

УДК 531.38

©2005. В.А. Самсонов, Ю.Д. Селюцкий

## ОБ ОПИСАНИИ ТОРМОЖЕНИЯ ТЕЛА В ПОТОКЕ СРЕДЫ

На основе подхода к моделированию внутренней динамики потока среды с помощью введения дополнительной обобщенной координаты [1-3] обсуждается задача о последствии, возникающем при остановке тела типа тонкой пластины. Исследуется вопрос об управляемости и наблюдаемости системы и о возможности влияния на последствие.

**1. Описание модели.** Рассмотрим тело-крыло, имеющее форму, близкую к плоской прямоугольной пластине и обладающее двумя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии. Пусть тело помещено в неограниченный объем сопротивляющейся среды, покоящейся на бесконечности. Предположим, что тело движется поступательно с постоянной скоростью  $V$  в направлении, параллельном прямой, образованной пересечением плоскостей симметрии тела.

Введем неподвижную систему координат  $Oxy$ , ось абсцисс которой направим вдоль вектора  $V$ , ось ординат — перпендикулярно плоскости пластины. Будем характеризовать положение тела координатами  $x = Vt$ ,  $y$  его центра масс.

Пусть, помимо указанного «основного» движения, тело двигается с некоторой, вообще говоря, переменной скоростью  $\dot{y}$  в направлении, перпендикулярном  $V$ . Будем предполагать, что это дополнительное движение является медленным ( $\dot{y} \ll V$ ). Это предположение позволяет ограничиться при моделировании линейным подходом.

Ограничимся рассмотрением только перпендикулярной пластине составляющей аэродинамической силы (так называемой нормальной силы).

Как известно, при произвольном движении твердого тела в идеальной жидкости, совершающей безвихревое безотрывное потенциальное течение, кинетическая энергия  $T_f$ , сообщенная жидкости телом, выражается через компоненты скорости и угловой скорости тела с помощью тензора  $\Lambda$  присоединенных масс:

$$T_f = \mathbb{V}^T \Lambda \mathbb{V}, \quad (1)$$

где вектор-строка  $\mathbb{V}^T = (V_x \ V_y \ V_z \ \Omega_x \ \Omega_y \ \Omega_z)$  составлен из компонентов  $V_{x,y,z}$  скорости некоторой точки тела и компонентов  $\Omega_{x,y,z}$  угловой скорости тела.

Значения компонентов тензора присоединенных масс существенно зависят от выбора системы координат, связанной с телом. Выберем так называемую главную систему координат (при поступательном перемещении вдоль ее осей векторы количества движения тела и среды параллельны). В данном случае одна из главных осей  $\xi$  направлена по линии пересечения плоскостей симметрии, а ось  $\eta$  перпендикулярна плоскости пластины. Начало системы координат поместим в точку  $C$ , совпадающую с центром давления соответствующего сечения крыла.

При таком выборе координатных осей с учетом того, что тело обладает двумя плоскостями симметрии и совершает плоскопараллельное движение, из 36 компонентов тензора присоединенных масс отличными от нуля оказываются только 4. Поскольку движение тела является поступательным, выражение для кинетической энергии принимает

вид:

$$T_f = m_{11}V^2 + m_{22}\dot{y}^2.$$

Однако для реальной среды соотношение (1) не имеет места. Это связано с тем обстоятельством, что поля скоростей, индуцированные одним и тем же движением тела в реальной и в идеальной жидкости, отличаются. Чтобы интегральным образом описать это отличие, введем дополнительную обобщенную скорость  $\dot{\eta}$ :

$$T_f = m_{11}V^2 + m_{22}(\dot{y} + \dot{\eta})^2.$$

Значение координаты  $\eta$  определяется путем интегрирования.

Опишем обобщенные силы, соответствующие обобщенным координатам системы. Заметим, что при моделировании бесконечномерной системы с помощью конечномерной модели граничные условия заменяются связями и, соответственно, необходимо вводить реакции связей. В данном случае их две:  $Q_1$  — реакция на границе тела с жидкостью и  $Q_2$  — реакция на бесконечно удаленной границе жидкости. Кажется естественным предположить, что первая из них зависит от относительного движения тела и жидкости (т.е. от  $\eta$ ,  $\dot{\eta}$ ), а вторая — от скорости присоединенного объекта относительно бесконечно удаленной границы (т.е. от  $\dot{y} + \dot{\eta}$ ). Иными словами,

$$Q_1 = -k\eta - h\dot{\eta}, \quad Q_2 = C(\dot{y} + \dot{\eta}).$$

Отсюда получаем уравнения движения системы «тело+жидкость» (ограничимся только уравнениями, отвечающими обобщенным координатам  $y$  и  $\eta$ ):

$$\begin{aligned} m_{22}(\ddot{\eta} + \ddot{y}) &= -k\eta - h\dot{\eta} - C(\dot{y} + \dot{\eta}), \\ M\ddot{y} &= k\eta + h\dot{\eta} + F_y. \end{aligned}$$

Здесь  $M$  — масса тела,  $F_y$  — внешняя сила неаэродинамической природы (например, вынуждающая или управляющая). Далее для простоты будем обозначать  $m_{22}$  через  $m$ .

Выберем единицы измерения так, чтобы  $V = 1$ ,  $b = 1$ ,  $\rho S/2 = 1$ , где  $b$  — длина хорды крыла (длина короткой стороны пластины),  $\rho$  — плотность среды,  $S$  — площадь пластины.

В стационарном случае ( $\dot{y} \equiv u_0 = \text{const}$ ,  $\dot{\eta} = 0$ ) имеем

$$\begin{aligned} 0 &= -k\eta - C u_0, \\ 0 &= k\eta + F_y. \end{aligned}$$

Вынуждающая сила в данном случае равна измеряемой "статической" аэродинамической силе, т.е.  $F_y = -C_n^\alpha \alpha$ , где  $C_n^\alpha$  — производная статического коэффициента нормальной силы по углу атаки. При рассматриваемом движении  $\alpha$  представляет собой угол между абсолютной скоростью крыла и хордой, т.е.  $\alpha = -\dot{y}$ .

Таким образом, имеем окончательно

$$\begin{aligned} m(\ddot{\eta} + \ddot{y}) &= -k\eta - h\dot{\eta} - C_n^\alpha(\dot{y} + \dot{\eta}), \\ M\ddot{y} &= k\eta + h\dot{\eta} + F_y. \end{aligned} \tag{2}$$

Значения параметров  $m$  и  $C_n^\alpha$  известны (могут быть экспериментально определены или рассчитаны) для тела конкретной формы. Значения остальных параметров разработанной модели ( $k$  и  $h$ ) были определены на основе анализа данных различных экспериментов, проведенных в ЦАГИ [4-5] и других организациях. В этих экспериментах исследовались поступательные гармонические колебания ( $y(t) = a \cos \Omega t$ ). Измеренная нормальная сила с достаточной точностью описывалась одной гармоникой (что свидетельствует о правомерности использования при моделировании линейной системы):  $C_n(t) = A_n \sin \Omega t + B_n \cos \Omega t$ . Ясно, что значения параметров  $k$  и  $h$  для каждого отдельного эксперимента можно подобрать так, чтобы обеспечить нужные величины  $A_n$  и  $B_n$ . Оказалось, однако, что можно предложить некий набор значений параметров ( $k \sim 2, h \sim 12$ ) сразу для серии экспериментов. Результаты расчетов приведены на рис. 1, 2 (здесь крестиками и ромбиками изображены экспериментальные значения, пунктиром — квазистатическая зависимость, сплошной линией — результаты расчета по предложенной модели). Видно, что обсуждаемая модель при таких значениях параметров обеспечивает удовлетворительное согласие с экспериментальными данными даже при  $\Omega \sim 1.5$ . В то же время, поскольку в рамках квазистатической модели  $B_n \equiv 0$ , ее качество становится неудовлетворительным уже при  $\Omega > 0.4$ .

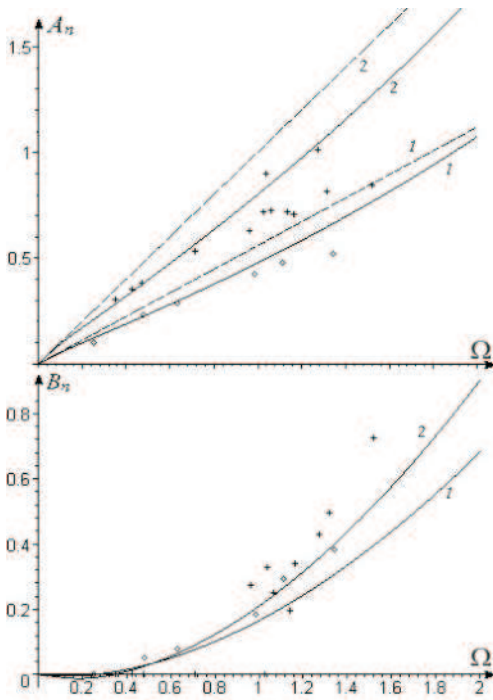


Рис. 1

- 1)  $C_n^\alpha = 2.8, a = 0.2$ , эксп. знач. изобр. ромбиками;
- 2)  $C_n^\alpha = 3.5, a = 0.286$ , эксп. знач. изобр. крестиками.

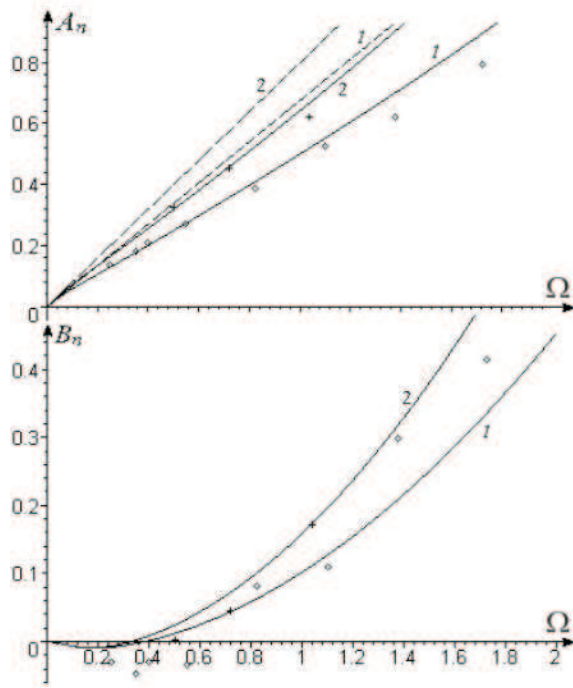


Рис. 2

- 1)  $C_n^\alpha = 3.8, a = 0.21$ , эксп. знач. изобр. ромбиками;
- 2)  $C_n^\alpha = 4.3, a = 0.15$ , эксп. знач. изобр. крестиками.

**2. О "последействии".** Полученные результаты справедливы и для обращенной задачи, когда среда имеет постоянную скорость на бесконечности (т.е. когда имеется поток среды), а тело совершает поступательное движение поперек потока.

В силу инерционности поток среды реагирует на изменения движения тела с некоторым запаздыванием. В частности, при переходе тела с одного установившегося режима движения на другой (например, при мгновенной остановке) воздействие потока выходит на установившееся значение не мгновенно. Этот эффект называется последствием.

Опишем последствие, возникающее после мгновенной остановки пластины, которая до того совершала установившееся движение поперек потока с постоянной скоростью. Предположим, что тело-пластина совершает движение по закону

$$\dot{y}(t) = \begin{cases} u_0, & t < 0, \\ 0, & 0 \leq t. \end{cases} \quad (3)$$

После остановки тела первое уравнение системы (2) принимает вид:

$$m\ddot{\eta} + (h + C_n^\alpha)\dot{\eta} + k\eta = 0. \quad (4)$$

Отметим, что это уравнение описывает движение, так сказать, присоединенного осциллятора (с демпфированием).

Нетрудно показать, что для нормальной силы, действующей на пластину после остановки, имеем:

$$C_n(t) = \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} \frac{m\lambda_i + C_n^\alpha k + h\lambda_i}{m\lambda_i} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_i t}.$$

Здесь  $\lambda_{1,2}$  – корни характеристического полинома дифференциального уравнения (4).

При указанных выше значениях  $k$  и  $h$  и при  $C_n^\alpha = 4$ ,  $m = 1.57$  имеем  $\lambda_1 \sim -0.1$ ,  $\lambda_2 \sim -10$ . Это означает, что почти для любого  $t > 1$  сила последствия на интервале  $(t, t + 10)$  уменьшается примерно в 3 раза.

Соответственно, можно поставить задачу о поиске такого управления движением тела, которое бы обеспечило в некоторый конечный момент остановку тела и одновременно "остановку" среды, точнее, отсутствие последствия потока среды на остановившееся тело.

**3. Управляемость и наблюдаемость системы.** Задача управления движением тела в потоке осложняется двумя обстоятельствами. Во-первых, непосредственное управляющее воздействие можно приложить только к телу, а не к самому присоединенному осциллятору, имитирующему внутреннюю динамику потока. Во-вторых, информация о состоянии осциллятора недоступна для непосредственного измерения. Она должна восстанавливаться с привлечением замкнутой динамической системы.

Исследуем управляемость и наблюдаемость рассматриваемой системы в предположении об отсутствии внешних сил неаэродинамической природы.

Запишем систему уравнений движения в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Y}} &= \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{B}u, \\ \mathbf{Z} &= \mathbf{H}\mathbf{Y}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \\ y \\ \dot{y} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m} - \frac{k}{M} & -\frac{h + C_n^\alpha}{m} - \frac{h}{M} & 0 & -\frac{C_n^\alpha}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{M} & \frac{h}{M} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & H_{13} & H_{14} \\ 0 & 0 & H_{23} & H_{24} \end{pmatrix}.$$

Анализ [6] матрицы управляемости показывает, что необходимое и достаточное условие управляемости выполняется всегда, если  $b \neq 0$  (т.е., если управление присутствует).

Для наблюдаемости системы необходимо и достаточно, чтобы была выполнена одна из следующих групп условий:

$$H_{13}H_{24} - H_{23}H_{14} \neq 0, \quad hC_n^\alpha - mk \neq 0, \tag{6}$$

$$H_{23} = H_{24} = 0, \quad H_{13} \neq 0, \quad H_{14}/H_{13} \neq -\lambda_{1,2}, \quad hC_n^\alpha - mk \neq 0. \tag{7}$$

Таким образом, при наличии двух каналов наблюдения (матрица  $H$  невырождена, группа условий (6)) рассматриваемая система является наблюдаемой, если  $hC_n^\alpha - mk \neq 0$ . Однако это условие всегда выполнено для тел типа плоских пластин, которые имеют достаточно высокий коэффициент нормальной силы  $C_n^\alpha$  и для которых собственные времена затухания присоединенной системы разнесены (это означает, что  $h$  достаточно велико).

При наличии лишь одного канала наблюдения (группа условий (7)) необходимо, чтобы наблюдалось положение тела. Любопытно, что информация о скорости тела не является необходимой, и, более того, ее одной недостаточно для наблюдаемости.

Таким образом, почти всегда имеется возможность управления как движением тела, так и, в некотором смысле, состоянием потока среды.

**4. Управление последствием.** Пусть тело-крыло движется с постоянной скоростью  $V_0$  поперек потока. Движение является установившимся. Найдём управле-

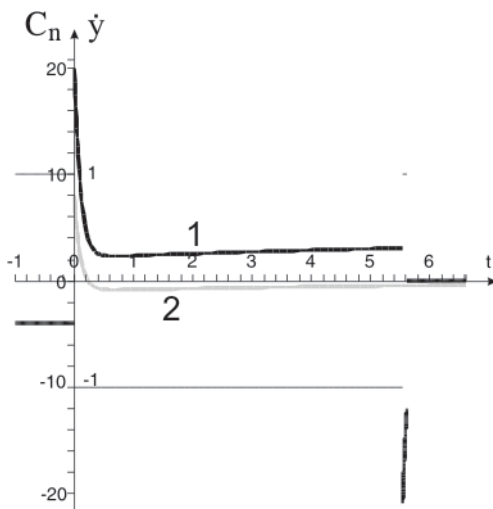


Рис. 3

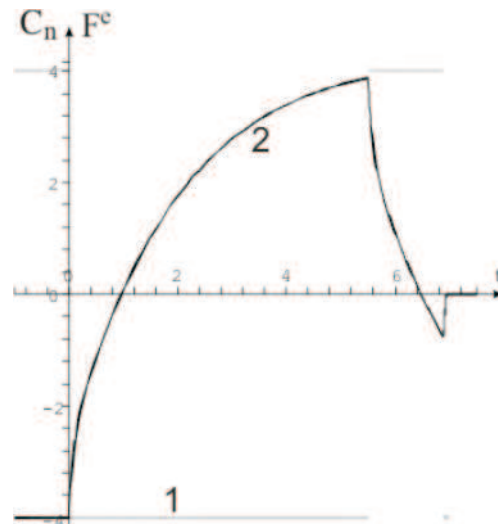


Рис. 4

ние, обеспечивающее отсутствие последствия после остановки крыла. Пользуясь тем, что в рассматриваемой задаче начальные условия и для крыла, и для присоединенного осциллятора известны, будем строить программное управление. Ограничимся двумя

вариантами управляющего воздействия. В первом варианте, так сказать, кинематическом, в качестве такового выберем скорость крыла, которую будем считать кусочно-постоянной и равной по модулю  $V_0$ . Во втором – в качестве управляющего воздействия выберем вынуждающую силу, приложенную к крылу, которую также будем полагать кусочно-постоянной и по модулю равной силе, необходимой для поддержания исходного движения крыла.

Расчет проводился при следующих значениях параметров:  $m = 1.57$ ,  $k = 2.0$ ,  $h = 12.0$ ,  $C_n^\alpha = 4.0$ ,  $V_0 = 1$ ,  $M = 5$ . В обоих случаях построение требуемого управления оказывается возможным.

Результаты для первого случая представлены на рис. 3 (где кривая 1 – нормальная сила при выбранном управлении скоростью, а кривая 2 – нормальная сила после мгновенной остановки). Видно, что остановка и тела, и присоединенного осциллятора достигается уже при  $t \approx 5.7$ .

Результаты для второго варианта управления изображены на рис. 4. Кривая 1 изображает управляющую силу, а кривая 2 – нормальную аэродинамическую силу, сопро-вождающую данное управление.

Кроме того, был рассмотрен случай малой массы крыла. Любопытно, что при этом управление с помощью постоянной силы является более «эффективным» в том смысле, что на приведение крыла в состояние покоя при таком управлении требуется меньше времени ( $t \approx 4.9$ ), чем при управлении с помощью кусочно-постоянной скорости. Это связано с тем, что на большей части интервала кинематического управления приходится прикладывать меньшую по величине вынуждающую силу ( $F \sim 1.5$ ).

В данной постановке задачу управления удалось достаточно просто разрешить благодаря априорной информации о начальных условиях присоединенной динамической системы. В более общем случае для решения задачи необходимо строить схему определения этих начальных условий по наблюдаемым координате и скорости тела [6].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 03-01-00190, № 05-08-01378) и программы "Университеты России".

1. Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д. О возможности учета инерционных свойств потока среды, воздействующей на тело. – М.: Изд-во МГУ, 2000. – 40 с.
2. Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д. О колебаниях пластины в потоке сопротивляющейся среды // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2004. – № 4. – С. 25-32.
3. Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д. Феноменологическая модель взаимодействия тела с потоком среды // Отчет Ин-та механики МГУ. – 2005. – № 4737. – 38 с.
4. Гребешов Э.П., Шакарвене Е.П. Нестационарные характеристики трех прямоугольных крыльев различного удлинения // Тр. ЦАГИ. – 1989. – Вып. 2485. – С. 3-31.
5. Мажортыл Г.В., Щеглова М.Г. Экспериментальное исследование коэффициентов производных нормальной силы прямоугольных крыльев при поступательных колебаниях // Уч. записки ЦАГИ. – 1990. – XXI. № 1. – С. 11-40.
6. Александров В.В., Злочевский С.И., Лемак С.С., Парусников Н.А. Введение в динамику управляемых систем. – М.: Изд-во МГУ, 1993. – 181 с.