ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2005. Вып. 35

УДК 531.44

©2005. **М.В. Скатенок**

АНАЛИТИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ ЗАКЛИНИВАНИЯ В СИСТЕМАХ С ФРИКЦИОННЫМИ КОНТАКТАМИ

Рассмотрена задача заклинивания ("wedging") механической системы с сухим трением в контактах в традиционной постановке, когда равновесие системы описывается уравнениями статики, а сухое трение – законом Кулона. Доказана теорема о необходимых условиях и теорема о достаточных условиях, при которых системы с произвольным числом фрикционных контактов допускают заклинивание в равновесии.

Введение. Согласно экспериментальным данным [1, 2] существуют особые равновесные состояния механических систем с сухим трением, в которых возникает статическое явление, получившее название заклинивания. Особенность таких равновесных состояний заключается в том, что вывести из них систему невозможно никакими активными силами, каково бы ни было их значение и направление.

Значения реактивных сил, возникающих в контактах механической системы при заклинивании, могут быть достаточно большими. Такие реактивные силы могут привести к повышенному износу трущихся поверхностей и даже к разрушению отдельных элементов системы [2]. Поэтому возможность заклинивания необходимо учитывать и, если удастся, устранять уже на этапе проектирования системы с сухим трением. Однако следует отметить, что иногда заклинивание может играть и положительную роль.

Прикладная направленность большинства публикаций, посвященных заклиниванию (например, [1–5]), позволяет сделать вывод о том, что работы по изучению заклинивания имеют большое значение для автоматизации технических процессов. Однако хотя в настоящее время накоплен обширный экспериментальный материал по заклиниванию, теоретическая основа для этих данных пока только развивается. Большинство попыток теоретически обосновать те или иные свойства и условия заклинивания имеют серьезные недостатки, а сами предлагаемые подходы носят индивидуальный отпечаток некоторой частной задачи, поэтому не могут быть широко использованы. Анализ работ [1–5] показывает, что их авторы опираются только на некоторые отдельные (иногда различные) свойства или условия заклинивания, причем встречаются разные трактовки одного и того же условия, из-за чего возникают противоречия. Например, одни и те же условия в [4] приведены в качестве достаточных условий заклинивания, а в [5] — в качестве необходимых. Все это препятствует рассмотрению существующих работ по заклиниванию как взаимосвязанных частей единой теории.

В работе [6] было показано, что основной причиной этого послужило отсутствие формального определения заклинивания, т.е. какого-либо центрального понятия, которое корректно описывало бы это экспериментально обнаруженное явление и максимально полно отражало бы его свойства. Без такого понятия нельзя дать формальную постановку задачи заклинивания, т.е. задачи отыскания необходимых и/или достаточных условий заклинивания. Однако введение такого понятия связано, в частности, с трудностями, обусловленными традиционным подходом к задаче заклинивания, который применяется в том числе и в [1–5]. При традиционном подходе равновесие механической системы описывается уравнениями статики, а сухое трение в контактах этой системы — законом Кулона. В рамках этого подхода задача заклинивания является статически неопределенной, т.е. число уравнений равновесия, которые можно составить, меньше числа входящих в эти уравнения неизвестных. Другими словами, решение данной задачи неединственно и зависит как минимум от одной свободной переменной. В работе [6] показано, что по этой причине в рамках традиционного подхода нельзя указать достаточные условия заклинивания, т.е. те условия, при выполнении которых в системе гарантированно возникает заклинивание, и что формальное определение заклинивания может отражать только необходимые условия этого явления. В связи с этим в [6] было введено понятие механической системы, допускающей заклинивание.

Определение [6]. Механическая система допускает заклинивание, если нельзя указать активные силы, с помощью которых эту систему гарантированно можно вывести из равновесия.

Использование этого определения позволяет получить классическую теоретическую схему, которая включает саму математическую модель заклинивания, ряд соответствующих необходимых и достаточных условий и логические связи между ними. В [6] с помощью этого определения сформулирована и доказана теорема о необходимом и достаточном условии того, чтобы механическая система с двумя фрикционными контактами допускала заклинивание; там же соответствующим образом переформулированы теоремы из [7] об условиях заклинивания в системах с тремя фрикционными контактами.

Предложенное в [6] определение может послужить формальной основой для развития теории заклинивания и критического анализа существующих теоретических и экспериментальных результатов.

Одной из наиболее интересных с прикладной точки зрения работ, посвященных заклиниванию, является работа P.E. Dupont и S.P. Yamajako [8]. В этой работе предложен формальный математический подход к решению задачи заклинивания, основанный на анализе уравнений движения механической системы с кулоновым трением, записанных в форме уравнений Лагранжа второго рода. P.E. Dupont и S.P. Yamajako сформулировали теорему (теорема 2, [8]) об условии заклинивания в системе с произвольным числом контактов. Однако и формулировка, и доказательство теоремы 2 в [8] имеют серьезные недостатки, не позволяющие рассматривать данную теорему как таковую. Так, приведенное в [8] доказательство теоремы 2 всего лишь демонстрирует отдельные свойства заклинивания, не обосновывая на самом деле утверждения этой теоремы. Более того, формулируя утверждение указанной теоремы как условие заклинивания, авторы не вводят четкого формального определения этого явления, что уже само по себе делает невозможным строгое обоснование данного утверждения.

1. Постановка задачи. Вместе с тем есть основания считать, что на практике имеет место условие заклинивания, подобное тому, которое предложено в [8]. Получив корректную формулировку и строгое обоснование, такое условие может служить эффективным инструментом исследования систем с кулоновым трением. Поэтому теорема 2 из [8] представляет немалый интерес, хотя и нуждается в тщательной переработке.

Поскольку P.E. Dupont и S.P. Yamajako в работе [8] используют традиционный подход к задаче заклинивания, то формулировка такой теоремы может быть корректной только в том случае (см. выше), если говорить не о самом заклинивании, а о механической системе, допускающей заклинивание. Требуемая теорема должна регламентировать необходимые и достаточные условия, при выполнении которых механическая система с произвольным числом контактов допускает заклинивание *в равновесии* и/или *в движении*.

В данной работе рассмотрено только заклинивание *в равновесии*. Доказан ряд достаточных условий, при выполнении которых механическая система с произвольным числом контактов не допускает заклинивание (леммы 1–3). Необходимые условия, при выполнении которых механическая система с произвольным числом контактов допускает заклинивание, сформулированы в виде леммы 4. Для систем, удовлетворяющих этим условиям, доказаны две теоремы: теорема о необходимых условиях и теорема о достаточных условиях, при выполнении которых данные системы допускают заклинивание.

2. Уравнения равновесия механической системы с произвольным числом фрикционных контактов. Рассмотрим произвольную механическую систему твердых тел с n фрикционными контактами, на которую могут действовать любые активные силы. Каждый из фрикционных контактов представляет собой одностороннюю неидеальную (с кулоновым трением) связь. После освобождения от этих связей движение данной системы можно описать уравнениями Лагранжа второго рода с множителями и уравнениями связей в разорванных фрикционных контактах. Поскольку в данной работе эти уравнения связей не будут использоваться, запишем только уравнения Лагранжа:

$$I(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau} + [\Phi(\mathbf{q}, t) \vdots \tilde{\Phi}(\mathbf{q}, t)] \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{f} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \ldots, q_k\}$ – вектор независимых обобщенных координат, описывающих положение механической системы, освобожденной от связей в фрикционных контактах; t – время; $I(\mathbf{q})$ – матрица квадратичной формы кинетической энергии системы; $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ – вектор, компоненты которого являются квадратичными формами по $\dot{\mathbf{q}}$; вектор $\boldsymbol{\tau}$ включает члены, содержащие активные силы и моменты в выражениях обобщенных сил, и согласно сказанному выше может быть задан произвольно; $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{f}$ – соответственно вектор-столбец нормальных реакций и вектор-столбец сил кулонова трения в фрикционных контактах; $[\Phi(\mathbf{q}, t) \vdots \tilde{\Phi}(\mathbf{q}, t)]$ – блочная матрица, где $\Phi(\mathbf{q}, t)$ и $\tilde{\Phi}(\mathbf{q}, t)$ – соответственно матрица коэффициентов при нормальных реакциях и матрица коэффициентов при силах кулонова трения в выражениях обобщенных сил.

При равновесии механической системы левая часть уравнений (1) равна нулю, т.е. они имеют вид

$$\boldsymbol{\tau} + [\Phi \vdots \tilde{\Phi}] \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{f} \end{pmatrix} = 0. \tag{2}$$

В дальнейшем будем использовать еще одну форму записи уравнений равновесия. Чтобы получить ее, введем в уравнения равновесия (2) соотношения закона Кулона $f_i = \mu_i \lambda_i$, $-\overline{\mu}_i \le \mu_i \le \overline{\mu}_i$, $i = \overline{1,\ n}$, где μ_i – значение коэффициента кулонова трения, а $\overline{\mu}_i$ – значение коэффициента трения скольжения в i-ом контакте. Обозначим $M = diag\{\mu_i\}$, $i = \overline{1,\ n}$. Тогда уравнения (2) могут быть представлены в следующем виде:

$$[\Phi + \tilde{\Phi} M]\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\tau} = 0. \tag{3}$$

Таким образом, в уравнениях (2) неизвестными являются $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{f}$, а в уравнениях (3) — это $\boldsymbol{\lambda}$ и M. Далее будем использовать уравнения равновесия исследуемой системы как в записи (2), так и в записи (3).

3. Достаточные условия отсутствия заклинивания.

Лемма 1. Чтобы механическая система с n фрикционными контактами *не допускала заклинивание*, достаточно, чтобы

$$k > 2n. \tag{4}$$

Доказательство леммы. Покажем, что можно выбрать вектор $\boldsymbol{\tau}$ так, чтобы уравнения (2) не удовлетворялись. Этим самым будет показано, что в случае (4) можно указать такие активные силы, с помощью которых рассматриваемую систему гарантированно можно вывести из равновесия, т.е. что в случае (4) данная система не допускает заклинивание.

Неравенство (4) означает, что среди строк матрицы $[\Phi \vdots \tilde{\Phi}]$ есть линейно зависимые. В этом случае всегда найдется такой ненулевой вектор-столбец $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\mathbf{q}, t)$, что произведение $\boldsymbol{a}^T[\Phi \vdots \tilde{\Phi}]$ представляет собой нулевой вектор.

Зададим в уравнениях (2) такой вектор $\boldsymbol{\tau}$, чтобы $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{\tau} \neq 0$. Затем умножим (2) на вектор $\boldsymbol{a}^T$ слева:

$$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{a}^T[\Phi \vdots \tilde{\Phi}] \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{f} \end{pmatrix} = 0. \tag{5}$$

Поскольку вектор $\boldsymbol{a}$ выбран так, что произведение $\boldsymbol{a}^T[\Phi \vdots \tilde{\Phi}]$ представляет собой нулевой вектор, из (5) следует $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{\tau} = 0$. Но вектор $\boldsymbol{\tau}$ в (5) выбран так, что $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{\tau} \neq 0$. Таким образом, для выбранного вектора $\boldsymbol{\tau}$ уравнения равновесия не удовлетворяются. Следовательно, в случае (4) рассматриваемая система не допускает заклинивание. □

Утверждение леммы 1 не накладывает никаких условий на ранг матрицы $[\Phi \vdots \tilde{\Phi}]$. Однако если $[\Phi \vdots \tilde{\Phi}]$ — матрица полного ранга, то чтобы исследуемая механическая система не допускала заклинивание, необходимо выполнение менее жесткого условия, чем (4).

Лемма 2. Если $[\Phi \vdots \tilde{\Phi}]$ — матрица полного ранга, то чтобы механическая система с n фрикционными контактами *не допускала заклинивание*, достаточно, чтобы

$$k \geq 2n. \tag{6}$$

Как видно, условие (6) включает случай $k = 2n$, который не входит в (4), т.е. условие (6) является менее жестким, чем (4).

Доказательство леммы. При $k = 2n$ матрица $[\Phi \vdots \tilde{\Phi}]$ — квадратная. Кроме того, по условию леммы $[\Phi \vdots \tilde{\Phi}]$ – матрица полного ранга, следовательно, поскольку данная матрица квадратная, это означает, что она невырожденная. Отсюда следует, что существует обратная матрица $[\Phi \vdots \tilde{\Phi}]^{-1}$. Тогда неизвестные $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{f}$ определяются из (2) единственным образом, т.е. каждому вектору $\boldsymbol{\tau}$ соответствует единственная пара векторов $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{f}$:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{f} \end{pmatrix} = -[\Phi \vdots \tilde{\Phi}]^{-1}\boldsymbol{\tau}.$$

Для механической системы, допускающей заклинивание, уравнения равновесия (2) могут удовлетворяться при любых $\boldsymbol{\tau}$. Выберем такой вектор $\boldsymbol{\tau}$, который совпадает с первым столбцом матрицы $\tilde{\Phi}$. Несложно убедиться, что уравнениям (2) при выбранном $\boldsymbol{\tau}$ удовлетворяют $\boldsymbol{\lambda}^T = (0; 0; \ldots; 0)$ и $\boldsymbol{f}^T = (-1; 0; \ldots; 0)$. Согласно сказанному выше, данные $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{f}$ единственные. Однако эти $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{f}$ не удовлетворяют закону Кулона: очевидно, что соотношение $f_1 = \mu_1\lambda_1$, $-\overline{\mu}_1 \leq \mu_1 \leq \overline{\mu}_1$, не выполняется ни при каком μ_1.

Таким образом, если $[\Phi \vdots \tilde{\Phi}]$ — матрица полного ранга, то при $k = 2n$ можно задать такой вектор $\boldsymbol{\tau}$, для которого не существует $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{f}$, одновременно удовлетворяющих и уравнениям равновесия данной системы, и закону Кулона. Это означает, что в случае $k = 2n$ рассматриваемая система не допускает заклинивание. Следовательно, если в уравнениях равновесия (2) механической системы с n фрикционными контактами $[\Phi \vdots \tilde{\Phi}]$ — матрица полного ранга, то достаточным условием, при котором эта система не допускает заклинивание, является условие (6). □

Лемма 3. Чтобы механическая система с n фрикционными контактами *не допускала заклинивание*, достаточно, чтобы матрица $[\Phi \vdots \tilde{\Phi}]$ в уравнениях равновесия (2) была матрицей неполного ранга.

Доказательство леммы. Согласно лемме 1 в случае $k > 2n$ система не допускает заклинивание независимо от ранга матрицы $[\Phi \vdots \tilde{\Phi}]$. Следовательно, достаточно рассмотреть случай $k \leq 2n$. Доказать, что при $k \leq 2n$ система, для которой $[\Phi \vdots \tilde{\Phi}]$ — матрица неполного ранга, не допускает заклинивание, можно по аналогии с доказательством леммы 1. Но можно доказать это и иначе.

Уравнения равновесия (2) — это система k линейных уравнений с $2n$ неизвестными. Такая система, как хорошо известно (см., например, [9, с. 46]), имеет решение в том и только в том случае, если матрицы $[\Phi \vdots \tilde{\Phi}]$ и $[\Phi \vdots \tilde{\Phi} \vdots -\boldsymbol{\tau}]$ имеют один и тот же ранг. В противном случае система уравнений (2) несовместна.

В данном случае $[\Phi \vdots \tilde{\Phi}]$ — матрица неполного ранга, иначе говоря, ее ранг меньше k. Что касается матрицы $[\Phi \vdots \tilde{\Phi} \vdots -\boldsymbol{\tau}]$, то вектор $\boldsymbol{\tau}$ всегда можно выбрать так, чтобы ранг данной матрицы был по крайней мере на единицу больше ранга матрицы $[\Phi \vdots \tilde{\Phi}]$. Таким образом, в случае, когда $[\Phi \vdots \tilde{\Phi}]$ — матрица неполного ранга, всегда можно выбрать такой вектор $\boldsymbol{\tau}$, при котором уравнения равновесия (2) не могут быть удовлетворены. Т.е. если $[\Phi \vdots \tilde{\Phi}]$ — матрица неполного ранга, то рассматриваемая система не допускает заклинивание. □

4. Необходимые условия и достаточные условия заклинивания. Число независимых обобщенных координат q_j, $j = \overline{1,\ k}$, в уравнениях (1), а следовательно, и в (2) ограничено снизу числом фрикционных контактов системы: $k > n$. Действительно, при освобождении системы от каждого из n фрикционных контактов можно записать, по крайней мере, одно скалярное уравнение связи (т.е. ввести, по крайней мере, одну дополнительную обобщенную координату). Следовательно, число степеней свободы рассматриваемой системы не превышает $k - n$. Механическая система может совершать движение только в том случае, когда она имеет хотя бы одну степень свободы, т.е. когда $k - n > 0$. Очевидно, что данный вывод не зависит от формы записи уравнений движения/равновесия механической системы.

Из данных рассуждений, а также из лемм 1–3 вытекает следующая лемма.

Лемма 4. Чтобы механическая система с n фрикционными контактами *допуска-*

ла заклинивание, необходимо, чтобы матрица $[\Phi \vdots \tilde{\Phi}]$ была матрицей полного ранга и выполнялось условие

$$n < k < 2n. \tag{7}$$

(Отметим, что в работе P.E. Dupont и S.P. Yamajako [8] условия, подобные условиям леммы 4, отсутствуют и теорема 2 [8] сформулирована для *всех* систем с кулоновым трением.)

Для механических систем, удовлетворяющих условиям леммы 4, сформулируем и докажем две теоремы: теорему о необходимых условиях и теорему о достаточных условиях, при которых такие системы допускают заклинивание.

Теорема 1. Чтобы механическая система с n фрикционными контактами допускала заклинивание *необходимо*, чтобы существовали такие коэффициенты трения μ_i^0, $-\overline{\mu}_i \le \mu_i^0 \le \overline{\mu}_i$, $i = \overline{1,\ n}$, при которых $[\Phi + \tilde{\Phi}M]$ является матрицей неполного ранга.

Доказательство. Пусть механическая система допускает заклинивание, т.е. пусть ее уравнения равновесия (3) могут удовлетворяться при любых $\boldsymbol{\tau}$. Зададим такой вектор $\boldsymbol{\tau}$, чтобы хотя бы один из его компонентов был ненулевой. Тогда для выбранного $\boldsymbol{\tau}$ уравнения (3) удовлетворяются при некотором, очевидно, ненулевом векторе нормальных реакций $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^+$ и некоторой матрице $M = M^+ = \mathrm{diag}\{\mu_i^+\}$, $-\overline{\mu}_i \le \mu_i^+ \le \overline{\mu}_i$, $i = \overline{1,\ n}$:

$$[\Phi + \tilde{\Phi}M^+]\boldsymbol{\lambda}^+ + \boldsymbol{\tau} = 0. \tag{8}$$

Соответственно для вектора $-\boldsymbol{\tau}$ уравнения (3) удовлетворяются при некотором ненулевом векторе $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^-$ и матрице $M = M^- = \mathrm{diag}\{\mu_i^-\}$, $-\overline{\mu}_i \le \mu_i^- \le \overline{\mu}_i$, $i = \overline{1,\ n}$:

$$[\Phi + \tilde{\Phi}M^-]\boldsymbol{\lambda}^- - \boldsymbol{\tau} = 0. \tag{9}$$

Сложим соответственно левые и правые части соотношений (8) и (9):

$$\Phi(\boldsymbol{\lambda}^+ + \boldsymbol{\lambda}^-) + \tilde{\Phi}(M^+\boldsymbol{\lambda}^+ + M^-\boldsymbol{\lambda}^-) = 0. \tag{10}$$

Поскольку в уравнениях (10) векторы $\boldsymbol{\lambda}^+$ и $\boldsymbol{\lambda}^-$ ненулевые, а их компоненты неотрицательные ($\lambda_i^\pm \ge 0$, $i = \overline{1,\ n}$) в силу того, что связи во фрикционных контактах односторонние, то вектор $(\boldsymbol{\lambda}^+ + \boldsymbol{\lambda}^-)$ ненулевой и его компоненты также неотрицательные. Рассмотрим вектор $(M^+\boldsymbol{\lambda}^+ + M^-\boldsymbol{\lambda}^-)$. Введем обозначение

$$\mu_i^0 = \frac{\mu_i^+\lambda_i^+ + \mu_i^-\lambda_i^-}{\lambda_i^+ + \lambda_i^-}, \qquad i = \overline{1,\ n},$$

с помощью которого представим компоненты вектора $(M^+\boldsymbol{\lambda}^+ + M^-\boldsymbol{\lambda}^-)$ в виде

$$\mu_i^+\lambda_i^+ + \mu_i^-\lambda_i^- = \mu_i^0(\lambda_i^+ + \lambda_i^-), \qquad i = \overline{1,\ n}. \tag{11}$$

Поскольку вектор $(\boldsymbol{\lambda}^+ + \boldsymbol{\lambda}^-)$ ненулевой и значения нормальных реакций $\lambda_i^\pm$ неотрицательные, то для всех $i = \overline{1,\ n}$ можно записать

$$|\mu_i^0| = \left|\frac{\mu_i^+\lambda_i^+ + \mu_i^-\lambda_i^-}{\lambda_i^+ + \lambda_i^-}\right| = \frac{|\,\mu_i^+\lambda_i^+ + \mu_i^-\lambda_i^-|}{\lambda_i^+ + \lambda_i^-} \le \frac{|\,\mu_i^+|\lambda_i^+ + |\,\mu_i^-|\lambda_i^-}{\lambda_i^+ + \lambda_i^-} \le$$

$$\le \frac{\max\{|\,\mu_i^+|\,,\ |\,\mu_i^-|\}(\lambda_i^+ + \lambda_i^-)}{\lambda_i^+ + \lambda_i^-} = \max\{|\,\mu_i^+|\,,\ |\,\mu_i^-|\} \le \overline{\mu}_i\ ,$$

т.е.

$$-\overline{\mu}_i \leq \mu_i^0 \leq \overline{\mu}_i, \qquad i = \overline{1,\ n}.$$

Используя выражения (11), запишем соотношения (10) в виде

$$[\Phi + \tilde{\Phi} M^0](\boldsymbol{\lambda}^+ + \boldsymbol{\lambda}^-) = 0, \tag{12}$$

где $M^0 = \mathrm{diag}\{\mu_i^0\}$, $-\overline{\mu}_i \leq \mu_i^0 \leq \overline{\mu}_i$, $i = \overline{1,\ n}$. Матрица $[\Phi + \tilde{\Phi} M^0]$ содержит k строк и n столбцов, причем согласно лемме 4 необходимо, чтобы $k > n$. Тогда, поскольку вектор $(\boldsymbol{\lambda}^+ + \boldsymbol{\lambda}^-)$ ненулевой, из (12) следует, что $[\Phi + \tilde{\Phi} M^0]$ — матрица неполного ранга.

Таким образом, если механическая система допускает заклинивание, то существуют коэффициенты трения μ_i^0, $-\overline{\mu}_i \leq \mu_i^0 \leq \overline{\mu}_i$, $i = \overline{1,\ n}$, при которых матрица $[\Phi + \tilde{\Phi} M] = [\Phi + \tilde{\Phi} M^0]$ является матрицей неполного ранга. □

Теорема 2. Чтобы механическая система с n фрикционными контактами допускала заклинивание *достаточно*, чтобы:

1. Существовали коэффициенты трения μ_i^0, $i = \overline{1,\ n}$, при которых матрица $[\Phi + \tilde{\Phi} M] = [\Phi + \tilde{\Phi} M^0]$ является матрицей неполного ранга (т.е. ее ранг меньше n), причем $-\overline{\mu}_i < \mu_i^0 < \overline{\mu}_i$ для всех $i = \overline{1,\ n}$.

Отметим, что при выполнении этого условия существует ненулевой вектор $\boldsymbol{\lambda}^0$, такой, что

$$[\Phi + \tilde{\Phi} M^0]\boldsymbol{\lambda}^0 = 0. \tag{13}$$

Если $\mathrm{rank}[\Phi + \tilde{\Phi} M^0] = n - 1$, то существует единственный набор таких векторов, которые различаются между собой только произвольным постоянным множителем. Если же $\mathrm{rank}[\Phi + \tilde{\Phi} M^0] = n - 2$, то существует два таких набора векторов, причем любые два вектора, принадлежащие разным наборам, линейно независимы, и так далее.

2. Все компоненты хотя бы одного из существующих линейно независимых векторов $\boldsymbol{\lambda}^0$ были строго положительными, т.е. $\lambda_i^0 > 0$ для всех $i = \overline{1,\ n}$.

Примечание. Условия теоремы 2, очевидно, отличаются от условий теоремы 1. Если теорема 1 требует $-\overline{\mu}_i \leq \mu_i^0 \leq \overline{\mu}_i$, $i = \overline{1,\ n}$, то теорема 2 накладывает более жесткое условие $-\overline{\mu}_i < \mu_i^0 < \overline{\mu}_i$, $i = \overline{1,\ n}$, и дополнительное условие $\lambda_i^0 > 0$, $i = \overline{1,\ n}$.

Доказательство. Предположим, что оба условия теоремы выполняются. Покажем, что в этом случае уравнения равновесия данной системы могут быть удовлетворены для любого $\boldsymbol{\tau}$.

Перепишем равенство (13) иначе, введя обозначение $\boldsymbol{f}^0 = M^0 \boldsymbol{\lambda}^0$:

$$\Phi \boldsymbol{\lambda}^0 + \tilde{\Phi} \boldsymbol{f}^0 = 0. \tag{14}$$

Соответственно обозначим $\boldsymbol{f} = M\boldsymbol{\lambda}$ и запишем уравнения равновесия данной механической системы в виде

$$\Phi \boldsymbol{\lambda} + \tilde{\Phi} \boldsymbol{f} + \boldsymbol{\tau} = 0. \tag{15}$$

Представим вектор нормальных реакций $\boldsymbol{\lambda}$ и вектор сил трения $\boldsymbol{f}$ в виде

$$\boldsymbol{\lambda} = a\boldsymbol{\lambda}^0 + \Delta\boldsymbol{\lambda}, \qquad \boldsymbol{f} = a\boldsymbol{f}^0 + \Delta\boldsymbol{f}, \tag{16}$$

где a – произвольное положительное число, $\Delta\boldsymbol{\lambda}$ и $\Delta\boldsymbol{f}$ – произвольные векторы. Подставив выражения (16) в уравнения (15), получим

$$a(\Phi\boldsymbol{\lambda}^0 + \tilde{\Phi}\boldsymbol{f}^0) + \Phi\Delta\boldsymbol{\lambda} + \tilde{\Phi}\Delta\boldsymbol{f} + \boldsymbol{\tau} = 0.$$

В силу (14) последнее соотношение принимает вид

$$\Phi\Delta\boldsymbol{\lambda} + \tilde{\Phi}\Delta\boldsymbol{f} + \boldsymbol{\tau} = 0,$$

или, перейдя к записи, аналогичной (2),

$$[\Phi \vdots \tilde{\Phi}] \begin{pmatrix} \Delta\boldsymbol{\lambda} \\ \Delta\boldsymbol{f} \end{pmatrix} + \boldsymbol{\tau} = 0. \tag{17}$$

В силу леммы 4 необходимо, чтобы в полученных уравнениях (17) матрица $[\Phi \vdots \tilde{\Phi}]$ была матрицей полного ранга и выполнялось неравенство $k < 2n$. Тогда число неизвестных (компонентов векторов $\Delta\boldsymbol{\lambda}$ и $\Delta\boldsymbol{f}$) больше числа скалярных уравнений (17) и при любом $\boldsymbol{\tau}$ эти уравнения разрешимы относительно $\Delta\boldsymbol{\lambda}$ и $\Delta\boldsymbol{f}$. (Заметим, что в силу $k < 2n$ для каждого $\boldsymbol{\tau}$ существует бесконечное множество наборов $\Delta\boldsymbol{\lambda}$ и $\Delta\boldsymbol{f}$, удовлетворяющих уравнениям (17)).

Осталось показать, что условия односторонности связей $\lambda_i \geq 0$, $i = \overline{1,\ n}$, и соотношения закона Кулона $f_i = \mu_i\lambda_i$, $|\,\mu_i| \leq \overline{\mu}_i$, $i = \overline{1,\ n}$, удовлетворяются при любых $\Delta\boldsymbol{\lambda}$ и $\Delta\boldsymbol{f}$, если выполняются оба условия данной теоремы.

Так как по условию **2** $\lambda_i^0 > 0$ для всех $i = \overline{1,\ n}$, а число a в (16) может быть выбрано сколь угодно большим, то его всегда, даже при отрицательных $\Delta\lambda_i$, можно выбрать так, чтобы $\lambda_i \geq 0$, $i = \overline{1,\ n}$. Т.е. при любых $\Delta\boldsymbol{\lambda}$ условие односторонности связей может быть удовлетворено. В частности, можно выбрать число a и таким, чтобы $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1,\ n}$.

Покажем теперь, что $|\,\mu_i| \leq \overline{\mu}_i$, $i = \overline{1,\ n}$. Согласно соотношениям закона Кулона $|\,\mu_i| = f_i/\lambda_i$. Подставив сюда выражения (16), получим $|\,\mu_i| = (af_i^0 + \Delta f_i)/(a\lambda_i^0 + \Delta\lambda_i)$. Считая, что число a выбрано так, чтобы $\lambda_i = a\lambda_i^0 + \Delta\lambda_i > 0$, $i = \overline{1,\ n}$ (выше показано, что это всегда можно сделать), получим

$$\lim_{a\to+\infty} |\,\mu_i| = \lim_{a\to+\infty} \left| \frac{af_i^0 + \Delta f_i}{a\lambda_i^0 + \Delta\lambda_i} \right| = \left| \frac{f_i^0}{\lambda_i^0} \right| = |\,\mu_i^0|\,.$$

По условию **1** данной теоремы $|\,\mu_i^0| < \overline{\mu}_i$, поэтому, очевидно, $|\,\mu_i| \leq \overline{\mu}_i$, $i = \overline{1,\ n}$. Т.е. соотношения закона Кулона также удовлетворяются.

Таким образом, при выполнении условий данной теоремы одновременно удовлетворяются уравнения равновесия исследуемой системы, выполняются условия односторонности связей и соотношения закона Кулона, т.е. данная система допускает заклинивание. □

Заключение. Ранее в работах, посвященных заклиниванию в механических системах твердых тел с кулоновым трением, были исследованы только геометрические условия заклинивания для систем с двумя (см., например, [1–6]) и тремя (см., например, [7]) фрикционными контактами. В данной работе рассмотрены аналитические условия заклинивания в равновесии для произвольных механических систем с n фрикционными контактами. Получен ряд достаточных условий отсутствия заклинивания в таких системах, сформулированы необходимые условия, при которых данные системы допускают заклинивание. Для систем, удовлетворяющих этим необходимым условиям, доказаны две теоремы: 1) о необходимых условиях и 2) о достаточных условиях, при которых такие системы допускают заклинивание.

1. *S. Simunovic.* Force information in assembly processes // Proc. 5th International Symposium of Industrial Robots. – 1975. – P. 415 – 431.
2. *D.E. Whitney.* Quasi-static assembly of compliantly supported rigid parts // J. of Dynamic Systems, Measurement and Control. – 1982. – № 104. – P. 65 – 77.
3. *M.T. Mason.* 23. Assembly. Mechanics of Manipulation / Carnegie Mellon. – www.cs.rpi.edu/~trink/Courses/RobotManipulation/lectures/lecture23.pdf.
4. *J.P. Baartman.* Automation of assembly operations on parts. – www.wbmt.tudelft.nl/pto/research/publications/Dissertation_Baartman/geom.frm.html.
5. *M. Callegari, A. Suardi.* On the force-controlled assembly operations of a new parallel kinematics manipulator / Department of Mechanics, Universita Politecnica delle Marche, Ancona, Italy. – www.dipmec.univpm.it/meccanica/www.staff/articoli/2003%20MED%20Rhodes.pdf.
6. *Жечев М.М., Скатенок М.В.* Механические системы с кулоновым трением, допускающие заклинивание // Техническая механика. – № 1. – 2005. – С. 22 – 35.
7. *Жечев М.М., Скатенок М.В.* Явление "wedging" в системах с сухим трением // Механика твердого тела. – Вып. 34. – 2005. – С. 194 – 198.
8. *P.E. Dupont and S.P. Yamajako.* Jamming and Wedging in Constrained Rigid-body Dynamics // Proc. IEEE Int. conf. on Robotics and Automation. – 1994. – P. 2349 – 2354.
9. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1978. – 832 с.

Ин-т техн. механики НАНУ и НКАУ, Днепропетровск
skatenok@yahoo.co.uk

Получено 25.10.05