ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2005. Вып. 35

УДК 531.38; 539.3

©2005. **С.Н. Судаков**

О КОЛЕБАНИЯХ УПРУГОГО ЭЛЛИПСОИДА С МОДУЛЕМ ЮНГА, ЗАДАННЫМ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ КООРДИНАТ

Исследованы малые колебания упругого эллипсоида, модуль Юнга которого является специально заданной квадратичной функцией координат. Плотность и коэффициент Пуассона материала, из которого сделан эллипсоид, являются постоянными. Квадратичная функция, задающая модуль Юнга, выбрана таким образом, что деформации упругой среды при колебаниях оказываются однородными.

Введение. При изучении проблем небесной механики, связанных с движением полюсов Земли, большую роль играет задача о движении твердого тела с эллипсоидальной полостью, целиком заполненной идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей однородное вихревое движение [1, 2]. В работах [3, 4] в задачу была введена вязкость, задаваемая квадратичной функцией координат. В настоящей работе сделана попытка дальнейшего применения идеи однородного вихревого движения для изучения движения упругого эллипсоида.

Обозначим через $Ox_1x_2x_3$ неподвижную декартову систему координат. Предположим, что имеется упругое твердое тело постоянной плотности ρ, граница которого в осях $Ox_1x_2x_3$ описывается уравнением

$$x_1^2/c_1^2 + x_2^2/c_2^2 + x_3^2/c_3^2 = 1, \tag{1}$$

где c_1, c_2, c_3 — константы. Будем считать, что модуль Юнга E является следующей функцией координат

$$E = E_0(1 - x_1^2/c_1^2 - x_2^2/c_2^2 - x_3^2/c_3^2), \tag{2}$$

где E_0 — константа. Коэффициент Пуассона ν не зависит от координат. Уравнения теории упругости, записанные в перемещениях, имеют вид [6]

$$\rho\,\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathtt{div}\,\Pi + \rho \mathbf{F}, \tag{3}$$

где $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор перемещений, Π — тензор напряжений с компонентами

$$p_{ii} = 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \lambda\theta, \quad p_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad i \neq j\,, \tag{4}$$

$$\theta = \mathtt{div}\,\mathbf{u},$$

$$2\mu = \frac{E}{1+\nu}\,, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,.$$

Будем считать, что проекции на оси $Ox_1x_2x_3$ объемной силы $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$, действующей на единичную массу, таковы

$$F_i = f_{i1}x_1 + f_{i2}x_2 + f_{i3}x_3, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $f_{ij}\,, \quad i, j = 1, 2, 3$ — заданные константы или функции времени.

Подставляя выражения (4) в уравнения (3) и учитывая (2), получаем

$$\rho\,\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \mu\Delta u_1 + (\mu+\lambda)\,\frac{\partial\theta}{\partial x_1} + 2\,\frac{\partial\mu}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\mu}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) +$$

$$+\frac{\partial\mu}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial\lambda}{\partial x_1}\,\theta + \rho F_1 \quad (123). \tag{5}$$

Решение системы (5) ищем в виде

$$u_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3, \quad i = 1,2,3, \tag{6}$$

где a_{ij} — искомые функции времени.

Из выражений (1) и (2) следует, что для решения (6) компоненты тензора напряжений (4) обращаются в нуль на границе эллипсоида. Следовательно поверхностные силы на границе действовать не будут.

Вводя обозначения

$$\mu_0 = \frac{E_0}{2(1+\nu)}\,, \quad \lambda_0 = \frac{\nu E_0}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{7}$$

и подставляя выражения (6) в уравнения (5), находим

$$\rho(\ddot a_{11}x_1 + \ddot a_{12}x_2 + \ddot a_{13}x_3) = -2\mu_0\left[\frac{2x_1}{c_1^2}\,a_{11} + \frac{x_2}{c_2^2}\,(a_{12}+a_{21}) + \frac{x_3}{c_3^2}\,(a_{13}+a_{31})\right] -$$

$$-\lambda_0(a_{11}+a_{22}+a_{33})\,\frac{2x_1}{c_1^2} + \rho(f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + f_{13}x_3) \quad (123).$$

Уравнения для a_{ij} будут иметь вид

$$\ddot a_{11} = -\frac{4\mu_0}{\rho c_1^2}\,a_{11} - \frac{2\lambda_0}{\rho c_1^2}\,(a_{11}+a_{22}+a_{33}) + f_{11} \quad (123), \tag{8}$$

$$\ddot a_{12} = -\,\frac{2\mu_0}{\rho c_2^2}\,(a_{12}+a_{21}) + f_{12}, \quad \ddot a_{21} = -\,\frac{2\mu_0}{\rho c_1^2}\,(a_{12}+a_{21}) + f_{21} \quad (123). \tag{9}$$

Система (8) решается независимо от системы (9). В свою очередь, система (9) распадается на три независимых друг от друга подсистемы, каждая из которых определяет изменение одной из трех груп переменных: a_{12}, a_{21}; a_{23}, a_{32}; a_{31}, a_{13}.

Рассмотрим колебания эллипсоида в случае отсутствия массовых сил $\mathbf{F}$. Для этого положим

$$f_{ij} = 0, \quad i,j = 1,2,3. \tag{10}$$

Выясним характер деформаций, возникающих при колебаниях, описываемых системой уравнений (8) при нулевых решениях систем уравнений (9). Подставляя нулевые решения систем (9), имеющие вид $a_{12} = a_{21} = 0$ (123), в выражения (6), находим компоненты перемещений

$$u_i = a_{ii}(t)x_i, \quad i = 1,2,3, \tag{11}$$

где $a_{ii}(t)$ — решения системы (8). Из выражений (11) следует, что точки упругой среды, лежащие до возникновения деформаций на главных осях эллипсоида, продолжают оставаться на них и после возникновения деформаций.

Систему (8) представим в виде системы шести уравнений первого порядка

$$\dot{y} = Dy, \tag{12}$$

где $y = (y_1, y_2, ..., y_6)$, $y_i = \dot{a}_{ii}$, $y_{i+3} = a_{ii}$, $i = 1, 2, 3$; D — квадратная матрица шестого порядка, элементы d_{ij} которой имеют вид

$$d_{14} = d_{25} = d_{36} = 1,$$

$$d_{41} = d^*/c_1^2, \quad d_{52} = d^*/c_2^2, \quad d_{63} = d^*/c_3^2,$$
$$d_{42} = d_{43} = d/c_1^2, \quad d_{51} = d_{53} = d/c_2^2, \quad d_{61} = d_{62} = d/c_3^2,$$
$$d^* = -2(2\mu_0 + \lambda_0)/\rho, \quad d = -2\lambda_0/\rho.$$

Найдем решение системы (12). Характеристическим уравнением матрицы D является бикубическое уравнение

$$\alpha^6 + b_1\alpha^4 + b_2\alpha^2 + b_3 = 0, \tag{13}$$

коэффициенты которого имеют вид

$$b_1 = \frac{2E_0 m(m-1)}{\rho(m+1)(m-2)}\left(\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} + \frac{1}{c_3^2}\right),$$

$$b_2 = \frac{4E_0^2 m^3}{\rho^2(m+1)^2(m-2)}\left(\frac{1}{c_1^2c_2^2} + \frac{1}{c_2^2c_3^2} + \frac{1}{c_3^2c_1^2}\right),$$
$$b_3 = \frac{8E_0^3 m^3}{\rho^3(m+1)^2(m-2)}\,\frac{1}{c_1^2c_2^2c_3^2}\,,$$

где $m = 1/\nu$.

При $c_1 \neq c_2 \neq c_3 \neq c_1$ характеристическое уравнение (13) имеет три пары различных чисто мнимых корней. В этом случае при выполнении условия (10) общее решение системы (12) записывается так:

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{6} k_i \boldsymbol{\gamma}_i e^{\alpha_i t}, \tag{14}$$

где $\boldsymbol{\gamma}_i$ — собственные векторы матрицы D, соответствующие ее собственным значениям α_i; k_i — произвольные постоянные. Благодаря отсутствию диссипации, собственные значения матрицы D будут чисто мнимыми:

$$\alpha_{1,2} = \pm i\beta_1, \quad \alpha_{3,4} = \pm i\beta_2, \quad \alpha_{5,6} = \pm i\beta_3,$$

где $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ — положительные действительные числа, среди которых нет равных друг другу. Тогда решение (14) принимает вид

$$\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{3}\{[k_{2j-1}\mathtt{Re}(\boldsymbol{\gamma}_{2j-1}) + k_{2j}\mathtt{Im}(\boldsymbol{\gamma}_{2j-1})]\cos\beta_j t +$$

$$+[k_{2j}\mathtt{Re}(\boldsymbol{\gamma}_{2j-1}) + k_{2j-1}\mathtt{Im}(\boldsymbol{\gamma}_{2j-1})]\sin\beta_j t\}. \tag{15}$$

Перемещения (11) при a_{11}, a_{22}, a_{33}, определенных решением (15), будут описывать колебания эллипсоида, при которых точки упругой среды, лежащие в начальный момент на главных осях, будут оставаться на них во все время движения. Иными словами, упругий эллипсоид при колебаниях будет сжиматься и растягиваться вдоль главных осей.

Теперь рассмотрим случай, когда системы уравнений (8), (9) обладают решением, в котором

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{23} = a_{32} = a_{31} = a_{13} = 0, \tag{16}$$

а a_{12} и a_{21} являются функциями времени, удовлетворяющими системе (9). Подставляя (16) в формулы (6), получаем для перемещений следующие выражения:

$$u_1 = a_{12}(t)x_2, \quad u_2 = a_{21}(t)x_1, \quad u_3 = 0. \tag{17}$$

Для определения функций $a_{12}(t)$ и $a_{21}(t)$ представим систему уравнений (9) в виде системы четырех уравнений первого порядка

$$\dot{\mathbf{y}} = D\mathbf{y}, \tag{18}$$

где $\mathbf{y} = (a_{12}, a_{21}, \alpha_{12}, \alpha_{21}), \quad \alpha_{12} = \dot{a}_{12}, \quad \alpha_{21} = \dot{a}_{21},$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ d_{31} & d_{32} & 0 & 0 \\ d_{41} & d_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad d_{31} = d_{32} = -\frac{2\mu_0}{\rho c_2^2}, \qquad d_{41} = d_{42} = -\frac{2\mu_0}{\rho c_1^2}.$$

Характеристическое уравнение для D:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ d_{31} & d_{32} & -\lambda & 0 \\ d_{41} & d_{42} & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^2\left[\lambda^2 + \frac{2\mu_0}{\rho^2}\left(\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2}\right)\right] = 0.$$

Корни характеристического уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\lambda_*, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 0,$$

где

$$\lambda_* = \sqrt{\frac{2\mu_0}{\rho}\left(\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2}\right)}.$$

Общее решение системы (18) имеет вид

$$a_{12} = \delta_1 \sin\lambda_* t + \delta_2 \cos\lambda_* t + \delta_3 + \delta_4 t,$$

$$a_{21} = \delta_1 \frac{c_2^2}{c_1^2} \sin \lambda_* t + \delta_2 \frac{c_2^2}{c_1^2} \cos \lambda_* t - \delta_3 - \delta_4 t,$$
$$\alpha_{12} = \delta_1 \lambda_* \cos \lambda_* t - \delta_2 \lambda_* \sin \lambda_* t + \delta_4,$$
$$\alpha_{21} = \delta_1 \frac{c_2^2}{c_1^2} \lambda_* \cos \lambda_* t - \delta_2 \frac{c_2^2}{c_1^2} \lambda_* \sin \lambda_* t - \delta_4,$$

где $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ — произвольные постоянные. Подставляя выражения для a_{12} и a_{21} в (17), получим следующие формулы для перемещений

$$u_1 = (\delta_1 \sin \lambda_* t + \delta_2 \cos \lambda_* t + \delta_3 + \delta_4 t) x_2,$$
$$u_2 = \left[\frac{c_2^2}{c_1^2} (\delta_1 \sin \lambda_* t + \delta_2 \cos \lambda_* t) - \delta_3 - \delta_4 t \right] x_1, \quad u_3 = 0. \tag{19}$$

Положим $\delta_4 = 0$. Тогда перемещениям (19) будут соответствовать плоскопараллельные гармонические коллебания упругого эллипсоида. При $\delta_1 = \delta_2 = 0$ и $\delta_3 \neq 0$ колебания отсутствуют. Эллипсоид будет неподвижен, но повернут вокруг оси Ox_3 на некоторый угол, пропорциональный величине δ_3 и обращающийся в нуль при $\delta_3 = 0$.

Совершенно аналогично исследуются колебания, описываемые двумя остальными парами уравнений для a_{13}, a_{31} и a_{23}, a_{32}.

Общее решение задачи получается как сумма колебаний, описываемых всеми четырьмя независимыми системами (8), (9).

1. *Ламб Г.* Гидродинамика.– М.; Л.: Гостехиздат, 1947. – 928 с.
2. *Мориц Г., Мюллер А.* Вращение Земли: теория и наблюдения.– Киев: Наук. думка, 1992.– 512 с.
3. *Судаков С.Н.* Движение тела с жидкостью переменной вязкости в поле неповижного притягивающего центра // Механика твердого тела. – 2001. – Вып. 31.– С. 111 – 118.
4. *Судаков С.Н.* Об уравнениях движения твердого тела с эллипсоидальной полостью, целиком заполненной жидкостью переменной вязкости // Тр. ИПММ НАН Украины.– 2000. – **5**– С. 141 – 144.
5. *Судаков С.Н.* Модельная задача о движении вокруг центра масс абсолютно твердой эллипсоидальной оболочки с вязко-упругим заполнением // Механика твердого тела. – 2003. – Вып. 33.– С. 119 – 126.
6. *Кочин Н.Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. – М.: Из-во АН СССР, 1951. – 426 с.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
techmech@iamm.ac.donetsk.ua
Получено 01.09.05