

УДК 531.36:534.1

©2005. В.И. Гончаренко, В.А. Гончаренко

**О КЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ МЕХАНИКИ
БОБЫЛЕВА – JELLETT'a – MORIN'a – PAINLEVÉ**

Задача о скольжении материальной точки по неподвижной наклонной плоскости с трением является частным случаем задачи баллистики. Подчеркивается, что существенный вклад в ее решение внесли J.H. Jellett, A.J. Morin, Д.К. Бобылёв, P. Painlevé и E. Collignon. Определены условия существования множества предельных положений материальной точки и указаны свойства этого множества, аффинно эквивалентного одной из замечательных кривых – улитке Паскаля.

Введение. Одной из классических задач механики является задача о скольжении тяжелой материальной точки по неподвижной наклонной плоскости при наличии трения. Ее решение и анализ свойств движения можно найти во многих учебниках по теоретической механике: Д.К. Бобылев [1, с. 221; 2, с. 221; 3, с. 221], Г.К. Суслов [4, с. 264; 5, с. 118; 6, с. 227; 7, с. 227], С.Г. Петрович [8, с. 170], Н.В. Розе [9, с. 350], А.Д. Билимович [10, с. 243], а также E. Collignon [11, p. 221], P. Appell [12, p. 352; или 13, с. 389; 14, с. 324] (со ссылкой на A.J. Morin), P. Appell и S. Dautheville [15, p. 668; или 16, с. 317], P. Painlevé [17, p. 71; или 18, с. 110], E.J. Routh [19, p. 101], H. Lorenz [20, S. 122; или 21, с. 202], G. Hamel [22, S. 91], E.T. Whittaker [23, S. 254; 24, p. 240; 25, p. 240; или 26, с. 270; 27, с. 319]).

Также следует отметить работы [28–34]. П.В. Воронец рассмотрел данную задачу для произвольной поверхности и свел ее к задаче интегрирования дифференциального уравнения, определяющего траекторию движения, и последующего определения времени движения в виде квадратуры [28, 29].

Более общую задачу о движении тяжелого шара по наклонной плоскости со скольжением привел Н.Е. Жуковский [30, с. 289; 31, с. 538]. При наличии скольжения в точке контакта закон изменения движения точки касания по своей форме совпадает с уравнениями движения материальной точки по наклонной плоскости. Автором определено время движения шара со скольжением. Это время является и временем скольжения материальной точки до остановки в нашей задаче.

В связи с проблемой влияния анизотропного трения на поведение механизмов задачей о движении тела по плоскости с таким трением занимался В.Д. Ванторин [32, с. 94]. В частности, им рассмотрен случай изотропного трения при движении материальной точки под действием постоянной силы, то есть рассматриваемая нами задача. В результате выполненного исследования автором получены параметрические уравнения траектории движущейся точки и схематически изображены траектории движения этой точки при различных начальных условиях, причем без каких-либо ссылок на классические работы по механике.

Как частный случай задачи баллистики, эта задача подробно разобрана в курсе

Напомним, что лекции Д.К. Бобылёва по механике в Петербургском университете посещали А.М. Ляпунов, Г.К. Суслов, И.В. Мещерский. А.М. Ляпунов и Г.К. Суслов – товарищи-однокурсники – закончили Петербургский университет с золотыми медалями. Учениками Г.К. Суслова были П.В. Воронец и А.Д. Билимович.

теоретической механики С. Якоб [33, p. 395].

Данная задача приводится в качестве упражнения в [34, с. 56]. И.Е. Иродов получил зависимость скорости движения точки в критическом случае, о есть при особом значении коэффициента трения, когда с ростом времени скорость стремится к конечному ненулевому пределу. Принятое значение коэффициента трения является бифуркационным, так как при любом малом отличии коэффициента трения от принятого значения при возрастании времени скорость либо приближается к нулю, либо неограниченно увеличивается.

В качестве примера компьютерного моделирования движения тел при наличии сухого трения эту задачу выбрал М.М. Беляев [35].

Вполне возможно, что данная задача рассмотрена и в более ранних работах или изложена в чьих-либо лекциях. Например, параметрическое уравнение траектории движения точки в этой задаче получил J.H. Jellett [36, p. 94] и выполнил качественное исследование характера траектории в зависимости от соотношения между углом трения и углом наклона плоскости. Интерес к данной задаче был обусловлен тем, что она является частным случаем задачи баллистики при постоянной по величине силе сопротивления. Этим объясняется ряд ее характерных свойств, например, сохранение знака кривизны траектории движения точки и характер ее асимптотического поведения. В связи с рассматриваемой задачей следует отметить исследования в области баллистики Л. Эйлера, Н.В. Маиевского [37], Н.А. Забудского [38], С. Cranz [39], П.О. Сомова [40, с. 262], Б.Н. Окунева [41], Д.А. Граве [42, с. 27], Т. Levi-Civita и U. Amaldi [43, p. 16], а также эквивалентную задачу о занывании тела в воду А.И. Некрасова [44, с. 196].

1. Постановка задачи. В баллистике важным понятием является область достижимости при фиксированной по величине начальной скорости: это максимальная дальность по горизонтали и, например, при пренебрежении сопротивлением воздуха, так называемая парабола безопасности в вертикальной плоскости. Соответственно границей области безопасности в горизонтальной плоскости является окружность. Определение максимальной дальности вдоль наклонной прямой можно найти у Н.Д. Брашмана [45, с. 46] и у И.И. Рахманинова [46, с. 159], а также у F. Kraft [47, S. 109], J.B. Lock [48, p. 120], Н.В. Маиевского [37, с. 66], S.L. Loney [49, p. 180], E.J. Routh [19, p. 85], A.E.H. Love [50, p. 46; 51, p. 31], J.H. Jeans [52, p. 209] и у W.D. MacMillan [53, p. 262]; оригинальное решение имеется у Н. Lamb [54, p. 72; или 55, с. 68]). Зона обстрела на наклонной плоскости ограничена эллипсом, один из фокусов которого расположен в точке выстрела. Действительно, поскольку в вертикальной плоскости область безопасности отделяет парабола безопасности, то в пространстве границей области достижимости служит параболоид вращения. Любое его сечение наклонной плоскостью является эллипсом. Соответствующая задача, часто с подробными указаниями, имеется у E.J. Routh [19, p. 89], S.L. Loney [49, p. 194], A.E.H. Love [50, p. 68; 51, p. 58], J.H. Jeans [52, p. 218] и у Н. Lamb [54, p. 94; или 55, с. 87]).

Точно так же в рассматриваемой задаче о скольжении точки по наклонной плоскости представляет интерес изучить область ее предельных положений при заданном значении величины начальной скорости.

2. Уравнения движения системы. Обратимся к решению, изложенному в широко распространенной монографии Г.К. Сулова [7, с. 227]. В основном будем придерживаться обозначений оригинала. Данное решение представлено в параметрическом виде. Обозначим точку исходного положения через O и направим ось Ox вниз по наклон-

ной плоскости вдоль линии наибольшего ската. Ось Oy направим по горизонтали так, чтобы при виде сверху система координат была правой, рис. 1.

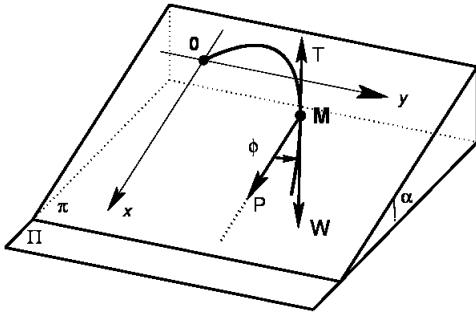


Рис. 1. Схема движения точки по плоскости.

Все силы, действующие на рассматриваемую материальную точку M , пропорциональны ее массе, поэтому уравнение движения точки по наклонной плоскости в проекциях на оси Ox и Oy может быть записано в виде системы, не содержащей величину массы точки:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \gamma - \gamma \frac{K}{W} \dot{x}, \\ \ddot{y} &= -\gamma \frac{K}{W} \dot{y}, \end{aligned} \quad (1)$$

с начальными условиями при $t = 0$: $x(0) = y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = U_0$ и $\dot{y}(0) = V_0$. В этих уравнениях $\gamma = g \sin \alpha$ и $K = f \operatorname{ctg} \alpha$ являются параметрами, а через $W = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ обозначена величина скорости движения точки. (Здесь g — ускорение свободного падения, f — коэффициент трения, α — угол наклона плоскости, то есть острый угол между горизонтальной и наклонной плоскостями, что означает $\gamma > 0$ и $K > 0$.) На рис. 1 изображены силы, действующие на точку M в плоскости π : составляющая силы тяжести $P = m\gamma$ и сила трения $T = Km\gamma$.

3. Качественное описание характера движения. Поскольку поведение рассматриваемой механической системы симметрично относительно линии наибольшего ската (оси Ox), то будем изучать движение точки в области $y \geq 0$, т. е. при $V_0 > 0$.

В этом случае в соответствии со вторым уравнением системы (1) величина горизонтальной составляющей $V(t) = \dot{y}$ скорости движения $W(t)$ материальной точки монотонно убывает со временем пока $V(t) > 0$. Действительно, пусть $V_0 > 0$, тогда $W(0) = W_0 > 0$, и пока функция времени $W(t)$ не обращается в нуль, в соответствии со вторым уравнением системы (1), имеем $V = V_0 \exp\left(-\gamma K \int_0^t \frac{dt}{W(t)}\right)$. Это означает, что в процессе движения, пока $W(t) > 0$, функция $V(t)$ сохраняет постоянный знак. В частности, на основании предположения о том, что $V_0 > 0$, в случае, пока $W(t) > 0$, значения функции $V(t)$ являются положительными. Если в некоторый момент времени T функция $W(T) = 0$, тогда $U(T) = V(T) = 0$, и из физического смысла задачи следует, что во все последующее время (при $t > T$) величина $V(t) \equiv 0$ и значение $U(t) \geq 0$, а именно, $U(t) \equiv 0$ при $K \geq 1$ и $U(t) > 0$ при $0 < K < 1$.

Так же на основании второго уравнения системы (1) можно заключить, что пока значение $V \neq 0$, величина ее производной $\dot{V} < 0$, то есть горизонтальная составляющая скорости движения материальной точки $V(t)$ монотонно убывает со временем.

Введем в рассмотрение (рис. 1) угол φ от оси Ox до направления скорости движения материальной точки по наклонной плоскости, значение которого в начальный момент времени $\varphi(0) = \varphi_0$: $0 < \varphi_0 < \pi$. Покажем, что величина угла $\varphi(t)$ монотонно убывает с течением времени. Действительно, полная производная по времени переменной $p = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, которая в начальный момент времени $p(0) = \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} = p_0 > 0$, имеет вид: $\dot{p} = \frac{-\gamma}{W + U} \frac{V}{W}$. Из этого выражения следует, что, пока значение $V > 0$, величина переменной $p(t)$, а значит и угла $\varphi(t)$ монотонно убывают с течением времени. Поэтому,

с учетом того, что функция $V(t)$ сохраняет постоянный знак в процессе движения, параметр p может быть принят за независимую переменную при определении закона движения $t(p)$, $W(p)$, $x(p)$ и $y(p)$.

О скорости убывания функции $V(t)$ можно сказать следующее. Поскольку, в силу системы (1) $\dot{W} = \gamma \frac{U}{W} - \gamma K$, то справедлива оценка $-\gamma - \gamma K \leq \dot{W} \leq \gamma - \gamma K$, и поэтому $W_0 - \gamma(1 + K)t \leq W \leq W_0 + \gamma(1 - K)t$.

Отсюда получаем оценку снизу времени T движения до возможной остановки точки $\frac{W_0}{\gamma(K + 1)} \leq T$ и следующие оценки горизонтальной составляющей скорости движения точки по наклонной плоскости.

Если $0 < K < 1$, то $V < V_0 \left(1 + \gamma \frac{1 - K}{W_0} t\right)^{\frac{K}{K-1}}$, и поэтому $V \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Если $K = 1$, то $V \leq V_0 \exp\left(-\gamma \frac{K}{W_0} t\right)$, и значит $V \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Если $K > 1$, тогда при $t \geq t_1 = \frac{W_0}{\gamma(K - 1)} > 0$, величина $W \equiv 0$, и значит $U \equiv V \equiv 0$, то есть точка останавливается за конечное время $T \leq t_1$; при $0 < t < t_1$, значение $W < W_0 - \gamma(K - 1)t$. Поэтому $V < W_0 - \gamma(K - 1)t$. Эта оценка может быть улучшена на основании системы (1): $V < V_0 \left(1 - \gamma \frac{K - 1}{W_0} t\right)^{\frac{K}{K-1}}$.

На основании приведенных оценок для всех значений параметра K величина $V \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Причем, как отмечено выше, убывание величины V происходит монотонно. В случае $K > 1$ справедлива двухсторонняя оценка времени движения точки до остановки $\frac{W_0}{\gamma(K + 1)} \leq T \leq \frac{W_0}{\gamma(K - 1)}$.

Система уравнений (1) имеет интеграл $2\frac{U}{V} = \frac{1}{CV^{1/K}} - CV^{1/K}$, или $\frac{U}{V} = \frac{2CV^{1/K}}{1 - C^2V^{2/K}}$.

Поскольку $\operatorname{tg} \varphi = \frac{U}{V}$ и $V \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то на основании указанного интеграла угол $\varphi \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, в процессе движения материальной точки по наклонной плоскости значение параметра φ монотонно меняется от φ_0 до 0.

4. Аналитическое решение и анализ. Закон движения точки по наклонной плоскости, с учетом вышесказанного, следующий [7, с. 227]:

$$\begin{aligned} \varphi &\in (0, \varphi_0], \\ p &= \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, \\ W &= 0 + W_0 C (p^{K-1} + p^{K+1}), \\ t &= T - \frac{W_0}{\gamma} C \left(\frac{p^{K-1}}{K-1} + \frac{p^{K+1}}{K+1} \right), \\ x &= X - \frac{W_0^2}{\gamma} C^2 \left(\frac{p^{2K-2}}{2K-2} - \frac{p^{2K+2}}{2K+2} \right), \\ y &= Y - 2 \frac{W_0^2}{\gamma} C^2 \left(\frac{p^{2K-1}}{2K-1} + \frac{p^{2K+1}}{2K+1} \right). \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $C = (p_0^{K-1} + p_0^{K+1})^{-1}$, $T = \frac{W_0}{\gamma} \frac{K + \cos \varphi_0}{K^2 - 1}$ и

$$X = \frac{W_0^2}{\gamma} \frac{1 + \xi}{4K^2 - 4}, \quad Y = \frac{W_0^2}{\gamma} \frac{\eta}{4K^2 - 1}, \quad (3)$$

где

$$\xi = \cos \varphi_0 (\cos \varphi_0 + 2K), \quad \eta = \sin \varphi_0 (\cos \varphi_0 + 2K). \quad (4)$$

Первые слагаемые в выражениях для W , t , x и y имеют ясный физический смысл. Если величина $K > 1$ (т. е. точка на наклонной плоскости может оставаться неподвижной), тогда, как показано ранее, материальная точка останавливается ($W = 0$) через конечное время T . Точка остановки имеет координаты X и Y .

Отметим, что постоянная интегрирования C зависит только от величины начального угла направления движения точки по наклонной плоскости φ_0 , и поэтому, на основании (2), время движения из начального положения до достижения определенного значения угла φ пропорционально начальной скорости W_0 , а координаты соответствующей точки пропорциональны квадрату этой скорости W_0^2 . Это означает подобие семейства траекторий. Коэффициент подобия равен квадрату начальной скорости W_0^2 . (Имеется аналогия с движением точки вдоль прямой с постоянным ускорением.)

В данной задаче, на основании теоремы об изменении кинетической энергии, выполняется соотношение [20, S. 122; или 21, с. 207]:

$$\frac{W_0^2}{2} = \frac{W^2}{2} - \gamma x + \gamma K s.$$

Здесь последнее слагаемое характеризует работу, совершаемую силой трения на пройденном пути s . Если $K \neq 1$, то

$$s = S - \frac{W_0^2}{\gamma} C^2 \left(\frac{p^{2K-2}}{2K-2} + \frac{p^{2K}}{K} + \frac{p^{2K+2}}{2K+2} \right),$$

где

$$S = \frac{W_0^2}{\gamma K} \left[\frac{1 + \cos \varphi_0 (\cos \varphi_0 + 2K)}{4(K^2 - 1)} + \frac{1}{2} \right]. \quad (5)$$

При $K > 1$ величина S является длиной пути, проходимого точкой по наклонной плоскости до остановки. В частности, после остановки $\frac{W_0^2}{2} = -\gamma X + \gamma K S$, что несложно проверить непосредственно. Отметим, что зависимость $S(X)$ является линейной, и величины X и S монотонно убывают при изменении угла φ_0 в интервале от 0 до π .

Во всех изданиях Г.К. Сусллова [4–7] повторяется опечатка при определении зависимости $x(p)$. Этот недочет исправлен в [8, 9] и у ученика Г.К. Сусллова — А.Д. Билимовича [10]. Также правильная запись имеется у учителя Г.К. Сусллова — Д.К. Бобылёва [1–3].

Особый случай $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_0 = \pi$ не описывается уравнениями (2) и должен рассматриваться отдельно. При этом $\varphi \equiv 0$ во время движения вниз и $\varphi \equiv \pi$ во время движения вверх, т. е. задача упрощается до задачи прямолинейного движения точки.

Кроме того, при такой записи законов движения (2) материальной точки значения параметров $K = 1$ и $K = \frac{1}{2}$ являются особыми. Для этих значений параметра K все слагаемые в (2), знаменатели которых обращаются в нуль, должны быть заменены на слагаемые вида $\ln p$. Например, соответствующее выражение величины $t(p)$ приведено в книге [11, р. 221], а выражения величин $t(p)$ и $y(p)$ приведено в [22, S. 91]. В качестве

примера данная задача рассмотрена при $K = 1$ в [56, с. 257]. Полное исследование решения системы (1) для всех значений параметра K выполнено в [57].

Случай, когда $K \leq 1$ ($f \leq \operatorname{tg} \alpha$), условно соответствует малой силе трения. Это означает, что точка не может оставаться неподвижной на наклонной плоскости после произвольно малых возмущений. При этом хотя бы одна из координат неограниченно возрастает вместе со временем движения точки.

В другом случае, когда $K > 1$ ($f > \operatorname{tg} \alpha$, то есть реализуется "большое трение") точка может находиться в покое на наклонной плоскости. Соответственно, при этом точка приходит в стационарное состояние за конечное время T . После чего она остается неподвижной на наклонной плоскости в точке с координатами (X, Y) .

На основании изложенного, задача о множестве предельных положений (точек остановок) рассматривается только при $K > 1$, то есть при относительно большой силе трения.

В этот случае, как отмечено выше, движущаяся точка за конечное время T приходит в стационарное состояние (X, Y) , причем в этой точке остановки траектория движения материальной точки касается линии наибольшего ската. Если рассмотреть уравнение траектории при $t \rightarrow -\infty$, то есть при $p \rightarrow +\infty$, то в этом случае $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow -\infty$ и $y/x \rightarrow 0$.

Следовательно уравнение траектории не имеет асимптот при $K > 1$. Этот факт дополняет исследования Н.А. Забудского [38, с. 130] об условиях существования асимптот у баллистической траектории.

Отметим, что наиболее быстро прекращается движение точки на плоскости при ее движении по линии наибольшего подъема ($\varphi_0 = \pi$). В этом случае она приходит в предельную точку с координатой $X = -\frac{W_0^2}{2\gamma(K+1)}$. Наибольшее время движения точки до остановки реализуется при ее движении по линии наибольшего ската ($\varphi_0 = 0$) в наиболее удаленную от начала координат предельную точку: $X = \frac{W_0^2}{2\gamma(K-1)}$. Причем, $S = \frac{X}{K} + \frac{W_0^2}{2\gamma K}$ и при любом промежуточном значении угла φ_0 ($0 < \varphi_0 < \pi$) на основании (5) справедливы соотношения $\frac{W_0^2}{2\gamma(K+1)} < S < \frac{W_0^2}{2\gamma(K-1)}$.

Заметим, что при достаточно малом отличии величины параметра K от 1 в некотором интервале значений угла φ_0 выполнено соотношение $\sqrt{X^2 + Y^2} < \frac{W_0^2}{2\gamma(K+1)} < S$.

5. Пример. Для иллюстрации рассмотрен пример в случае $\gamma = 1$ и $K = 1,5$ (рис. 2). На рисунке изображена правая сторона симметричного множества предельных положений материальной точки на наклонной плоскости после ее выброса из начала координат со скоростью $W_0 = 1$. Представлено также несколько траекторий движения этой точки для набора значений начальных углов выброса: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi/6$, $\varphi_3 = \pi/3$, $\varphi_5 = \pi/2$, $\varphi_6 = 2\pi/3$, $\varphi_7 = 5\pi/6$ и $\varphi_8 = \pi$, а также для угла φ_4 : $\cos \varphi_4 = 1/(\sqrt{K^2 + 2} + K)$, при котором достигается максимальная дальность вдоль горизонтальной оси ординат Oy . Предельные точки помечены знаком \odot на этих траекториях. Знаком \otimes помечена такая предельная точка для случая φ_4 . Следует отметить, что

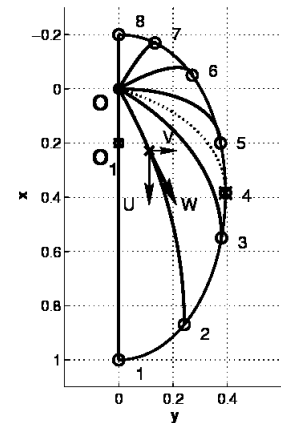


Рис. 2. Траектории движения и предельные точки.

абсцисса предельной точки для случая $\varphi = \varphi_5 = \pi/2$ в соответствии с (4) совпадает со смещением начала новой системы координат $O_1\xi\eta$.

6. Описание множества предельных состояний. Если перейти к координатам ξ и η по формулам линейного преобразования (3), тогда на основании (4) множество точек остановок $(\xi(p), \eta(p))$ запишется в полярных координатах уравнением $\rho = \cos \varphi_0 + 2K$.

Данное уравнение, как функция начального угла направления движения точки по наклонной плоскости φ_0 , описывает кривую, которая называется улиткой

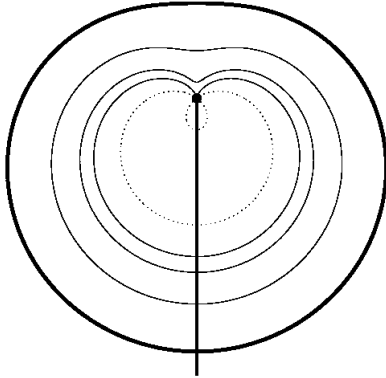


Рис. 3. Семейство улиток Паскаля.

Паскаля. На рис. 3 представлено семейство улиток Паскаля при $2K = 0,6$ (проведена пунктиром), $2K = 1,0$ (кардиоида), $2K = 1,2$, $2K = 1,6$ и $2K = 2,2$ (выделена жирной линией).

Вследствие исходного предположения о величине параметра K , значение $2K > 2$. При таком сочетании параметров данная кривая является выпуклой. Поэтому множество точек остановок в исходных координатах также является выпуклым. Соответственно, с учетом характера движения точки перед ее остановкой ($\varphi = 0$), нижняя часть множества остановок является одновременно границей области достижимости, а его верхняя часть вложена в область достижимости на наклонной

плоскости точкой, выбрасываемой из начала координат с постоянной скоростью.

Таким образом, любопытной особенностью классической задачи о скольжении тяжелой материальной точки по неподвижной наклонной плоскости с трением является то, что множество точек остановок (при фиксированном значении начальной скорости) аффинно эквивалентно одной из замечательных кривых – улитке Паскаля (конхоиде окружности с полюсом в одной из ее точек). Более детально, множество точек остано-

вок после смещения вдоль оси Ox вниз на $\frac{W_0^2}{\gamma(4K^2 - 4)}$ и сжатия вдоль этой же оси в

$\frac{4K^2 - 1}{4K^2 - 4} > 1$ раз представляет улитку Паскаля. Причем эта кривая обладает свойством выпуклости, то есть конхоида не имеет точек перегиба. Также следует отметить, что материальная точка дольше всего движется по линии наибольшего ската (вниз) и проходит при этом наибольший путь, а быстрее всего достигает верхнего положения при движении по линии наибольшего подъема (вверх) и проходит при этом наименьший путь; это время движения и этот путь монотонно убывают от наибольших значений до наименьших по мере изменения направления начального движения точки.

7. Заключение. Д.К. Бобылёв, А.Ж. Morin, J.H. Jellett и Р. Painlevé были одними из первых, кто рассмотрел задачу о скольжении тяжелой материальной точки по неподвижной наклонной плоскости с трением.

А.Ж. Morin дал качественное описание поведения такой системы. J.H. Jellett привел частичное решение данной задачи и качественно охарактеризовал поведение траекторий движения точки в этой задаче. Д.К. Бобылёв получил аналитическое решение данной задачи. Р. Painlevé в своем известном труде использовал эту задачу в качестве примера, благодаря чему она получила широкую популярность.

Дополнительно к вкладу ученых, перечисленных в названии статьи, следует отме-

тить исследование этой задачи, которое выполнил Е. Collignon (1874 г.), автор много-томного классического курса механики.

Любопытной особенностью рассмотренной задачи является то, что множество точек остановок аффинно эквивалентно одной из замечательных кривых — улитке Паскаля.

1. *Бобылев Д.К.* Курс аналитической механики. Ч. 2, вып. 1. – СПб.: Тип. Имп. Академии наук, 1881. – VI+304 с.
2. *Бобылев Д.К.* Курс аналитической механики. Ч. 2. – СПб.: Тип. Имп. Академии наук, 1883. – XVI+885 с.
3. *Бобылев Д.К.* Курс аналитической механики. Ч. 2, вып. 1. – СПб.: Тип. М.М. Стасюлевича, 1888. – VI+304 с.
4. *Суслов Г.К.* Основы аналитической механики. Т. 1. – Киев, 1900. – XIV+543 с.
5. *Суслов Г.К.* Основы аналитической механики. Т. 1. Ч. 2: Динамика точки. – Киев: Изд-е книгопродавца Н.Я. Оглоблина, 1911. – VIII+155 с.
6. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика. – М.; Л.: ОГИЗ Гостехтеоретиздат, 1944. – XVI+655 с.
7. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика. – М.; Л.: ОГИЗ Гостехтеоретиздат, 1946. – XVI+655 с.
8. *Петрович С.Г.* Курс теоретической механики. Ч. 2: Динамика точки. – СПб.: Тип. Министерства путей сообщения (Товарищества И.Н. Кушнерев и К^о), 1912. – III+263 с.
9. *Розе Н.В., ред.* Теоретическая механика. Ч. 1: Механика материальной точки. – Л.; М.: Гостехтеоретиздат, 1932. – 372 с.
10. *Билимович А.Д.* Рационална механика. Т. 1: Механика тачке. – Београд: Научна књига, 1950. – XIX+331 с.
11. *Collignon E.* Traité de Mécanique. P. 3: Dynamique. – Paris: Librairie Hachette et C^{ie}, 1874. – 608 p.
12. *Appell P.* Traité de Mécanique rationnelle. T. 1: Statique. Dynamique du point. – Paris: Gauthier-Villars et Fils, Imprimeurs-Libraires du Bureau des Longitudes, de l'École Polytechnique, 1893. – VI+549 p.
13. *Аппель П.* Руководство теоретической (рациональной) механики. Т. 1: Статика. Динамика точки. – М.: Т-во И.Н. Кушнерев и К^о, 1911. – XXIII+640 с.
14. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 1: Статика. Динамика точки. – М.: Физматгиз, 1960. – 515 с.
15. *Appell P., Dautheville S.* Précis de Mécanique rationnelle. Introduction a l'Étude de la Physique et de la Mécanique appliquée. – Paris: Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire du Bureau des Longitudes, de l'École Polytechnique, 1910. – V+729 p.
16. *Аппель П., Дотевильль С.* Курс теоретической механики. Введение в изучение физики и прикладной механики. Выпуск 2. – Одесса: Mathesis, 1912. – XV+359 с.
17. *Painlevé P.* Leçons sur le frottement. – Paris: Librairie scientifique A. Hermann Editeur, 1895. – VIII+111 p.
18. *Пэлье П.* Лекции о трении. – М.: Гостехтеоретиздат, 1954. – 316 с.
19. *Routh E.J.* A Treatise on Dynamics of Particle with Numerous Examples. – Cambridge: At The University Press, 1898. – XI+417 p.
20. *Lorenz H.* Lehrbuch der Technischen Physik. Erster Band: Technische Mechanik starrer Gebilde. Erster Teil: Mechanik ebener Gebilde. – Berlin: Verlag von Julius Springer, 1924. – VIII+390 S.
21. *Лоренц Г.* Техническая механика неизменяемой системы. – СПб.: Издание К.Л. Риккера, 1909. – XIII+679 с.
22. *Hamel G.* Elementare Mechanik. – Leipzig und Berlin: Druck und Verlag von B.G. Teubner, 1912. – XVIII+634 S.
23. *Whittaker E.T.* Analytische Dynamik der Punkte und starren Körper. – Berlin: Verlag von Julius Springer, 1924. – XII+462 S.
24. *Whittaker E.T.* A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies with an introduction to the problem of three Bodies. – Cambridge: At The University Press, 1927. – XIV+456 p.
25. *Whittaker E.T.* A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies with an introduction to the problem of three Bodies. – New York: Dover Publications, 1944. – XIV+456 p.
26. *Уиттекер Э.Т.* Аналитическая динамика. – М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, Глав. ред. технико-теорет. лит-ры, 1937. – 500 с.
27. *Уиттекер Э.Т.* Аналитическая динамика. – Ижевск: Изд. дом "Удмуртский ун-т", 1999. – 584 с.

28. *Woronetz P.* Sur le mouvement d'un point matériel, soumis á une force donnée, sur une surface fixe et dépolie // *J. de Math. pures et appl.* – 1915. – Ser. VII, 1. – P. 261–275.
29. *Воронец П.В.* Дифференциальное уравнение траектории материальной точки на шероховатой поверхности // *Изв. Киев. ун-та.* – 1916. – 56, № 2, февраль. – С. 93–102.
30. *Жуковский Н.Е.* Динамика твердого тела (специальный курс) // Полн. собр. соч. Лекции. Вып. 6: Механика системы. Динамика твердого тела. – М.; Л.: Оборонгиз, 1939. – С. 207–292.
31. *Жуковский Н.Е.* Динамика твердого тела (специальный курс) // Собр. соч. Т. I: Общая механика. Математика и астрономия. – М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. – С. 441–540.
32. *Ванторин В.Д.* Движение по плоскости с анизотропным трением // Трение и износ в машинах. Сб. XVI. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – С. 81–120.
33. *Iacob C.* Mecanică teoretică. – București: Editura didactică și pedagogică, 1971. – 707 p.
34. *Иродов И.Е.* Основные законы механики. – М.: Высш. шк., 1975. – 256 с.
35. *Беляев М.М.* Особенности компьютерного моделирования движения тел при наличии сухого трения // Компьютерная хроника. – 1998. – № 9. – С. 21–34.
36. *Jellett J.H.* A Treatise on the Theory of Friction. – Dublin: Hodges, Foster, and Co., Publishers to the University; London: Macmillan and Co., 1872. – XV+220 p.
37. *Майевский Н.В.* Курс внешней баллистики. – СПб.: Тип. Имп. Академии наук, 1870. – XXV+679 с.
38. *Забудский Н.А.* Внешняя баллистика. – СПб.: Тип. Имп. Академии наук, 1895. – XX+578 с.
39. *Stranz C.* Compendium der theoretischen äusseren Ballistik. – Leipzig: Druck und Verlag von B.J. Teubner, 1896. – XII+511 S.
40. *Сомов П.О.* Основания теоретической механики. – СПб.: Изд. К.Л. Риккера, 1904. – XVI+753 с.
41. *Окунев Б.Н.* Внешняя и внутренняя баллистика. – М.; Л.: Военгиз, 1930. – 333 с.
42. *Граве Д.А.* Теоретическая механика на основе техники. – М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1932. – 406 с.
43. *Levi-Civita T., Amaldi U.* Nozioni di Balistica esterna. – Bologna: Nicola Zanichelli Editore, 1935. – VIII+56 p.
44. *Некрасов А.И.* Курс теоретической механики. Т. 2: Динамика. – М.: Гостехтеоретиздат, 1953. – 503 с.
45. *Брашман Н.Д.* Теоретическая механика. Т. 1. – М: Университетская типография, 1859. – XXIII, 438, 10 с.
46. *Рахманинов И.И.* Основания теоретической динамики. Ч. 1, вып. 1. – Киев: Университетская типография, 1873. – 192 с.
47. *Kraft F.* Sammlung von Problemen der analytischen Mechanik. Erster Band. – Stuttgart: J. B. Metzlersche Buchhandlung, 1884. – VIII+650 S.
48. *Lock J.B.* Elementary Dynamics. – London, New York: Macmillan and Co., 1892. – VIII+252 p.
49. *Loney S.L.* A Treatise on Elementary Dynamics. – Cambridge: At The University Press, 1897. – XII+348 p.
50. *Love A.E.H.* Theoretical mechanics. An introductory treatise on the principles of dynamics with applications and numerous examples. – Cambridge: At The University Press, 1897. – XIV+379 p.
51. *Love A.E.H.* Theoretical mechanics. An introductory treatise on the principles of dynamics with applications and numerous examples. – Cambridge: At The University Press, 1906. – XVI+367 p.
52. *Jears J.H.* An elementary treatise on theoretical mechanics. – Boston, New York, Chicago, London, Atlanta, Dallas, Columbus, San Francisco: Ginn and Company, 1935. – VIII+364 p.
53. *MacMillan W.D.* Theoretical Mechanics: Statics and the Dynamics of a Particle. – New York, London: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1927. – XVIII+430 p.
54. *Lamb H.* Dynamics. – Cambridge: At The University Press, 1923. – XI+351 p.
55. *Ламб Г.* Теоретическая механика. Т. 2: Динамика. – М.; Л.: ОНТИ Гостехтеоретиздат, 1935. – 311 с.
56. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. – М.: Физматлит, 2001. – 319 с.
57. *Гончаренко В.А.* Задача П.В. Воронца для точки на плоскости // *Вісн. Київ. нац. ун-ту. Сер. Кібернетика.* – 2004. – Вип. 5. – С. 10–13.