УДК 531.38, 531.36

©2005. **Ю.Б. Коносевич**

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ СИНХРОННОГО ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ

Рассматривается задача о движении гироскопа в кардановом подвесе, установленного на неподвижном основании в поле силы тяжести и имеющего вертикальную наружную ось подвеса. Моменты сил трения и какие-либо управляющие моменты относительно осей подвеса предполагаются отсутствующими. Относительно оси ротора действует момент, равный алгебраической сумме момента сил трения и вращающего момента электродвигателя. В случае асинхронного двигателя наличие изолированного минимума приведенной потенциальной энергии является достаточным и, как правило, необходимым условием устойчивости соответствующего стационарного движения. В настоящей работе показано, что этот результат справедлив и в случае синхронного электродвигателя.

Введение. Для гироскопа в кардановом подвесе, установленного на неподвижном основании, в качестве обобщенных лагранжевых координат принимаются углы α, β, φ, где α – угол поворота наружной рамки подвеса относительно основания, β – угол поворота внутренней рамки относительно наружной, φ – угол поворота ротора относительно внутренней рамки. Когда наружная ось подвеса вертикальна либо гироскоп является уравновешенным, уравнения его движения допускают семейство решений

$$\dot{\alpha} = \Omega^0, \qquad \beta = \beta^0, \qquad \varphi = \omega t + \gamma_0, \tag{1}$$

где постоянные Ω^0, β^0 определенным образом связаны между собой. Решения вида (1) описывают стационарные движения гироскопа в кардановом подвесе, а именно равномерные вращения ротора с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси (при $\Omega^0 = 0$) и регулярные прецессии ротора вокруг наружной оси подвеса (при $\Omega^0 \neq 0$). Угол α является циклической координатой. Постоянная соответствующего циклического интеграла обозначается через p, а значение этой постоянной на решении (1) – через p^0.

В первых работах по теории гироскопа в кардановом подвесе предполагалось, что моменты сил трения не действуют как относительно осей подвеса, так и относительно оси ротора. Достаточные условия устойчивости стационарных движений такого *идеального* гироскопа по отношению к $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\varphi}, \beta$ получены в работах [1–3] и других.

Для гироскопа в кардановом подвесе, снабженного *асинхронным* электроприводом ротора, достаточное условие устойчивости стационарных движений найдено в [4]. Пусть $f(p, \beta)$– приведенная потенциальная энергия асинхронного гироскопа. Тогда условием существования решения (1) является равенство $f'(p^0, \beta^0) = 0$, где штрих означает дифференцирование по β. В [5] принята более общая, чем в [1-4], механическая модель гироскопа в кардановом подвесе и показано, что для гироскопов большинства конструкций, в том числе и для рассмотренной в [4] обычной конструкции, необходимым и достаточным условием устойчивости стационарных движений асинхронного гироскопа является наличие изолированного минимума функции $f(p^0, \beta)$ при $\beta = \beta^0$.

В статье [6] рассмотрен случай, когда ротор приводится во вращение *синхронным* электродвигателем, и с помощью линеаризованных уравнений движения показано, что для устойчивости стационарного движения достаточно выполнения двух неравенств. Одно из них можно записать в виде $f''(p^0, \beta^0) > 0$, и следовательно, оно является частным случаем того же условия минимума, которое определяет устойчивость стационарных движений в случае асинхронного гироскопа, а второе характерно только для синхронного гироскопа.

В настоящей работе результат, установленный в [5] для асинхронного гироскопа, перенесен на случай синхронного гироскопа в кардановом подвесе. А именно, показано, что для синхронных гироскопов большинства конструкций (в том числе и для обычной модели) необходимым и достаточным условием устойчивости стационарного решения (1) по переменным $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\varphi}, \beta, \varphi$ является наличие изолированного минимума функции $f(p^0, \beta)$ при $\beta = \beta^0$.

1. Уравнения движения и стационарные режимы. Так же, как и в [5, 6], рассмотрим обобщенную механическую модель гироскопа в кардановом подвесе, когда динамически симметричный ротор заключен в карданов подвес, составленный из двух тел ("рамок") произвольной формы, причем внутренняя ось подвеса неколлинеарна наружной оси подвеса и оси ротора. Наружная ось подвеса закреплена в неподвижном основании и направлена вертикально. Трение и какие-либо управляющие моменты на осях подвеса отсутствуют. Относительно оси ротора действуют моменты сил трения, и для поддержания вращения ротора гироскоп снабжен электродвигателем.

Пусть углы α, β, φ определены, как указано выше. При сделанных предположениях потенциальная энергия земного тяготения U и величины G, N, Q в выражении кинетической энергии системы

$$T = \frac{1}{2}\left(G\dot{\alpha}^2 + H\dot{\beta}^2 + C\dot{\varphi}^2 + 2N\dot{\alpha}\dot{\beta} + 2Q\dot{\alpha}\dot{\varphi} + 2R\dot{\beta}\dot{\varphi}\right) \tag{2}$$

зависят только от угла β и механических параметров, коэффициенты H, R зависят только от механических параметров, C – осевой момент инерции ротора. Зависимости U, G, N, Q от β имеют вид

$$\begin{aligned} U(\beta) &= u_0 + u_1 \sin\beta + u_2 \cos\beta, \\ G(\beta) &= g_0 + g_1 \sin\beta + g_2 \cos\beta + g_3 \sin 2\beta + g_4 \cos 2\beta, \\ N(\beta) &= n_0 + n_1 \sin\beta + n_2 \cos\beta, \quad Q(\beta) = q_0 + q_1 \sin\beta, \end{aligned} \tag{3}$$

где u_0 – произвольная постоянная, а все остальные коэффициенты по известным формулам выражаются через механические параметры [7]. При этом из предположения о неколлинеарности осей подвеса и ротора следует, что $q_1 \neq 0$.

Так как кинетическая энергия является определенно положительной квадратичной формой скоростей $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\varphi}$, то при любом значении β выполняются неравенства Сильвестра:

$$J(\beta) = \begin{vmatrix} G(\beta) & N(\beta) & Q(\beta) \\ N(\beta) & H & R \\ Q(\beta) & R & C \end{vmatrix} > 0, \qquad \begin{aligned} &J_1(\beta) = G(\beta)H - N^2(\beta) > 0, \\ &J_2(\beta) = G(\beta)C - Q^2(\beta) > 0, \\ &G(\beta) > 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Момент L, действующий относительно оси ротора, равен алгебраической сумме вращающего момента двигателя и момента сил трения. В случае синхронного двигателя для момента L обычно принимают выражение

$$L = L(\varphi - \omega t, \dot{\varphi}) = -\lambda_1(\varphi - \omega t - \gamma_0) - \lambda_2(\dot{\varphi} - \omega),$$

где $\lambda_1, \lambda_2 > 0,\ \omega \neq 0,\ \gamma_0$ – некоторые постоянные (см. [8]). Полагая $\gamma = \varphi - \omega t - \gamma_0$, получим формулу

$$L = L(\gamma, \dot\gamma) = -\lambda_1 \gamma - \lambda_2 \dot\gamma \ . \tag{5}$$

Она является линейным приближением более общего выражения

$$L = L(\gamma, \dot\gamma) = L_1(\gamma) + L_2(\dot\gamma), \tag{6}$$

где $L_1(\gamma)$ – вращающий момент синхронного двигателя, $L_2(\dot\gamma)$ – диссипативный момент. Функции $L_1(\gamma), L_2(\dot\gamma)$ предполагаются непрерывными, а с учетом (5) они обладают следующими свойствами:

$$\gamma L_1(\gamma) < 0 \ (\gamma \neq 0), \quad L_1(0) = 0; \tag{7}$$

$$\dot\gamma L_2(\dot\gamma) < 0 \quad (\dot\gamma \neq 0), \quad L_2(0) = 0. \tag{8}$$

Момент $L_1(\gamma)$ можно представить в виде

$$L_1(\gamma) = -\frac{d}{d\gamma} U_1(\gamma), \tag{9}$$

$$U_1(\gamma) = -\int\limits_0^\gamma L_1(\sigma)\, d\sigma, \tag{10}$$

σ – переменная интегрирования. Так как, согласно (7), знак $L_1(\gamma)$ противоположен знаку γ, то

$$U_1(\gamma) > 0 \quad (\gamma \neq 0), \quad U_1(0) = 0.$$

Таким образом, $U_1(\gamma)$ – определенно положительная функция γ. Эта функция является потенциальной энергией электромагнитного взаимодействия ротора и статора синхронного электродвигателя.

В соответствии с выражением (2) кинетической энергии и сделанными предположениями о действующих силах, лагранжевы уравнения движения синхронного гироскопа в кардановом подвесе имеют вид

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[G(\beta)\dot\alpha + N(\beta)\dot\beta + Q(\beta)\dot\varphi\right] = 0,\\
&\frac{d}{dt}\left[N(\beta)\dot\alpha + H\dot\beta + R\dot\varphi\right] - \dot\alpha\left[\frac{G'(\beta)}{2}\dot\alpha + N'(\beta)\dot\beta + Q'(\beta)\dot\varphi\right] = -U'(\beta),\\
&\frac{d}{dt}\left[Q(\beta)\dot\alpha + R\dot\beta + C\dot\varphi\right] = L(\varphi, \dot\varphi),
\end{aligned} \tag{11}$$

где штрихом обозначено дифференцирование по β. Из первого уравнения (11) следует интеграл

$$G(\beta)\dot\alpha + N(\beta)\dot\beta + Q(\beta)\dot\varphi = p \quad (p = \text{const}). \tag{12}$$

Переменная α входит в эти уравнения только своими производными по времени $\dot\alpha, \ddot\alpha$. Поэтому они эквивалентны нормальной системе дифференциальных уравнений с фазовым вектором $(\dot\alpha, \dot\beta, \dot\varphi, \beta, \varphi)$. Уравнения (11) допускают решения вида (1), если постоянные Ω^0, β^0 связаны соотношением

$$-\Omega^0\left[\frac{\Omega^0}{2}G'(\beta^0) + \omega Q'(\beta^0)\right] + U'(\beta^0) = 0. \tag{13}$$

Введем вместо $\dot{\alpha}$ переменную p по формуле (12), а вместо φ введем угол $\gamma = \varphi - \omega t - \gamma_0$. Преобразованная система уравнений

$$\frac{d}{dt}\frac{(p-\omega Q)N + \dot{\beta}(GH - N^2) + \dot{\gamma}(GR - QN)}{G} + \frac{\partial}{\partial \beta}\left[\frac{(p - \omega Q - \dot{\beta}N - \dot{\gamma}Q)^2}{2G} + U\right] = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\frac{(p-\omega Q)Q + \dot{\beta}(GR - QN) + \dot{\gamma}(GC - Q^2)}{G} = L, \quad \frac{dp}{dt} = 0 \tag{14}$$

определяет $(p, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma)$. Аргументы $(\dot{\gamma}, \gamma)$ у функции L и аргумент β у функций G, N, Q, U здесь для краткости опущены. При фиксированном значении p система первых двух уравнений (14) образует приведенную систему, соответствующую данному p. Обозначим ее через $S(p)$.

Так как согласно (4) $G(\beta) > 0$ при любом β, замена переменных $(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma)$ переменными $(p, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma)$ взаимно однозначна и непрерывна в обе стороны. Поэтому устойчивость любого решения лагранжевой системы (11) эквивалентна устойчивости соответствующего решения преобразованной системы (14).

Решению (1) системы (11) соответствует решение

$$p = p^0, \quad \beta = \beta^0, \quad \gamma = 0 \tag{15}$$

системы (14). Оно существует, если выполнено условие

$$-\frac{p^0 - \omega Q(\beta^0)}{G(\beta^0)}\left[\frac{G'(\beta^0)}{2G(\beta^0)}(p - \omega Q(\beta^0)) + \omega Q'(\beta^0)\right] + U'(\beta^0) = 0. \tag{16}$$

В соответствии с (12), постоянные p^0, Ω^0 в решениях (1), (15) связаны соотношением

$$p^0 = \Omega^0 G(\beta^0) + \omega Q(\beta^0).$$

Отсюда следует, что условия (13), (16) эквивалентны.

Введем, как и в [5], обозначение

$$f(p, \beta) = \frac{[p - \omega Q(\beta)]^2}{2G(\beta)} + U(\beta). \tag{17}$$

Определив производную функции $f(p, \beta)$ по β, устанавливаем, что условие (16) существования решения (15) у системы (14) может быть записано в виде $f'(p^0, \beta^0) = 0$. Поскольку функция $f(p^0, \beta)$ переменной β аналитическая, то отсюда следует, что существуют только четыре возможности: при $\beta = \beta^0$ функция $f(p^0, \beta)$ имеет A) изолированный минимум, B) изолированный максимум, C) перегиб, D) $f(p^0, \beta) = \text{const}$.

2. Энергетические соотношения. Для исследования устойчивости стационарных движений синхронного гироскопа в кардановом подвесе воспользуемся методом функций Ляпунова. Такие функции будем строить на основании теоремы об изменении энергии. В зависимости от выбора основных переменных эту теорему можно формулировать по-разному. Рассмотрим несколько вариантов теоремы об изменении энергии применительно к рассматриваемой системе, не ссылаясь на ее общие формулировки.

Вариант 1. Пусть в качестве основных переменых выбраны $\dot{\alpha}, \beta, \varphi$ и движение системы описывается лагранжевыми уравнениями (11). Продифференцируем в них по времени выражения в квадратных скобках. Найдем производную по времени в силу этих уравнений от функции

$$E_1(\dot\alpha,\dot\beta,\dot\varphi,\beta)=T(\dot\alpha,\dot\beta,\dot\varphi,\beta)+U(\beta), \tag{18}$$

где T – кинетическая энергия системы, определенная формулой (2), $U(\beta)$ – потенциальная энергия земного тяготения. Она равна

$$\dot E_1(\dot\alpha,\dot\beta,\dot\varphi,\beta)=\dot\varphi L(\varphi,\dot\varphi). \tag{19}$$

Вариант 2. Вместо угла φ введем в уравнения (11) угол $\gamma=\varphi-\omega t-\gamma_0$. Момент L представим в виде (6), где L_1 выразим по формуле (9) через $U_1(\gamma)$. Производная по времени в силу полученных таким образом уравнений от функции

$$E_2(\dot\alpha,\dot\beta,\dot\gamma,\beta,\gamma)=\frac{1}{2}[G(\beta)\dot\alpha^2+H\dot\beta^2+C\dot\gamma^2+2N(\beta)\dot\alpha\dot\beta+2Q(\beta)\dot\alpha\dot\gamma+2R\dot\beta\dot\gamma]+U(\beta)+U_1(\gamma) \tag{20}$$

равна

$$\dot E_2(\dot\alpha,\dot\beta,\dot\gamma,\beta,\gamma)=\dot\gamma L_2(\dot\gamma). \tag{21}$$

Вариант 3. Заменим в формуле (20) для E_2 величину $\dot\alpha$ ее выражением

$$\dot\alpha=\frac{p-\omega Q(\beta)-N(\beta)\dot\beta-Q(\beta)\dot\gamma}{G(\beta)},$$

вытекающим из интеграла (12). Тогда вместо E_2 имеем функцию

$$E_3(p,\dot\beta,\dot\gamma,\beta,\gamma)=\frac{\dot\beta^2[G(\beta)H-N^2(\beta)]+2\dot\beta\dot\gamma[G(\beta)R-Q(\beta)N(\beta)]+\dot\gamma^2[G(\beta)C-Q^2(\beta)]}{2G(\beta)}+$$

$$+\frac{[p-\omega Q(\beta)]^2}{2G(\beta)}+U(\beta)+U_1(\gamma),$$

или

$$E_3(p,\dot\beta,\dot\gamma,\beta,\gamma)=T_*(\dot\beta,\dot\gamma,\beta)+f(p,\beta)+U_1(\gamma), \tag{22}$$

где

$$T_*(\dot\beta,\dot\gamma,\beta)=\frac{\dot\beta^2[G(\beta)H-N^2(\beta)]+2\dot\beta\dot\gamma[G(\beta)R-Q(\beta)N(\beta)]+\dot\gamma^2[G(\beta)C-Q^2(\beta)]}{2G(\beta)}, \tag{23}$$

$f(p,\beta)$ определена в (17), а $U_1(\gamma)$ – в (10). Очевидно, что для функции E_3 остается справедливой формула (21), то есть

$$\dot E_3(p,\dot\beta,\dot\gamma,\beta,\gamma)=\dot\gamma L_2(\dot\gamma). \tag{24}$$

Из неравенств (4) следует, что при любом β функция T_* является определенно положительной формой относительно $\dot\beta,\dot\gamma$.

Вычтем из E_3 постоянную величину $f(p^0,\beta^0)$. Получим функцию

$$v(p,\dot\beta,\dot\gamma,\beta,\gamma,p^0,\beta^0)=T_*(\dot\beta,\dot\gamma,\beta)+f(p,\beta)-f(p^0,\beta^0)+U_1(\gamma), \tag{25}$$

которая обращается в нуль на решении (15) уравнений (14). Ее производная в силу этих уравнений

$$\dot{v}(p, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma, p^0, \beta^0) = \dot{\gamma} L_2(\dot{\gamma}) \tag{26}$$

является, в соответствии с (8), функцией знакопостоянной отрицательной.

3. Теоремы об устойчивости и неустойчивости. Покажем, что для синхронного гироскопа в кардановом подвесе справедливы результаты, полученные в [5] для асинхронного гироскопа. С этой целью рассмотрим последовательно случаи A, B, C, D, указанные в конце п.1.

В случае A справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Если функция $f(p^0, \beta)$ имеет при $\beta = \beta^0$ изолированный минимум, то решение (15) уравнений (14) устойчиво (по отношению к переменным, образующим фазовый вектор $(p, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma)$ этих уравнений при записи их в виде нормальной системы).

Доказательство. Функции $(p - p^0)^2$ и v можно принять в качестве функций V и W в теореме Л.Сальвадори, обобщающей теорему Раусса-Ляпунова (см. теорему 2.3.1 в [9]). Действительно, условие минимума $f(p^0, \beta)$ означает, что при $(p - p^0)^2 = 0$, то есть при $p = p^0$, разность $f(p, \beta) - f(p^0, \beta)$ является определенно положительной функцией возмущения $\beta - \beta^0$. Далее, U_1 – определенно положительная функция γ, а T_* – определенно положительная функция $\dot{\beta}, \dot{\gamma}$ при любом β. Следовательно, функция v, заданная формулой (25), является положительно определенной на множестве $(p - p^0)^2 = 0$ точек фазового пространства. Производная (26) функции v в силу уравнений движения является знакопостоянной отрицательной. Таким образом, все условия теоремы 2.3.1 из [9] выполнены, и поэтому решение (15) устойчиво (при всевозможных возмущениях начальных условий, в том числе и при начальных возмущениях, не сохраняющих значение p^0 постоянной p). $\square$

Так как $f(p^0, \beta)$ – аналитическая функция β, то изолированный минимум при $\beta = \beta^0$ она имеет только в случае, когда первая из ее производных по β, отличных от нуля в точке $\beta = \beta^0$, имеет четный порядок n и положительна, то есть имеют место соотношения

$$f'(p^0, \beta^0) = 0, \quad f''(p^0, \beta^0) = 0, ..., \quad f^{(n-1)}(p^0, \beta^0) = 0, \quad f^{(n)}(p^0, \beta^0) > 0,$$

где $n > 0$ – четное. С учетом (17) и структуры зависимостей (3) в [5] показано, что здесь $n \leq 6$, так что n принимает одно из значений 2, 4 или 6. Для уравновешенного гироскопа $n \leq 4$.

Исследование устойчивости в случаях B, C опирается на следующую лемму.

Лемма. Если уравнения (14) имеют решение, на котором $\dot{v} = 0$ при всех $t \geq t_0$, то для такого решения $\dot{\gamma} = 0, \gamma = 0$ при всех $t \geq t_0$.

Доказательство. Из (8), (26) следует, что если существует решение, на котором $\dot{v} \equiv 0$, то на таком решении $\dot{\gamma} \equiv 0$, и следовательно, угол γ остается равным своему начальному значению: $\gamma(t) \equiv \gamma_0$ $(t \geq t_0)$. Покажем, что $\gamma_0 = 0$.

Допустим, что $\gamma_0 \neq 0$. Тогда в соответствии с (6)-(8) имеем $L(\gamma, \dot{\gamma}) = L_1(\gamma_0)$. В таком случае, согласно (19), $\dot{E}_1 = \omega L_1(\gamma_0) = \mathrm{const} \neq 0$, и следовательно, функция E_1 на рассматриваемом решении неограниченно возрастает. Так как в формуле (18), определяющей E_1, все функции угла β ограничены, то это возможно, лишь когда хотя бы одна из скоростей $\dot{\alpha}, \dot{\beta}$ неограниченно возрастает при $t \to \infty$. А поскольку в данном случае $\dot{\varphi} = \omega$, то из интеграла (12) следует, что обе скорости $\dot{\alpha}, \dot{\beta}$ стремятся к ∞ при $t \to \infty$. В частности, $\dot{\beta} \to \infty$ $(t \to \infty)$.

С другой стороны, из соотношений (25), (26) следует, что при $\dot{\gamma} \equiv 0$ будет

$$\frac{\dot{\beta}^2[G(\beta)H - N^2(\beta)]}{2G(\beta)} + f(p, \beta) - f(p^0, \beta^0) + U_1(\gamma_0) = \mathrm{const},$$

аргумент t у функций $\beta(t), \dot{\beta}(t)$ опущен. Чтобы левая часть этого равенства оставалась ограниченной при $\dot{\beta} \to \infty$, необходимо, чтобы $\dfrac{G(\beta(t))H - N^2(\beta(t))}{G(\beta(t))} \to 0$ при $t \to \infty$. Но это невозможно, так как выражение $\dfrac{G(\beta)H - N^2(\beta)}{G(\beta)}$, будучи непрерывной 2π-периодической функцией β, положительной при всех β согласно (4), имеет положительный минимум при $\beta \in [0; 2\pi]$. Полученное противоречие показывает, что допущение $\gamma_0 \neq 0$ неверно. Лемма доказана. $\square$

Основным результатом для случаев B, C является следующая теорема.

Теорема 2. Если функция $f(p^0, \beta)$ имеет при $\beta = \beta^0$ изолированный максимум или перегиб, то решение (15) уравнений (14) неустойчиво.

Доказательство. Чтобы доказать эту теорему, очевидно, достаточно доказать неустойчивость решения $(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma) = (0, 0, \beta^0, 0)$ приведенной системы $S(p^0)$. Для этого воспользуемся теоремой Н.Н. Красовского о неустойчивости (см. теорему 6.3 в [10]), приняв в ней в качестве функции v функцию (25) при $p = p^0$.

В случаях B, C разность $f(p^0, \beta) - f(p^0, \beta^0)$ принимает отрицательные значения при значениях β, сколь угодно близких к β^0. Поэтому функция v принимает отрицательные значения в сколь угодно малой окрестности стационарной точки $(0, 0, \beta^0, 0)$ системы $S(p^0)$. Далее, согласно лемме 1, в фазовом пространстве $(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma)$ системы $S(p^0)$ множество M траекторий, на которых $\dot{v} \equiv 0$, содержится во множестве $\dot{\gamma} = 0, \gamma = 0$, то есть лежит в плоскости $(\beta, \dot{\beta})$ фазового пространства. Следовательно, если система $S(p^0)$ имеет определенное при всех $t \geq t_0$ решение, на котором $\dot{v} \equiv 0$, то соответствующая траектория лежит в плоскости $(\beta, \dot{\beta})$ и описывается конечным уравнением

$$\dot{\beta}^2 \frac{[G(\beta)H - N^2(\beta)]}{2G(\beta)} + f(p^0, \beta) - f(p^0, \beta^0) = e \quad (e = \mathrm{const}), \tag{27}$$

вытекающим из (25), (26) при $\dot{\gamma} = 0, \gamma = 0$.

Оставшаяся часть доказательства теоремы 2 повторяет соответствующую часть доказательства теоремы 2 из [5] и состоит в следующем. Построив обычным приемом фазовые траектории, определенные на плоскости $(\beta, \dot{\beta})$ уравнением (27) в случаях B, C, устанавливаем, что в окрестности стационарной точки $(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma) = (0, 0, \beta^0, 0)$ существуют только два типа решений системы $S(p^0)$, определенных на полуоси $t \geq t_0$ и удовлетворяющих условию $\dot{v} \equiv 0$: это сама стационарная точка, а также решения, стремящиеся к ней при $t \to \infty$. Следовательно, вне сколь угодно малого шара с центром в рассматриваемой стационарной точке система $S(p^0)$ не имеет решений, для которых $\dot{v} \equiv 0$.

С другой стороны, из приведенного в [10] доказательства теоремы 6.3 следует, что она остается справедливой и в том случае, когда предположение об отсутствии целых полутраекторий (кроме стационарной точки), для которых $\dot{v} \equiv 0$, заменено более слабым предположением об отсутствии таких полутраекторий в любой сколь угодно малой окрестности стационарной точки. Следовательно, стационарное решение $(0, 0, \beta^0, 0)$ системы $S(p^0)$ неустойчиво, и теорема 2 доказана. $\square$

Рассмотрим теперь случай D. Как показано в [5] (лемма 2), постоянная p^* такая, что $f(p^*, \beta) \equiv \mathrm{const}$, существует тогда и только тогда, когда параметры гироскопа в кардановом подвесе удовлетворяют одной из двух групп условий (см. (3)):

$$D_1) \quad g_2 = g_3 = 0,\ u_1 = u_2 = 0,\ g_1^2 + 8g_4(g_0 + g_4) = 0 \quad (g_1, g_4 \neq 0);$$
$$D_2) \quad g_2 = g_3 = g_4 = 0,\ u_2 = 0,\ 2u_1 g_1 + {\omega_1}^2 q_1^2 = 0 \quad (g_1, u_1 \neq 0).$$

Таким образом, случай D имеет место только для двух специальных конструкций гироскопа при $p^0 = p^*$. Постоянная p^* при условиях D_1, D_2 определена однозначно.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Если параметры гироскопа в кардановом подвесе удовлетворяют условиям D_1, то при $p^0 = p^*$ и любом β^0 решение (15) уравнений (14) неустойчиво.

Доказательство. Как показано в [5] в начале доказательства теоремы 3, при условиях D_1 можно выбрать значения p, сколь угодно близкие к p^*, таким образом, что функция $f(p, \beta)$ будет иметь минимум при $\beta^* \neq \beta^0$, причем точка β^* является серединой отрезка $[\beta^* - \pi; \beta^* + \pi]$ с концами в точках ее максимума. На каждом из промежутков $[\beta^* - \pi; \beta^*]$, $[\beta^* + \pi; \beta^*]$ функция $f(p, \beta)$ строго монотонна. Рассмотрим функцию

$$V(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma) = T_*(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta) + f(p, \beta) - f(p, \beta^*) + U_1(\gamma),$$

которая отличается от аналогичной функции в [5] слагаемым $U_1(\gamma)$. Так как $U_1(\gamma)$ – определенно положительная функция γ, то равенство $V(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma) = e_0$, где $e_0 = V(0, 0, \beta^* \pm \pi, 0)$, определяет в слое $\beta^* - \pi < \beta < \beta^* + \pi$ фазового пространства $(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma)$ системы $S(p)$ замкнутую ограниченную поверхность. Следовательно, неравенство $V(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma) < e_0$ определяет в этом слое ограниченную выпуклую область D, содержащую единственную стационарную точку $(0, 0, \beta^*, 0)$ системы $S(p)$. С учетом этого оставшуюся часть доказательства можно провести по той же схеме, что и соответствующую часть доказательства теоремы 3 в [5]. $\square$

Если в случае D_2 при $p^0 = p^*$ в качестве β^0 взята точка минимума $U(\beta)$, то за счет выбора p уже не удается сделать точку β^* минимума $f(p, \beta)$ отличной от β^0. Поэтому, как и в [5], приходим к следующему результату.

Теорема 4. Если параметры гироскопа удовлетворяют условиям D_2, то при $p^0 = p^*$ и любом β^0, отличном от точки минимума $U(\beta)$, решение (15) уравнений (14) неустойчиво.

Из теорем 1 – 4 следует, что наличие изолированного минимума функции $f(p^0, \beta)$ при $\beta = \beta^0$ является необходимым и достаточным условием устойчивости любого стационарного режима движения синхронного гироскопа в кардановом подвесе, исключая, быть может, одно стационарное движение гироскопа специальной конструкции (а именно, стационарное движение при минимуме $U(\beta)$ для гироскопа, удовлетворяющего условиям D_2). Поскольку уравновешенный гироскоп ($U(\beta) \equiv \mathrm{const}$) и гироскоп обычной конструкции ($G(\beta) = g_0 + g_4 \cos 2\beta$) не удовлетворяют условиям D_2 (а именно, неравенству $u_1 \neq 0$ и неравенству $g_1 \neq 0$), то для них наличие изолированного минимума функции $f(p^0, \beta)$ при $\beta = \beta^0$ является необходимым и достаточным условием устойчивости любого стационарного режима (1).

1. *Магнус К.* Об устойчивости движения тяжелого симметричного гироскопа в кардановом подвесе // Прикл. математика и механика. – 1958. – **22**, вып. 2. – С. 173-178.
2. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе // Там же. – **22**, вып. 3. – С. 374-378.
3. *Лунц Я.Л.* Введение в теорию гироскопов – М.: Наука, 1972. – 296 с.
4. *Крементуло В.В.* Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе при наличии момента относительно оси ротора // Изв. АН СССР. Механика. – 1965. – № 3. – С. 156-159.
5. *Коносевич Б.И.* Об устойчивости стационарных движений асинхронного гироскопа в кардановом подвесе // Механика твердого тела. – 1977. – Вып. 9. – С. 61-73.
6. *Коносевич Ю.Б.* Условия устойчивости стационарных режимов движения синхронного гироскопа в кардановом подвесе // Там же. – 2003. – Вып. 33. – С. 90-96.
7. *Коносевич Б.И.* Скорость ухода оси ротора в обобщенной задаче о гироскопе в кардановом подвесе // Там же. – 1972. – Вып. 4. – С. 82-92.
8. *Климов Д.М., Харламов С.А.* Динамика гироскопа в кардановом подвесе. – М.: Наука, 1978. – 208 с.
9. *Сальвадори Л.* Об устойчивости движения // Механика: Период. сб. переводов иностр. статей. – 1970. – 6*124. – С. 3-19.
10. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости – М.: Наука, 1967. – 224 с.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
konos@iamm.ac.donetsk.ua
Получено 15.07.05