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} = 0.$$

Точка (h, g) , где h – рассматриваемый уровень энергии, g^2 – одно из критических значений функции $f_1|_h$, принадлежит бифуркационному множеству Σ интегрального отображения $\mathcal{F} = H \times G$.

Рассмотрим важный пример. Пусть $r_1 r_2 r_3 \neq 0$, $A_1 > A_2 > A_3$. Тогда бифуркационное множество $\Sigma \subset \mathbb{R}^2(h, g)$ состоит из ветвей плоской кривой, описываемой уравнениями

$$h = \left(\sum_{i=1}^3 \frac{r_i^2}{(A_i - \sigma)^2} \right)^{-1/2} \sum_{i=1}^3 \frac{(3A_i - 2\sigma)r_i^2}{2(A_i - \sigma)^2}, \quad g = \left(\sum_{i=1}^3 \frac{r_i^2}{(A_i - \sigma)^2} \right)^{-3/4} \sum_{i=1}^3 \frac{A_i r_i^2}{(A_i - \sigma)^2},$$

где параметр $\sigma \in (-\infty, A_3) \cup (A_3, A_2) \cup (A_2, A_1) \cup (A_1, \infty)$. Несложно проверить, что при заданных значениях величин A_i, r_i и энергии $h > -1$ первое из этих уравнений допускает не более десяти различных решений $\sigma = \sigma_k$, $k = \overline{1, 10}$. Следовательно, при любой фиксированной энергии вращающегося тела имеется не более десяти критических значений постоянной площадей $g(\sigma_k) \geq 0$, когда у функции U_g существуют критические точки. Результаты исследования бифуркационного множества классической задачи о движении твердого тела можно найти в работах [2–4, 7, 9].

На рис. 1, *a–в* показаны примеры расположения кривых $\partial\mathcal{U}_{h,g}$ на единичной сфере. Параметры тела $A = \text{diag}(2, 1, 1.1)$, $\mathbf{r} = (\sqrt{9/10}, \sqrt{1/10}, 0) \approx (0.948683, 0.316228, 0)$ в этом случае удовлетворяют условиям Гриоли (12).

Итак, при заданных параметрах тела A_{ij} и заданной энергии $h > -1$ для кривых $\partial\mathcal{U}_{h,g} \subset S^2$ характерны следующие свойства:

- кривые $\partial\mathcal{U}_{h,g}$, соответствующие различным значениям g^2 , не пересекаются;
- особые точки кривых $\partial\mathcal{U}_{h,g}$ соответствуют равномерным вращениям тела вокруг вертикали;

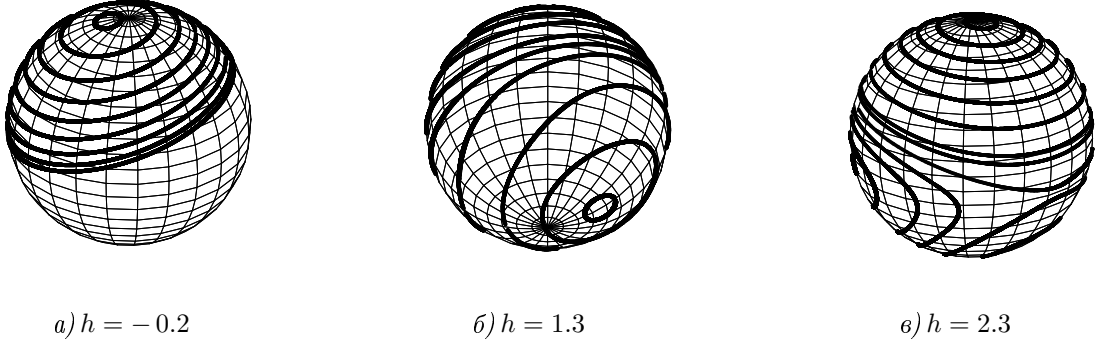


Рис. 1. Семейства кривых $\partial\mathcal{U}_{h,g}$ на сфере Пуассона.

- разность числа минимаксных и числа седловых точек приведенного потенциала U_g равна двум (эйлеровой характеристике сферы);
- для значений энергии $h \in (-1, 1)$ кривые $\partial\mathcal{U}_{h,g}$ заполняют только ту часть сферы, где выполнено неравенство $\nu_1 + h \geq 0$;
- при любом значении $h > 1$ функция U_g имеет не менее двух, но не более десяти критических точек на S^2 . Случай Лагранжа является исключением, тогда все критические точки функции U_g с общим критическим значением могут составить окружность.

Получим параметрическое представление двумерной поверхности

$$\partial\mathcal{V}_{h,g} = \{f(\mathbf{M}) = 0\} \subset \mathbb{R}^3(\mathbf{M}).$$

С этой целью воспользуемся результатами работы [7, Предложения 4.1, 6.1]. На сфере Пуассона определим множество

$$\tilde{\mathcal{U}}_{h,g} = \{\tilde{U}_g(\boldsymbol{\nu}) \leq h\} \subset S^2,$$

где

$$\tilde{U}_g = \frac{g^2[a_{11}(a_{22}\nu_2^2 + a_{33}\nu_3^2) - (a_{12}\nu_2 + a_{13}\nu_3)^2]}{2[a_{11}(\nu_2^2 + \nu_3^2)^2 - 2(a_{12}\nu_2 + a_{13}\nu_3)(\nu_2^2 + \nu_3^2)\nu_1 + (a_{22}\nu_2^2 + a_{33}\nu_3^2)\nu_1^2]} - \nu_1.$$

В предположении $\boldsymbol{\nu} \neq \pm \mathbf{r}$ найдем соответствие между точками поверхности $\partial\mathcal{V}_{h,g}$ и точками ее образа $\tilde{\mathcal{U}}_{h,g}$ на единичной сфере. Пусть точка $\mu \in \partial\mathcal{V}_{h,g}$ имеет координаты (μ_1, μ_2, μ_3) , тогда положим

$$\begin{aligned} \mu_1 &= g u_0/u - (\nu_2^2 + \nu_3^2)\sqrt{2(h - \tilde{U}_g)/u}, \\ \mu_2 &= g u_1\nu_2/u + \nu_1\nu_2\sqrt{2(h - \tilde{U}_g)/u}, \quad \mu_3 = g u_1\nu_3/u + \nu_1\nu_3\sqrt{2(h - \tilde{U}_g)/u}, \end{aligned} \quad (15)$$

где зависящие от ν_i коэффициенты u_0, u_1, u имеют вид

$$\begin{aligned} u_0 &= (a_{22}\nu_2^2 + a_{33}\nu_3^2)\nu_1 - (a_{12}\nu_2 + a_{13}\nu_3)(\nu_2^2 + \nu_3^2), \\ u_1 &= a_{11}(\nu_2^2 + \nu_3^2) - (a_{12}\nu_2 + a_{13}\nu_3)\nu_1, \end{aligned}$$

$$u = a_{11}(\nu_2^2 + \nu_3^2)^2 - 2(a_{12}\nu_2 + a_{13}\nu_3)(\nu_2^2 + \nu_3^2)\nu_1 + (a_{22}\nu_2^2 + a_{33}\nu_3^2)\nu_1^2.$$

Непосредственной подстановкой $\mathcal{M}_i = \mu_i$, $i = 1, 2, 3$, убеждаемся, что выражения (15) удовлетворяют трем первым интегралам (2) и обращают в нуль функцию (3). Далее заменой (14) получим уравнения поверхности $\partial\mathcal{V}_{h,g}$ в параметрической форме.

На рис. 2, *a* – *в* показаны сечения поверхностей $\partial\mathcal{V}_{h,g}$ плоскостями $\varphi = \pi/2$. В этом примере параметры тела

$$A = \text{diag}(2, 1, 1.1), \quad \mathbf{r} = (\sqrt{9/10}, \sqrt{1/10}, 0) \approx (0.948683, 0.316228, 0)$$

удовлетворяют условиям (12). Верхние рисунки от нижних отличаются знаком радикала в выражениях (15). Граничные эллипсоиды соответствуют значениям $\boldsymbol{\nu} = (\pm 1, 0, 0)$ в этих формулах. Пунктирными линиями отмечены направления двух специальных осей. Параметр g меняется в допустимых пределах, каждому его значению соответствует отдельная кривая на рис. 2. Аналогичные рисунки могут быть построены для любого значения $\varphi = \text{const}$.

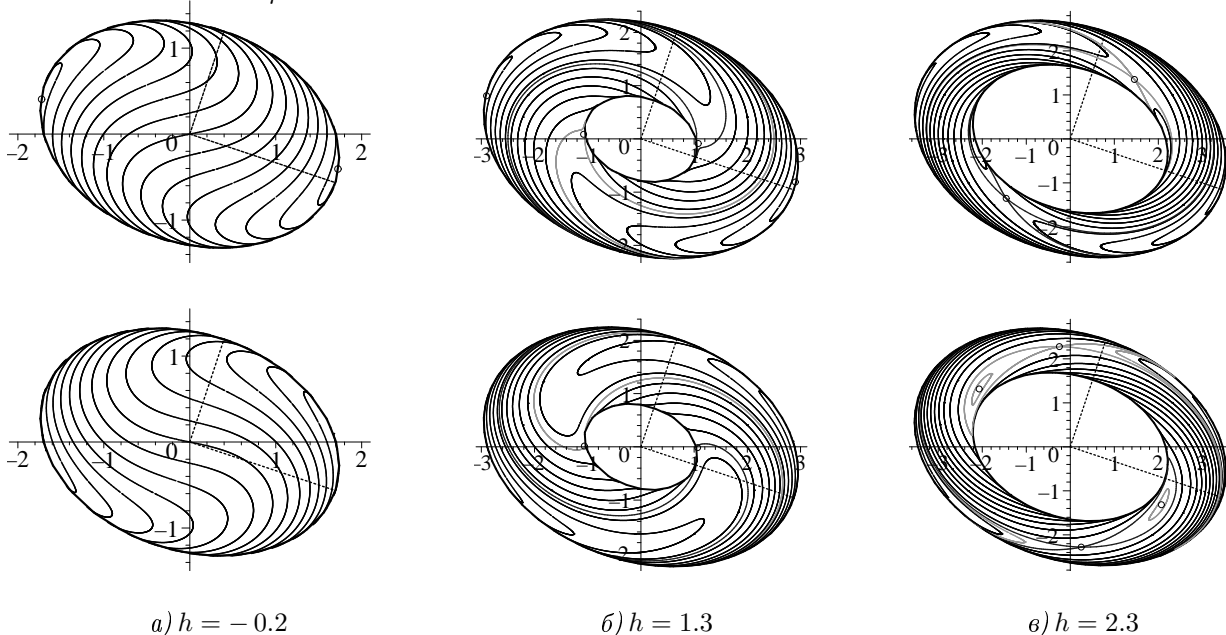


Рис. 2. Сечения поверхностей $\partial\mathcal{V}_{h,g} \subset \mathbb{R}^3$ плоскостями $\varphi = \pi/2$.

3. Углы Эйлера и канонические переменные для специальных осей. Найдем выражения фазовых переменных \mathcal{M}_i, ν_i через обобщенные импульсы $p_\theta, p_\varphi, p_\psi$ и углы Эйлера θ, φ, ψ :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &= p_\varphi, \quad \mathcal{M}_2 = \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} (p_\psi - p_\varphi \cos \theta) + p_\theta \cos \varphi, \\ \mathcal{M}_3 &= \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} (p_\psi - p_\varphi \cos \theta) - p_\theta \sin \varphi; \\ \nu_1 &= \cos \theta, \quad \nu_2 = \sin \theta \sin \varphi, \quad \nu_3 = \sin \theta \cos \varphi. \end{aligned} \tag{16}$$

Положим $\theta \in (0, \pi)$, $\varphi, \psi \in [0, 2\pi)$. Обратное к (16) преобразование задано формулами

$$\begin{aligned} p_\varphi &= \mathcal{M}_1, \quad \varphi = \arctg(\nu_2/\nu_3), \quad p_\psi = \mathcal{M} \cdot \boldsymbol{\nu}, \\ p_\theta &= \frac{\mathcal{M}_2\nu_3 - \mathcal{M}_3\nu_2}{\sqrt{\nu_2^2 + \nu_3^2}}, \quad \theta = \arccos \nu_1. \end{aligned} \tag{17}$$

Подстановкой соотношений (16) в (7) получим выражение

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} = & \frac{1}{2} a_{11} p_\varphi^2 + \frac{1}{2} a_{22} \left(\frac{\sin \varphi}{\sin \theta} (p_\psi - p_\varphi \cos \theta) + p_\theta \cos \varphi \right)^2 + \\
 & + \frac{1}{2} a_{33} \left(\frac{\cos \varphi}{\sin \theta} (p_\psi - p_\varphi \cos \theta) - p_\theta \sin \varphi \right)^2 + \\
 & + a_{12} p_\varphi \left(\frac{\sin \varphi}{\sin \theta} (p_\psi - p_\varphi \cos \theta) + p_\theta \cos \varphi \right) + \\
 & + a_{13} p_\varphi \left(\frac{\cos \varphi}{\sin \theta} (p_\psi - p_\varphi \cos \theta) - p_\theta \sin \varphi \right) - \cos \theta.
 \end{aligned} \tag{18}$$

В канонических переменных уравнение Гесса (4) примет вид

$$\frac{1}{2} \frac{d|\mathcal{M}|^2}{dt} = -p_\theta \sin \theta, \tag{19}$$

где

$$|\mathcal{M}|^2 = p_\varphi^2 + p_\theta^2 + (p_\psi - p_\varphi \cos \theta)^2 / \sin^2 \theta.$$

Предложенный А. Пуанкаре метод фазовых сечений играет важную роль в современных исследованиях динамики гамильтоновых систем [9]. Эффективность такого исследования существенно зависит от удачного выбора секущей поверхности. Вид правой части уравнения (19) позволяет задать глобальное фазовое сечение S_1 для уравнений вращающегося тела в терминах канонических переменных:

$$S_1 = \{(p_\theta, p_\varphi, \theta, \varphi) : p_\theta = 0, \theta \in (0, \pi)\} \cup \{(p_\theta, p_\varphi, \theta, \varphi) : \theta = 0\} \cup \{(p_\theta, p_\varphi, \theta, \varphi) : \theta = \pi\}.$$

Выражение (18) теряет смысл при $\theta = 0, \pi$, но тогда следует доопределить гамильтониан \mathcal{H} по непрерывности. Любая траектория либо пересекает поверхность S_1 , либо целиком ей принадлежит. Как правило, траектория многократно пересекает S_1 . Действительная функция времени $|\mathcal{M}|^2$ достигает локального экстремума в момент контакта траектории с поверхностью S_1 . В исключительных случаях траектория может целиком принадлежать S_1 . В работе [10] перечислены все возможные варианты, когда функция постоянна вдоль какой-либо траектории динамической системы (1). Эти случаи суть: решения Эйлера ($\mathbf{r} = 0$), равномерные вращения вокруг вертикали, частные решения при условиях Лагранжа и Гесса, соответствующие прецессионным движениям твердого тела. Заметим, что при равномерных вращениях тела и прецессионных движениях гироскопов Лагранжа и Гесса выполнено равенство $p_\theta = 0$.

Траектории могут пересекать все компоненты S_1 , либо некоторые из них. Приведем пример, когда $p_\theta \neq 0$ в процессе движения. Для движений физического маятника при условиях $r_3 = 0, g = 0$ выполнены следующие соотношения:

$$p_\varphi = p_\psi = 0, \quad \cos \varphi = 0, \quad \frac{1}{2} a_{33} p_\theta^2 - \cos \theta = h, \quad \dot{\theta}^2 = 2(h + \cos \theta) a_{33}.$$

При ограничении $h > 1$ находим $p_\theta \neq 0$, следовательно, траектории быстро вращающегося маятника не пересекают множество

$$S_1^{(1)} = \{(p_\theta, p_\varphi, \theta, \varphi) : p_\theta = 0, \theta \in (0, \pi)\}.$$

4. Переменные Андуайе–Депри для специальных осей. Используем следующие обозначения: $OXYZ$ – неподвижный триэдр с началом в точке подвеса, $Oxyz$ – специальные оси, полученные преобразованием (5), (6), Σ – плоскость, перпендикулярная вектору кинетического момента \mathcal{M} и проходящая через точку закрепления тела. Тогда переменные Андуайе–Депри таковы: I_1 – проекция вектора \mathcal{M} на подвижную ось Ox , I_2 – модуль вектора кинетического момента \mathcal{M} , I_3 – проекция вектора \mathcal{M} на неподвижную ось OZ (вертикаль), φ_1 – угол между осью Ox и линией пересечения Σ с Oyz , φ_2 – угол между линиями пересечения Σ с плоскостями Oyz и OXY , φ_3 – угол между осью OX и линией пересечения Σ с OXY . Сопряженные с I_1, I_2, I_3 переменные $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ являются углами, изменяющимися по модулю 2π . Зависимость фазовых переменных от канонических переменных Андуайе–Депри выражена следующими формулами:

$$\mathcal{M}_1 = I_1, \quad \mathcal{M}_2 = \sqrt{I_2^2 - I_1^2} \sin \varphi_1, \quad \mathcal{M}_3 = \sqrt{I_2^2 - I_1^2} \cos \varphi_1, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \cos \eta \cos \zeta - \sin \eta \sin \zeta \cos \varphi_2, \\ \nu_2 &= (\sin \eta \cos \zeta + \cos \eta \sin \zeta \cos \varphi_2) \sin \varphi_1 + \sin \zeta \cos \varphi_1 \sin \varphi_2, \\ \nu_3 &= (\sin \eta \cos \zeta + \cos \eta \sin \zeta \cos \varphi_2) \cos \varphi_1 - \sin \zeta \sin \varphi_1 \sin \varphi_2, \end{aligned} \quad (21)$$

где $\cos \eta = I_1/I_2$, $\cos \zeta = I_3/I_2$. Формулы обратного преобразования таковы:

$$\begin{aligned} I_1 &= \mathcal{M}_1, \quad \varphi_1 = \operatorname{arctg}(\mathcal{M}_2/\mathcal{M}_3), \quad I_3 = \mathcal{M} \cdot \boldsymbol{\nu}, \\ I_2 &= |\mathcal{M}|, \quad \varphi_2 = \arcsin \left(\frac{(\mathcal{M}_3 \nu_2 - \mathcal{M}_2 \nu_3)}{\sqrt{\mathcal{M}_2^2 + \mathcal{M}_3^2}} \frac{|\mathcal{M}|}{|\mathcal{M} \times \boldsymbol{\nu}|} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Соотношения (21) могут быть записаны в векторной форме

$$\boldsymbol{\nu} = \mathcal{M} \frac{I_3}{I_2^2} + (\mathcal{M} \times \mathbf{r}) \frac{\sqrt{I_2^2 - I_3^2}}{I_2 \sqrt{I_2^2 - I_1^2}} \sin \varphi_2 + \mathcal{M} \times (\mathcal{M} \times \mathbf{r}) \frac{\sqrt{I_2^2 - I_3^2}}{I_2^2 \sqrt{I_2^2 - I_1^2}} \cos \varphi_2. \quad (23)$$

Гамильтониан рассматриваемой механической системы является функцией переменных Андуайе–Депри

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2} a_{11} I_1^2 + \frac{1}{2} a_{22} (I_2^2 - I_1^2) \sin^2 \varphi_1 + \frac{1}{2} a_{33} (I_2^2 - I_1^2) \cos^2 \varphi_1 + a_{12} I_1 \sqrt{I_2^2 - I_1^2} \sin \varphi_1 + \\ &+ a_{13} I_1 \sqrt{I_2^2 - I_1^2} \cos \varphi_1 - \frac{I_1 I_3}{I_2^2} + \frac{1}{I_2^2} \sqrt{I_2^2 - I_3^2} \sqrt{I_2^2 - I_1^2} \cos \varphi_2. \end{aligned} \quad (24)$$

Соответствующие (24) уравнения Гамильтона имеют стандартный вид

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_i}, \quad \dot{I}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi_i}, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (25)$$

Переменная φ_3 является циклической координатой, так как не входит явно в выражение \mathcal{H} . Из (25) находим

$$I_3 = \text{const}, \quad \dot{\varphi}_3 = -\frac{I_1}{I_2^2} - \frac{I_3 \sqrt{I_2^2 - I_1^2}}{I_2^2 \sqrt{I_2^2 - I_3^2}} \cos \varphi_2. \quad (26)$$

Уравнения (26) достаточно просто записываются с помощью фазовых переменных:

$$I_3 = g, \quad \dot{\varphi}_3 = \frac{g \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{M}|^2 - g^2} \quad \text{или} \quad \dot{\varphi}_3 = \frac{g \nu_1 - \mathcal{M}_1}{|\mathcal{M}|^2 - g^2}.$$

Запишем уравнение Гесса (4) в канонических переменных Андуайе–Депри

$$\frac{1}{2} \frac{d|\mathcal{M}|^2}{dt} \equiv I_2 \frac{dI_2}{dt} = \frac{\sqrt{I_2^2 - I_1^2} \sqrt{I_2^2 - I_3^2}}{I_2} \sin \varphi_2. \quad (27)$$

Сопоставлением уравнений (19), (27) приходим к выводу, что глобальное фазовое сечение может быть задано в виде

$$S_2 = \{(I_i, \varphi_i) : \varphi_2 = 0\} \cup \{(I_i, \varphi_i) : \varphi_2 = \pi\} \cup \{(I_i, \varphi_i) : I_2 = |I_1|\} \cup \{(I_i, \varphi_i) : I_2 = |I_3|\}.$$

Изучение движения твердого тела с помощью фазовой плоскости с координатами (φ_1, I_1) было начато А. Депри в работе [11]. В дальнейших исследованиях широкое распространение получили сечения $\varphi_2 = \pi/2, \pi$ и координаты $(\varphi_1, I_1/I_2)$, подробнее см. в [9, 12].

Любая траектория гамильтоновой системы (25) либо пересекает поверхность S_2 , либо целиком ей принадлежит. Если траектория целиком принадлежит S_2 , то тогда $I_{1-3} = \text{const}$, $\dot{\varphi}_3 = \text{const}$. При фиксированных значениях констант h, g поверхности S_1, S_2 аналогичны фазовому сечению $\mathcal{P}_{h,g}^2$, введенному в работе [7].

1. Смейл С. Топология и механика// Успехи мат. наук. – 1972. – 27, вып. 2. – С. 77–121.
2. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. – Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 1999. – Т. 2. – 448 с.
3. Каток С.Б. Бифуркационные множества и интегральные многообразия в задаче о движении тяжелого твердого тела// Успехи мат. наук. – 1972. – 27, вып. 2. – С. 126–132.
4. Гашененко И.Н. Интегральные многообразия в задаче о движении тяжелого твердого тела// Механика твердого тела. – 2003. – Вып. 33. – С. 20–32.
5. Hess W. Über die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue particuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt// Math. Ann. – 1890. – 37. – S. 153–181.
6. Gashenenko I.N. Angular velocity of the Kovalevskaya top// Regular and Chaotic Dynamics. – 2000. – 5, № 1. – P. 104–113.
7. Gashenenko I.N., Richter P.H. Enveloping surfaces and admissible velocities of heavy rigid bodies// Int. J. Bifurcation and Chaos. – 2004. – 14, № 8. – P. 2525–2553.
8. Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-во Новосибир. ун-та, 1965. – 221 с.
9. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос – М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2005. – 576 с.
10. Горр Г.В., Илюхин А.А. Случай постоянства модуля момента количества движения гиростата// Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 9–15.
11. Депри А. Изучение свободного вращения твердого тела около неподвижной точки с помощью фазовой плоскости// Механика. Сб. переводов. – 1968. – № 2. – С. 3–9.
12. Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. Chaotic motions and transition to stochasticity in the classical problem of the heavy rigid body with a fixed point// Nuovo Cimento. – 1981. – 61 B, № 1. – P. 1–20.