ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2005. Вып. 35

УДК 517.929 : 531.36

©2005. **С.В. Павликов**

О СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассматривается задача о стабилизации движения управляемой системы с запаздывающей обратной связью. Решение находится с помощью теорем со знакопостоянными функционалами Ляпунова. В качестве примеров приводятся решение задачи о стабилизации положения равновесия управляемой линейной нестационарной механической системы с одной степенью свободы и решение задачи о стабилизации неустойчивого стационарного вращательного движения твердого тела вокруг средней главной оси инерции.

1. Постановка задачи. Основные определения. Пусть $R =]-\infty, +\infty[$ есть действительная ось, $R^+ = [0, +\infty[$, R^n есть действительное линейное пространство n-векторов $\boldsymbol{x}$ с нормой $|\boldsymbol{x}|$, $h > 0$ – некоторое действительное число, $C_{[\alpha,\beta]}$ – банахово пространство непрерывных функций $\boldsymbol{\varphi} : [\alpha, \beta] \to R^n$ с нормой $\|\boldsymbol{\varphi}\| = \sup\left(|\boldsymbol{\varphi}(s)|, \alpha \le s \le \beta\right)$, $C_H = \left\{\boldsymbol{\varphi} \in C_{[-h,0]} : \|\boldsymbol{\varphi}\| < H\right\}$, для непрерывной функции $\boldsymbol{x} :]-\infty, +\infty[\to R^n$ и каждого $t \in R$ функция $\boldsymbol{x}_t \in C_{[-h,0]}$ определяется равенством $\boldsymbol{x}_t\,(s) = \boldsymbol{x}(t+s)$ для $-h \le s \le 0$, под $\dot{x}(t)$ будем понимать правостороннюю производную.

Рассматривается управляемая система, движение которой описывается функционально-дифференциальным уравнением запаздывающего типа:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}_t)), \tag{1}$$

здесь $\boldsymbol{x}_t \in C_H, \boldsymbol{x}(t) \in R^n, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}_t) \in U, \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$, где $\boldsymbol{u} : R^+ \times C_H \to R^m$ есть управляющее воздействие, U – некоторый класс допустимых непрерывных управлений; $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{u}) : R^+ \times C_H \times R^m \to R^n, \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) \equiv \boldsymbol{0}$, есть непрерывное отображение, удовлетворяющее в $R^+ \times C_H \times R^m$ условиям существования, единственности и непрерывной зависимости решений (1) от начальных данных.

Определение 1. Управляющее воздействие $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^0(t, \boldsymbol{x}_t)$ называется стабилизирующим, если оно обеспечивает асимптотическую устойчивость нулевого решения $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ уравнения (1).

Рассмотрим применение теорем из [1, 2] к решению поставленной задачи о стабилизации. Пусть при некотором $\boldsymbol{u}^0 \in U$ движение управляемой системы описывается уравнением

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}_0(t, \boldsymbol{x}_t), \qquad \boldsymbol{f}_0(t, \boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{u}^0(t, \boldsymbol{\varphi})). \tag{2}$$

При этом правая часть $\boldsymbol{f}_0(t, \boldsymbol{\varphi})$ удовлетворяет условиям предкомпактности, существования и единственности решений как самого уравнения, так и предельных к нему уравнений [2, 3]

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}_0^*(t, \boldsymbol{x}_t), \tag{3}$$

где $\boldsymbol{f}_0^*$ есть предельная точка семейства сдвигов $\{\boldsymbol{f}_0^\tau, \boldsymbol{f}_0^\tau(t, \boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{f}_0(\tau + t, \boldsymbol{\varphi}), \tau \in R^+\}$ в некотором пространстве F непрерывных функций $\boldsymbol{f} : R^+ \times \Gamma \to R^n$, $\Gamma \subset C_H$ [3].

Будем далее также использовать определения и оценки, введенные в работе [2].

Для некоторого непрерывного функционала $V : R^+ \times C_H \to R$ через $\dot{V}(\alpha, \boldsymbol{\varphi})$ определим верхнюю правостороннюю производную в силу уравнения (2) в точке $(\alpha, \boldsymbol{\varphi}) \in$ $\in R^+ \times C_H$. Допустим, что для этой производной имеет место оценка

$$\dot{V}(\alpha, \boldsymbol{\varphi}) \leq -W(\alpha, \boldsymbol{\varphi}) \leq 0,$$

где функционал $W : R^+ \times C_H \to R^+$ ограничен, равномерно непрерывен на каждом множестве $R^+ \times K$ для каждого компакта $K \subset C_H$.

Соответственно можно определить семейство $\{W^* : R^+ \times \Gamma \to R^+\}$ предельных к W функционалов W^*, предельную пару $(\boldsymbol{f}_0^*, W^*)$ и предельное множество $V_\infty^{-1}(t, c)$ [2].

2. Теоремы о стабилизации. На основании теорем об асимптотической устойчивости из работ [1,2] имеем следующие достаточные условия стабилизируемости положения $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ системы (1).

Теорема 1. Предположим, что существуют функционал Ляпунова $V(t, \boldsymbol{\varphi}) : R^+ \times$ $\times C_H \to R^+$ и управление $\boldsymbol{u}^0(t, \boldsymbol{x}_t) \in U$ такие, что выполняются условия:

1) $a_1(|\boldsymbol{\varphi}(0)|) \leq V(t, \boldsymbol{\varphi}) \leq a_2(\|\boldsymbol{\varphi}\|), \dot{V}(t, \boldsymbol{\varphi}) \leq -W(t, \boldsymbol{\varphi}) \leq 0 \ \forall (t, \boldsymbol{\varphi}) \in R^+ \times C_H$;

2) для любой предельной пары $(\boldsymbol{f}_0^*, W^*)$ множество $\{W^*(t, \boldsymbol{\varphi}) = 0\}$ не содержит решений уравнения $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}_0^*(t, \boldsymbol{x}_t)$, кроме нулевого $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Тогда $\boldsymbol{u}^0(t, \boldsymbol{x}_t)$ есть стабилизирующее управление. При этом решение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ уравнения (1) равномерно асимптотически устойчиво.

Теорема 2. Предположим, что для системы (1) можно найти управляющее воздействие $\boldsymbol{u}^0 \in U$ и функционал $V = V(t, \boldsymbol{\varphi})$ такие, что:

1) $|V(t, \boldsymbol{\varphi})| \leq a_1(\|\boldsymbol{\varphi}\|)$ для $(t, \boldsymbol{\varphi}) \in R^+ \times C_H$, $V(t, \boldsymbol{\varphi}) \geq 0$ для каждого $t \in R^+$ и каждой функции $\boldsymbol{\varphi} \in C_H$ такой, что $\|\boldsymbol{\varphi}\| = |\boldsymbol{\varphi}(0)|$;

2) производная функционала V в силу системы (2) $\dot{V}(t, \boldsymbol{\varphi}) \leq -W(t, \boldsymbol{\varphi}) \leq 0$ для всех $(t, \boldsymbol{\varphi}) \in R^+ \times \{\boldsymbol{\varphi} \in C_H : V(t, \boldsymbol{\varphi}) > 0, \|\boldsymbol{\varphi}\| = |\boldsymbol{\varphi}(0)|\}$;

3) для каждой предельной пары $(\boldsymbol{f}_0^*, W^*)$ множество$\{V_\infty^{-1}(t, c) : c = \text{const} >$ $> 0\} \bigcap \{W^*(t, \boldsymbol{\varphi}) = 0\}$ не содержит решений $\boldsymbol{x}^*(t, \boldsymbol{\varphi})$ уравнения (3);

4) решение $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ асимптотически устойчиво относительно множества $\{V_\infty^{-1}(t, c) :$ $c \leq 0\}$ равномерно по совокупности предельных уравнений (3).

Тогда управляющее воздействие $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^0(t, \boldsymbol{\varphi})$ решает задачу о стабилизации положения $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ системы (1).

Пример 1. Задача о стабилизации положения равновесия линейной механической системы с одной степенью свободы, описываемой уравнением

$$\ddot{x} = p(t)x - f(t)\dot{x} + u, \tag{4}$$

где $p(t)$ и $f(t)$ есть ограниченные равномерно непрерывные по $t \in R^+$, а u есть управляющее воздействие, пропорциональное отклонению x, определяемому в цепи обратной связи с запаздыванием $\tau = \tau(t)$,

$$u(t, x_t) = -k(t)x(t - \tau(t)), \quad 0 \leq \tau(t) \leq h > 0, \tag{5}$$

где $k(t)$ есть некоторая равномерно непрерывная функция. Уравнением типа (4) может описываться, например, в линейном приближении движение математического маятника в вязкой среде вблизи его неустойчивого положения равновесия, когда его точка подвеса совершает вертикальные колебания, управляемые колебания такого маятника и т.д.

В данной постановке уравнение (4) приводится к виду

$$\ddot{x}(t) = p(t)x(t) - f(t)\dot{x}(t) - k(t)x(t - \tau(t)).$$

Положим для удобства $x_1 = x,\ x_2 = \dot{x}$ и приведем это уравнение к системе

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = (p(t) - k(t))x_1(t) - f(t)x_2(t) + k(t) \int\limits_{-\tau(t)}^{0} x_2(t+s)ds. \end{cases} \tag{6}$$

Допустим, что коэффициент усиления $k(t)$ определяется из условий

$$\begin{cases} 0 < \alpha_0 \le \omega(t) = k(t) - p(t) \le \alpha_1, \quad \alpha_0, \alpha_1 - \mathrm{const}, \\ \dfrac{f(t)}{\omega(t)} + \dfrac{\dot{\omega}(t)}{2\omega^2(t)} \ge \mu_0, \quad \mu_0 > hL, \quad L = \sup\limits_{t \ge 0} \left(\dfrac{|k(t)|}{\omega(t)} \right). \end{cases} \tag{7}$$

Система, предельная к системе (6), имеет аналогичный вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -\omega^*(t)x_1(t) - f^*(t)x_2(t) + k^*(t) \int\limits_{-\tau^*(t)}^{0} x_2(t+s)ds, \end{cases} \tag{8}$$

где $\omega^*(t), f^*(t), k^*(t), \tau^*(t)$ есть коэффициенты, предельные к соответствующим коэффициентам из (6). В частности, $\omega^*(t) = \lim\limits_{t_n \to +\infty} \omega(t_n + t)$, и значит, $0 < \alpha_0 \le \omega^*(t) \le \alpha_1$ для всех $t \in R$. Для производной функционала $2V(t, \varphi_1, \varphi_2) = \dfrac{h}{\omega(t)}\varphi_2^2(0) + h\varphi_1^2(0) +$ $+\mu_0 \int\limits_{-h}^{0} \int\limits_{-s}^{0} \varphi_2^2(u)duds$ в силу системы (6) можно из неравенств (7) найти оценку

$$\dot{V}(t, \varphi_1, \varphi_2) = \left(-\frac{f(t)}{\omega(t)} - \frac{\dot{\omega}(t)}{2\omega^2(t)} \right) h\varphi_2^2(0) + \frac{k(t)}{\omega(t)} h \int\limits_{-\tau(t)}^{0} \varphi_2(0)\varphi_2(s)ds +$$

$$+\frac{\mu_0}{2} \int\limits_{-h}^{0} (\varphi_2^2(0) - \varphi_2^2(s))ds \le - \int\limits_{-h}^{0} \left(\frac{\mu_0}{2}\varphi_2^2(0) - hL\varphi_2(0)\varphi_2(s) + \frac{\mu_0}{2}\varphi_2^2(s) \right) ds \le$$

$$\le - \int\limits_{-h}^{0} \left(\frac{\mu_0 - hL}{2}(\varphi_2^2(0) + \varphi_2^2(s)) + hL(\varphi_2(0) - \varphi_2(s))^2 \right) ds \le -W(\varphi_1, \varphi_2) \le 0,$$

где $W(\varphi_1, \varphi_2) = \dfrac{\mu_0 - hL}{2} \int\limits_{-h}^{0} (\varphi_2^2(0) + \varphi_2^2(s))ds.$

Множество $\{W(\varphi_1, \varphi_2) = 0\} \equiv \{\varphi_2(s) = 0, -h \leq s \leq 0\}$. Решение предельной системы (8) $(x_1(t), x_2(t))$, содержащееся во множестве $\{W(\varphi_1, \varphi_2) = 0\}$, есть $x_2(t) \equiv \equiv 0$. Подставляя $x_2(t) \equiv 0$ в систему (8), находим, что единственным таким решением возможно является только решение $x_1(t) = x_2(t) \equiv 0$.

На основании теоремы 1 получаем, что управляющее воздействие (5) решает задачу о стабилизации положения $\dot{x} = x = 0$ системы (4).

Условия (7) для случая $k(t) = k_0 = \text{const} > 0$ в грубой форме могут быть представлены в виде условий для определения коэффициента усиления k_0 и максимального интервала запаздывания h

$$k_0 = p_2 - \frac{1}{2}\frac{p_3}{f_1} + \frac{\varepsilon}{f_1}, \quad h < \frac{\varepsilon(k_0 - p_2)}{k_0(k_0 - p_1)^2}, \quad \text{где } \varepsilon > 0 \ - \ \text{произвольное число},$$

$$f_1 = \min_{t \geq 0} f(t) > 0, \quad p_1 = \min_{t \geq 0} p(t), \quad p_2 = \max_{t \geq 0} p(t), \quad p_3 = \min_{t \geq 0} \dot{p}(t).$$

Пример 2. Задача о стабилизации неустойчивого стационарного вращательного движения твердого тела вокруг средней оси инерции.

Уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки допускают стационарное вращательное движение вокруг главной оси (примем ее за ось Oz), неустойчивое, если эта ось средняя, $B > C > A$. Рассмотрим задачу о стабилизации такого движения, а именно, движения вокруг оси Oz, $p = q = 0$, $r = r_0 = \text{const} > 0$. Уравнения возмущенного движения под действием управляющих воздействий в линейном приближении могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{(B - C)}{A} r_0 x_2 + u_1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{(C - A)}{B} r_0 x_1 + u_2, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = u_3. \end{cases} \tag{9}$$

Задача о стабилизации положения $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ этой системы решается управляющими воздействиями

$$u_1 = -k_1 x_1(t - \tau(t)), \quad u_2 = -k_1 x_2(t - \tau(t)), \quad u_3 = -k_2 x_3(t - \tau(t)), \tag{10}$$

где $\tau(t)$, $0 \leq \tau(t) \leq h$, есть запаздывание в системе управления, k_1 и k_2 – коэффициенты усиления, выбираемые из условий

$$\begin{aligned} & k_1 > \frac{r_0 \mu_1 \mu_2}{AB}, \quad 2hk_1 \left(\frac{r_0 \mu_1 \mu_2}{AB} + k_1 \right) < k_1 - \frac{r_0 \mu_1 \mu_2}{AB}, \\ & k_2 > 0, \quad 2k_2 h < 1, \quad \mu_1 = \sqrt{A(C - A)}, \quad \mu_2 = \sqrt{B(B - C)}. \end{aligned} \tag{11}$$

Доказательство этого утверждения проводится следующим образом.

Уравнения, предельные к (9), (10), имеют аналогичный вид с запаздыванием $\tau^*(t)$, предельным к $\tau(t)$, $\tau^*(t) = \lim\limits_{t_n \to +\infty} \tau(t_n + t)$, и соответственно, $0 \leq \tau^*(t) \leq h$.

Для функционала

$$V_1(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \frac{1}{2}(\mu_1 \varphi_1(0) + \mu_2 \varphi_2(0))^2 + \frac{1}{2}\varphi_3^2(0)$$

находим, что его производная в силу (9) в соответствии с (11) для значений $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \in \{V_1 > 0, \|\varphi\| = |\varphi(0)|\}$ удовлетворяет неравенству

$$\dot{V}_1(t, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \leq -\lambda_0((\mu_1\varphi_1(0) + \mu_2\varphi_2(0))^2 + \varphi_3^2(0)) \leq 0,$$

где $\lambda_0 > 0$ есть некоторая постоянная.

Решение $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, содержащееся в множестве $\{\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 = 0, x_3 = 0\}$, должно удовлетворять соотношениям

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{r_0\mu_1\mu_2}{AB}x_1(t) - k_1 x_1(t - \tau^*(t)), x_2(t) = -\frac{\mu_1}{\mu_2}x_1(t), \qquad x_3(t) = 0.$$

Асимптотическая устойчивость по x_3 с очевидностью следует из последнего равенства. Для определения асимптотической устойчивости по x_1 (а значит, и по x_2) преобразуем первое равенство

$$\dot{x}_1(t) = -\left(\frac{r_0\mu_1\mu_2}{AB} + k_1\right)x_1(t) + k_1\int\limits_{-\tau^*(t)}^{0}\dot{x}_1(s+t)ds =$$

$$= -\left(\frac{r_0\mu_1\mu_2}{AB} + k_1\right)x_1(t) - k_1\int\limits_{-\tau^*(t)}^{0}\left(\frac{r_0\mu_1\mu_2}{AB}x_1(s+t) + k_1 x_1(s + t - \tau^*(s+t))\right)ds.$$

Итак, $x_1(t)$ должно удовлетворять уравнению вида

$$\dot{x}(t) = -\left(\frac{\mu_1\mu_2 r_0}{\sqrt{AB}} + k_1\right)x(t) - k_1\int\limits_{-\tau^*(t)}^{0}\left(\frac{\mu_1\mu_2 r_0}{\sqrt{AB}}x(s+t) + kx(s + t - \tau^*(s+t))\right)ds. \quad (12)$$

Возьмем функционал Ляпунова $V_2 = \varphi^2(0)$. Его производная в силу этого уравнения на множестве $\{V_2 > 0, \quad \|\varphi\| = |\varphi(0)|\}$ функций $\varphi \in C$, $\varphi : [-2h, 0] \to R$ с учетом условий (11) будет удовлетворять неравенству

$$\dot{V}(t, \varphi) < -\frac{\mu_1\mu_2 r_0}{\sqrt{AB}}\varphi^2(0).$$

На основании теоремы 2 устанавливаем асимптотическую устойчивость нулевого решения $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ уравнения (12) независимо от изменения $\tau^*(t)$. Соответственно имеем равномерную асимптотическую устойчивость $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ по x_1 и x_2. Что и требовалось доказать.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 05-01-00765) и в рамках программы "Государственная поддержка ведущих научных школ" (НШ-2000.2003.1)

1. *Андреев А.С., Хусанов Д.Х.* К методу функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости и неустойчивости // Дифференц. уравнения. – 1998. – **34**, №7. – С.876-885.
2. *Андреев А.С., Павликов С.В.* Незнакоопределенные функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с конечным запаздыванием // Механика твердого тела. – 2004. – **34**. – С.112-118.
3. *Андреев А.С., Хусанов Д.Х.* Предельные уравнения в задаче об устойчивости функционально-дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. – 1998. – **34**, №4. – С.435-440.

Ульяновский гос. ун-т, Россия
mtu@sv.ulsu.ru
Получено 19.10.05