ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2005. Вып. 35

УДК 531.38

©2005. **Ю.Д. Глухих**

КОЛЕБАНИЯ СФЕРИЧЕСКОГО МАЯТНИКА С ВИБРИРУЮЩЕЙ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА

Изучены движения сферического маятника в случае, когда точка подвеса совершает гармонические колебания малой амплитуды вдоль вертикали. Найдены все $2\pi k/m$-периодические ($k, m \in N$) симметричные движения. Используется теория колебаний обратимых механических систем.

1. Постановка задачи. Сферический маятник представляет собой абсолютно твердый невесомый стержень длины l, совершающий пространственное движение вокруг одного своего конца и несущий на другом конце точечную массу m.

Предположим, что точка O маятника совершает гармонические колебания вдоль вертикали с амплитудой A и частотой $\Omega : \xi_0 = A\cos\Omega t$, где ξ_0 – смещение точки подвеса от некоторого фиксированного положения O_* (см. рис. 1).

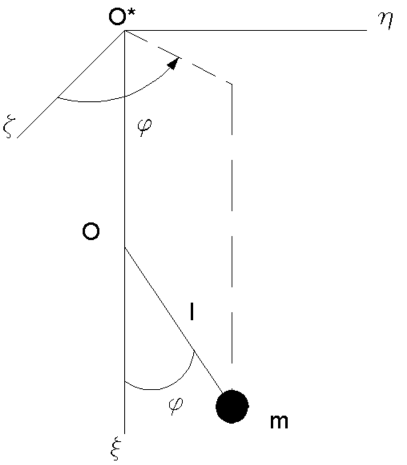

Рис. 1.

Тогда кинетическая и потенциальная энергия сферического маятника определяется выражениями

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\xi}_0^2 - ml\dot{\xi}_0\dot{\theta}\sin\theta + \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2),$$
$$\Pi = mg\xi_0(t) + mgl\cos\theta,$$

а уравнения движения выводятся из уравнений Лагранжа. Координата φ – циклическая. Соответствующий ей интеграл запишем в виде

$$b = \sin^2\theta\frac{d\varphi}{d\tau}, \quad \tau = \Omega t$$

(τ – безразмерное время). С учетом данного интеграла и после введения безразмерных параметров ε и $\varkappa \geq 0$

$$\left(\varepsilon = \sqrt{A/l}, \qquad a = \sqrt{g/(\Omega^2 l)}, \qquad \varkappa = b^2/a^2 \geq 0\right)$$

получим уравнение приведенной системы с одной степенью свободы

$$\ddot{\theta} + a^2(\sin\theta - \frac{\varkappa\cos\theta}{\sin^3\theta}) = \varepsilon^2\cos\tau\sin\theta, \tag{1}$$

где дифференцирование теперь проводится по времени τ.

Отличительным свойством уравнения (1) является инвариантность его относительно преобразований: $(\theta, \tau) \to (\pm\theta, -\tau)$. Иначе, имеем обратимую механическую систему [1] с двумя неподвижными множествами: $M_1 = \{\theta,\ \dot{\theta},\ \tau : \sin\theta = 0,\ \sin\tau = 0\}$, $M_2 = \{\theta, \dot{\theta}, \tau : \dot{\theta} = 0,\ \sin\tau = 0\}$.

Цель настоящего рассмотрения – исследовать симметричные периодические движения задачи периода $2\pi k/m$ $(k, m \in N)$ в виде колебаний и вращений. При этом используется развитая в последние годы теория колебаний обратимых механических систем [2].

Вращательные движения симметричны относительно множества M_1. В соответствии с циклическим интегралом подобные решения в уравнении (1) возможны только при $\varkappa = 0$, т. е. для случая математического маятника.

Ранее рассматривались [3] колебания вблизи конических движений, при которых маятник составляет постоянный угол с вертикалью и вращается вокруг нее с постоянной угловой скоростью. При этом предполагалось, что: *а*) амплитуда A точки подвеса мала по сравнению с длиной l маятника $(0 < \varepsilon \ll 1)$; *б*) частота Ω колебаний точки подвеса велика по сравнению с частотой $\sqrt{g/l}$ малых колебаний математического маятника $(g/(\Omega^2 l) < \varepsilon^4)$; *в*)угловая скорость вращения маятника вокруг вертикали мала по сравнению с Ω.

2. Случай малых вибраций точки подвеса $\varepsilon \ll 1$. Здесь получаем задачу о симметричных периодических движениях обратимой системы, близкой к консервативной системе с одной степенью свободы [4, 5]

$$\ddot{z} + f(z) = \mu F(\mu, z, \dot{z}, t), \tag{2}$$

где функция $F(\mu, z, \dot{z}, t)$ является 2π-периодической по t; μ – малый параметр. Возможны два случая. В первом из них имеем

$$f(-z) = -f(z), \qquad F(\mu, -z, \dot{z}, -t) = -F(\mu, z, \dot{z}, t), \tag{3}$$

во втором

$$F(\mu, z, -\dot{z}, -t) = F(\mu, z, \dot{z}, t). \tag{4}$$

В случае периодической по z системы (2) случаю (3) отвечает неподвижное множество M_1. Неподвижное множество M_2 отвечает системе (2), (4).

Периодическая по z система (2), (4) при $\mu = 0$ допускает семейство (от постоянной энергии h) вращательных движений, которые замкнуты на фазовом цилиндре $(z, \dot{z})$. Период вращательных движений определяется по формуле

$$T(h) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dz}{g(h,z)}, \qquad g(h,z) = \sqrt{h - V(z)}, \qquad V(z) = 2\int f(z)dz$$

(2π-периодическая функция $V(z)$ не содержит постоянного слагаемого), а само симметричное $2\pi k$-периодическое движение задается формулой

$$z = \psi(h,t), \quad \psi(h, t + 2\pi k) = \psi(h,t) + 2\pi m; \quad k \in N, m \in Z. \tag{5}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. [4] Для обратимого уравнения (2), (4) все $2\pi k$-периодические вращательные движения (5), для которых

$$T(h^*) = 2\pi k/|m|,$$

продолжаются по параметру μ.

Применим эту теорему к сферическому маятнику. Здесь вращательные движения возможны только при $\varkappa = 0$ (случай математического маятника). Значит, при малых вибрациях точки подвеса сферического маятника из семейства его плоских вращательных движений рождается счетное (по числу m оборотов маятника) число симметричных $2\pi k$-периодических вращательных движений (5).

При анализе колебаний сферического маятника при малых ε будем опираться на утверждение [4, 5], которое имеет одну и ту же формулировку для случаев (3), (4).

Теорема 2. [4, 5] Симметричное, $2\pi k$-периодическое ($k \in N$) колебание консервативной системы с одной степенью свободы, для которого

$$T(h^*) = 2\pi k/m, \quad m \in N, \quad dT(h^*) \neq 0,$$

продолжается по параметру μ в случаях (3) и (4).

Обратимся к фазовому портрету порождающей системы. В случае (3) этот портрет симметричен относительно обеих осей (см. рис. 2), в то время как в случае (4) портрет симметричен только относительно оси абсцисс (см. рис. 3).

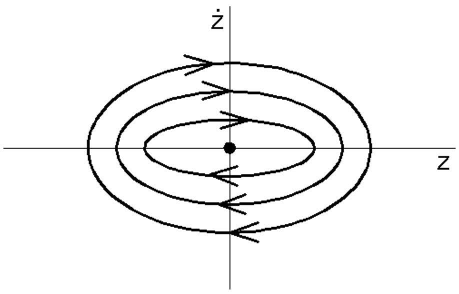

Рис. 2.

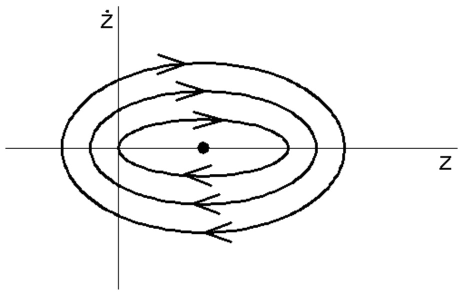

Рис. 3.

Уравнение (1) имеет два неподвижных множества M_1, M_2 при произвольном значении $\varkappa$. Однако только при $\varkappa = 0$ фазовый портрет имеет вид, приведенный на рис. 2. Поэтому применение теоремы 2 к уравнению (1) приводит к следующему выводу.

Теорема 3. При малых вибрациях точки подвеса сферического маятника из семейства его плоских колебаний рождаются два семейства плоских колебаний, каждое из которых состоит из счетного числа движений; семейства симметричны относительно множеств M_1 и M_2 соответственно.

Укажем, что условие $dT(h^*) \neq 0$ для математического маятника выполнено.

3. Пространственные колебания в случае малых вибраций точки подвеса ($\varepsilon \ll 1, \quad \varkappa > 0$). Проанализируем сначала порождающую консервативную систему. Точки равновесия θ_* этой системы находим из уравнения $\sin^4\theta = \varkappa\cos\theta, \quad \sin\theta \neq 0$.

Производная $d\varkappa/d\theta_* > 0$, значит, при данном значении $\varkappa$ имеются только два равновесия $\pm\theta_*$ (см. рис. 4).

Потенциальная энергия порождающей системы

$$\Pi^* = a^2\Pi_*, \quad \Pi_* = -\cos\theta + \frac{\varkappa}{2\sin^2\theta}$$

и соответствующий фазовый портрет приведены на рис. 5.

Здесь фазовая плоскость состоит из двух симметричных друг другу относительно оси ординат плоскостей. В каждой такой полуплоскости семейство замкнутых кривых –

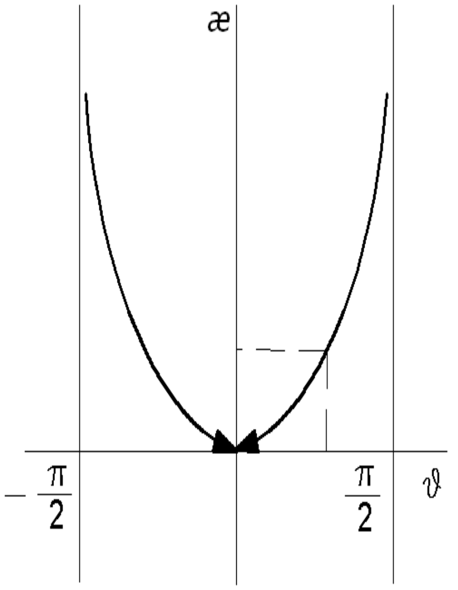

Рис.4.

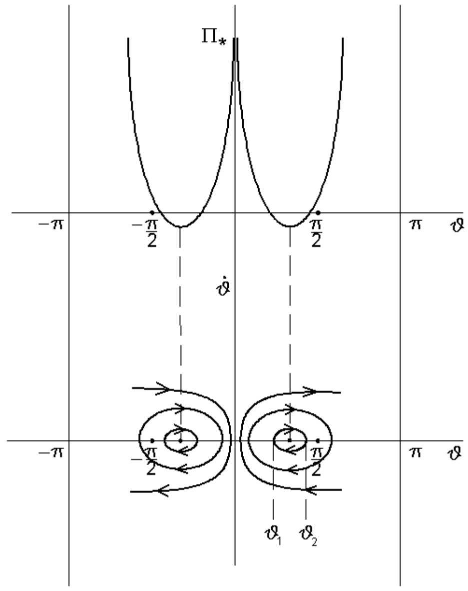

Рис.5.

периодических движений – окружает центр в точке θ_*. Точки $\pm\theta_*$ отвечают коническим движениям.

Отметим, что семейство периодических движений симметрично относительно оси абсцисс. Из интеграла энергии

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} + a^2 Pi_* = a^2 h(\text{const})$$

вычислим период колебаний

$$aT(\varkappa, h) = 2 \int\limits_{\theta_1(\varkappa,h)}^{\theta_2(\varkappa,h)} \frac{d\theta}{\sqrt{2(h - \Pi_*)}} \tag{6}$$

(θ_1, θ_2 – соответственно минимальный и максимальный углы на периодическом движении). В точках $\theta_{1,2}$ имеем $\Pi(\theta_{1,2}) = h$. Поэтому $\theta_{1,2}$ находятся как корни кубического уравнения

$$z^3 + hz^2 - z + \varkappa/2 - h = 0, \quad z = \cos\theta > 0. \tag{7}$$

Для вычисления интеграла (6) выполним замену $\theta = \theta_* + \Delta\theta$. Далее разобъем его на два однотипных интеграла с пределами соответственно от $\Delta\theta_1$ до 0 и от 0 до $\Delta\theta_2$: $\Delta\theta_j = \theta_j - \theta_*$ $(j = 1, 2)$ Последующая тригонометрическая замена

$$\operatorname{tg}\frac{\Delta\theta_1}{2} = -s_1 \quad (\operatorname{tg}\frac{\Delta\theta_2}{2} = s_2), \qquad \operatorname{tg}\frac{\Delta\theta}{2} = s_j u,$$

$$\sin\Delta\theta = \frac{2s_j u}{1 + s_j^2 u^2}, \qquad \cos\Delta\theta = \frac{1 - s_j^2 u^2}{1 + s_j^2 u^2}, \qquad d(\Delta\theta) = \frac{2s_j du}{1 + s_j^2 u^2}; \quad j = 1, 2$$

приводит к несобственным интегралам на отрезках $[-1, 0]$ и $[0, 1]$. Наконец, переход к переменной интегрирования $x = \sqrt{1 - u}$ позволяет вычислить период T в виде суммы двух определенных интегралов

$$aT = I_1 + I_2,$$

$$I_j = \int_0^1 \frac{P_j Q_j \sqrt{1+s_j^2 u^2} du}{[P_j^2 Q_j^2 R_j + S_j U_j (1+s_j^2 u^2)(1+s_j^2)\varkappa]\sqrt{1-u}}\,.$$

Здесь

$$P_j = (1 - s_j^2 u)\sin\theta_* - 2s_j u\cos\theta,$$
$$Q_j = (1 - s_j^2)\sin\theta^* - 2s_j\cos\theta_*,$$
$$R_j = s_j(1+u)\cos\theta + (-1)^j(1 - s_j^2 u)\sin\theta_*,$$
$$S_j = (1 + s_j^2 u)(s_j(1+u)\sin\theta_* + (1 - s_j^2 u)\cos\theta_*),$$
$$U_j = ((1 - s_j^2 u)\sin\theta_* - (-1)^j s_j(1+u)\cos\theta).$$

Для вычисления интегралов I_j необходимо для каждого параметра $\varkappa$ найти точку равновесия $\theta_*(\varkappa)$, далее определить $\theta_{1,2}(\varkappa, h)$ из (7), числа s_1 и s_2 и провести интегрирование.

Графики зависимости $T(\varkappa, h)$ от h при фиксированных $\varkappa$ приведены на рис. 6. Видно, что всегда $dT(\varkappa, h)/dh < 0$.

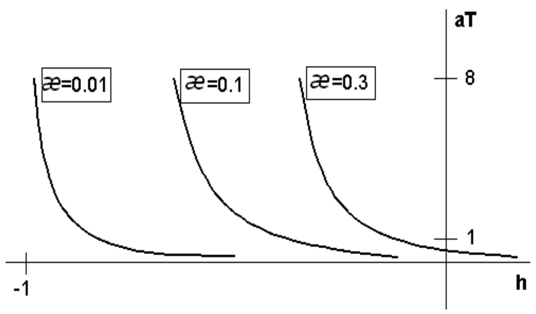

Рис. 6.

Таким образом, имеет место утверждение.

Теорема 4. При малых вибрациях точки подвеса сферический маятник допускает только одно семейство симметричных пространственных колебаний. Оно состоит из счетного числа движений и рождается из непрерывного по h семейства колебаний, симметричных относительно множества M_2.

Существование колебаний вблизи конических движений при выполнении условий *а) – в)* (из п. 1) известно [3]. При этом требуется, чтобы $a \simeq \varepsilon^2$ (условие *б)*), $b \simeq \varepsilon^2$ (условие *в)*). При выполнении условий *а) – в)* уравнение (1) запишем в виде (2) с функцией $f(z) \equiv 0$. Тогда указанные движения рождаются из положений равновесий обратимой системы [6, 7]. На самом деле [6, 7], малости a и ε достаточно для получения вывода о существовании псевдоконических движений. Что касается псевдоконических движений при конечных a, то существование их доставляет теорема 4.

Укажем, что псевдоконические движения составляют только один частный класс периодических движений. Теорема 4 позволяет найти все симметричные $2\pi k$-периодические колебания.

Вычислим период малых колебаний в окрестности конических вращений ($\theta = \theta_*$)

$$aT_* = 2\pi(3\cos\theta_* + \frac{1}{\cos\theta_*}) \geq 4\sqrt{3}\pi.$$

При $a = 1$ период этих колебаний больше 6π. С уменьшением частоты Ω увеличивается параметр $a \sim 1/\Omega$ и, только начиная с некоторого $a_* = 2\sqrt{3}$, появляются 2π-периодические колебания. Колебания периода 2π возникают тогда, когда частота Ω вибраций точки подвеса не больше трех $\omega = \sqrt{g/l}$ – частот малых колебаний математического маятника. С уменьшением отношения Ω/ω увеличивается, начиная с одного, число 2π-периодических колебаний.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (03-01-00052) и программы "Государственная поддержка ведущих научных школ"(НШ- 2000.2003.01).

1. *Тхай В.Н.* Обратимые механические системы // Нелинейная механика. – М.: Физматлит, 2001. – С. 131-146.
2. *Тхай В.Н.* Колебания обратимых механических систем // 8-й Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике (Пермь, 23-29 августа 2001): Аннот. докл. – Екатеринбург: УрОРАН, 2001. – С. 568.
3. *Маркеев А.П.* О динамике сферического маятника с вибрирующим подвесом // Прикл. математика и механика. – 1999. – **63**, вып.2. – С. 213-219.
4. *Тхай В.Н.* Вращательные движения механических систем // Там же. – С. 179-195.
5. *Тхай В.Н.* Периодические движения системы, близкой к автономной обратимой системе // Там же. – 2001. – **65**, вып.4. – С. 661-680.
6. *Тхай В.Н.* О методе Ляпунова–Пуанкаре в теории периодических движений // Там же. – 1998. – **62**, вып.3. – С. 355-371.
7. *Тхай В.Н.* Колебания и устойчивость в квазилинейной системе второго порядка в случае пары непростых нулевых корней // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. – М.: ВЦ РАН, 2005. – С. 48-56.

Московская гос. академия приборостроения и информатики
yucha@mail.ru

Получено 08.10.05