ISSN 0321-1975. **Механика твердого тела. 2005. Вып. 35**

УДК 531.38

©2005. **Г.Н. Яковенко**

МОДИФИКАЦИЯ ТЕОРЕМЫ ЭММИ НЁТЕР НА СЛУЧАЙ НЕГРУППОВЫХ СИММЕТРИЙ

Для вычисления первого интеграла по теореме Эмми Нётер требуется, чтобы уравнения Лагранжа допускали группу вариационных симметрий. Изучается случай, когда уравнения Лагранжа допускают гладкое семейство (не обязательно группу) вариационных симметрий.

Рассматривается семейство неособенных преобразований ($\tau-$ параметр семейства)

$$\begin{aligned} \hat{t} &= \hat{t}(t, q, \tau), \\ \hat{q}_i &= \hat{q}_i(t, q, \tau), \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \tag{1}$$

которое есть решение системы дифференциальных уравнений (не обязательно автономных)

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{t}}{d\tau} &= \xi(\hat{t}, \hat{q}, \tau), \\ \frac{d\hat{q}_i}{d\tau} &= \eta_i(\hat{t}, \hat{q}, \tau), \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \tag{2}$$

при начальных условиях

$$\hat{t}(0) = t, \qquad \hat{q}_i(0) = q, \quad i = \overline{1, n}. \tag{3}$$

Преобразование, принадлежащее семейству (1), называется **преобразованием вариационной симметрии** [1–3] лагранжевой системы

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \tag{4}$$

определенной функцией Лагранжа $L(t, q, \dot{q})$, если оно связано с функцией Лагранжа соотношением

$$L\Big(\hat{t}, \hat{q}, \frac{d\hat{q}}{d\hat{t}}\Big) d\hat{t} = L\Big(t, q, \frac{dq}{dt}\Big) dt,$$

или эквивалентным соотношением

$$L\Big(\hat{t}, \hat{q}, \frac{d\hat{q}}{d\hat{t}}\Big) \frac{d\hat{t}}{dt} = L\Big(t, q, \frac{dq}{dt}\Big). \tag{5}$$

Теорема. Пусть каждое преобразование семейства (1) есть преобразование вариационной симметрии для лагранжевой системы, определенной функцией Лагранжа $L(t, q, \dot{q})$, т. е. для $L(t, q, \dot{q})$ и семейства (1) при каждом значении τ выполняется равенство (5). Тогда у лагранжевой системы есть семейство первых интегралов

$$w(t, q, \dot{q}, \tau) = \sum_{i=1}^{n} p_i \eta_i(t, q, \tau) - \xi(t, q, \tau) H = c, \tag{6}$$

где $\xi(t,q,\tau), \eta_i(t,q,\tau)$– функции, расположенные в правой части системы (2), а p_i и H– обозначения для обобщенного импульса и для функции Гамильтона [3]:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad H(t,q,p) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L(t,q,\dot{q}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L(t,q,\dot{q}). \tag{7}$$

Доказательство. Потребуются формулы (учтены перестановочность дифференцирования по независимым переменным τ и t и уравнения (2))

$$\frac{d}{d\tau}\frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{d\hat{t}}{d\tau} = \frac{d\xi(\hat{t},\hat{q},\tau)}{dt} = \frac{d\xi(\hat{t},\hat{q},\tau)}{d\hat{t}}\frac{d\hat{t}}{dt}\,, \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\frac{d}{d\tau}\frac{d\hat{q}_i}{d\hat{t}} = \frac{d}{d\tau}\frac{\dfrac{d\hat{q}_i}{dt}}{\dfrac{d\hat{t}}{dt}} = \frac{\left(\dfrac{d}{d\tau}\dfrac{d\hat{q}_i}{dt}\right)\dfrac{d\hat{t}}{dt} - \dfrac{d\hat{q}_i}{dt}\left(\dfrac{d}{d\tau}\dfrac{d\hat{t}}{dt}\right)}{\left(\dfrac{d\hat{t}}{dt}\right)^2} = \frac{\left(\dfrac{d}{dt}\dfrac{d\hat{q}_i}{d\tau}\right)\dfrac{d\hat{t}}{dt} - \dfrac{d\hat{q}_i}{dt}\left(\dfrac{d}{dt}\dfrac{d\hat{t}}{d\tau}\right)}{\left(\dfrac{d\hat{t}}{dt}\right)^2} = \\ = \frac{\dfrac{d\eta_i(\hat{t},\hat{q},\tau)}{dt}\dfrac{d\hat{t}}{dt} - \dfrac{d\hat{q}_i}{dt}\dfrac{d\xi(\hat{t},\hat{q},\tau)}{dt}}{\left(\dfrac{d\hat{t}}{dt}\right)^2} = \frac{d\eta_i(\hat{t},\hat{q},\tau)}{d\hat{t}} - \frac{d\hat{q}_i}{d\hat{t}}\frac{d\xi(\hat{t},\hat{q},\tau)}{d\hat{t}}\,.\end{gathered} \tag{9}$$

Потребуется также формула [3]

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{dH}{dt}\,. \tag{10}$$

Для доказательства утверждения (6) теоремы продифференцируем условие (5) по τ (учтены уравнения Лагранжа (4) и формулы (2), (4) – (10)):

$$\left\{\frac{\partial L}{\partial \hat{t}}\xi(\hat{t},\hat{q},\tau) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \hat{q}_i}\eta_i(\hat{t},\hat{q},\tau) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{\hat{q}}_i}\left(\frac{d\eta_i(\hat{t},\hat{q},\tau)}{d\hat{t}} - \dot{\hat{q}}_i\frac{d\xi(\hat{t},\hat{q},\tau)}{d\hat{t}}\right)\right\}\frac{d\hat{t}}{dt} +$$

$$+L\frac{d\xi(\hat{t},\hat{q},\tau)}{d\hat{t}}\frac{d\hat{t}}{dt} \overset{(4)}{=}$$

$$= \left\{\frac{\partial L}{\partial \hat{t}}\xi(\hat{t},\hat{q},\tau) + \sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\hat{q}}_i}\eta_i(\hat{t},\hat{q},\tau) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{\hat{q}}_i}\left(\frac{d\eta_i(\hat{t},\hat{q},\tau)}{d\hat{t}} - \dot{\hat{q}}_i\frac{d\xi(\hat{t},\hat{q},\tau)}{d\hat{t}}\right)\right\}\frac{d\hat{t}}{dt} +$$

$$+L\frac{d\xi(\hat{t},\hat{q},\tau)}{d\hat{t}}\frac{d\hat{t}}{dt} \overset{(10)}{=}$$

$$= \left\{-\frac{dH}{d\hat{t}}\xi(\hat{t},\hat{q},\tau) + \frac{d}{d\hat{t}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{\hat{q}}_i}\eta_i(\hat{t},\hat{q},\tau) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\hat{q}}_i}\dot{\hat{q}}_i - L\right)\frac{d\xi(\hat{t},\hat{q},\tau)}{d\hat{t}}\right\}\frac{d\hat{t}}{dt} \overset{(7)}{=}$$

$$= \left\{-\frac{dH}{d\hat{t}}\xi(\hat{t},\hat{q},\tau) + \frac{d}{d\hat{t}}\sum_{i=1}^{n}\hat{p}_i\eta_i(\hat{t},\hat{q},\tau) - H\frac{d\xi(\hat{t},\hat{q},\tau)}{d\hat{t}}\right\}\frac{d\hat{t}}{dt} =$$

$$= \frac{d}{d\hat t}\left\{\sum_{i=1}^{n}\hat p_i\eta_i(\hat t,\hat q,\tau)-\xi(\hat t,\hat q,\tau)H\right\}\frac{d\hat t}{dt}=0\ .$$

Как следует из (3), при малых значениях τ выполняется $d\hat t/dt\neq 0$, поэтому на решениях лагранжевой системы, соответствующей функции Лагранжа $L(\hat t,\hat q,\dot{\hat q})$, сохраняется формула, находящаяся в фигурных скобках последнего выражения, что доказывает сохранение выражение (6) для лагранжевой системы с функцией Лагранжа $L(t,q,\dot q)$. □

Следствие (теорема Эмми Нётер [4]). Пусть семейство (1) удовлетворяет условиям теоремы и является однопараметрической группой: в каждом уравнении системы (2) правая часть имеет вид $\xi(\hat t,\hat q,\tau)=\tilde\xi(\hat t,\hat q)f(\tau)$, $\eta_i(\hat t,\hat q,\tau)=\tilde\eta_i(\hat t,\hat q)f(\tau)$ с одной и той же функцией $f(\tau)$. Тогда у лагранжевой системы есть первый интеграл $w(t,q,\dot q)=\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\tilde\eta_i(t,q)-\tilde\xi(t,q)H=c.$

Доказательство. Если гарантированный теоремой первый интеграл (6) поделить на постоянную (для каждого преобразования) $f(\tau)$, то получится приведенный в формулировке следствия первый интеграл. □

Пример. Положение N материальных точек замкнутой консервативной системы задается в ортонормированной декартовой системе координат:

$$\mathbf{r}_i = x_i\mathbf{i}+y_i\mathbf{j}+z_i\mathbf{k},\quad i=\overline{1,N}\ .$$

Предполагается, что потенциальная энергия $\Pi(r_{\ell k})$ зависит только от расстояний $r_{\ell k}$ между точками:

$$r_{\ell k}^2=|r_\ell-r_k|^2=(x_\ell-x_k)^2+(y_\ell-y_k)^2+(z_\ell-z_k)^2,\ \ \ell,k=\overline{1,N}.$$

Системе соответствует функция Лагранжа

$$L=T-\Pi=\frac12\sum_{i=1}^{N}m_i(x_i^2+y_i^2+z_i^2)-\Pi(r_{\ell k})\,, \tag{11}$$

обобщенные импульсы (7):

$$p_i^x=m_i\dot x_i,\qquad p_i^y=m_i\dot y_i,\qquad p_i^z=m_i\dot z_i \tag{12}$$

и функция Гамильтона (в лагранжевых переменных)

$$H=T+\Pi=\frac12\sum_{i=1}^{N}m_i(\dot x_i^2+\dot y_i^2+\dot z_i^2)+\Pi(r_{\ell k}). \tag{13}$$

Запишем также левую часть условия (5) для проверки конкретного преобразования на вариационную симметрию

$$L\left(\hat t,\hat q,\frac{d\hat q}{d\hat t}\right)\frac{d\hat t}{dt}=\left\{\frac12\sum_{i=1}^{N}m_i\left[\left(\frac{d\hat x_i}{d\hat t}\right)^2+\left(\frac{d\hat y_i}{d\hat t}\right)^2+\left(\frac{d\hat z_i}{d\hat t}\right)^2\right]-\Pi(\hat r_{\ell k})\right\}\frac{d\hat t}{dt}, \tag{14}$$

где обозначено

$$\hat r_{\ell k}^2=(\hat x_\ell-\hat x_k)^2+(\hat y_\ell-\hat y_k)^2+(\hat z_\ell-\hat z_k)^2\ . \tag{15}$$

Для введенной в примере материальной системы известна десятипараметрическая группа симметрий [5] – группа Галилея (отметим, что публикация [5] появилась в свет на два года раньше статьи Эмми Нётер [4]). Приведем однопараметрические подгруппы группы Галилея (сдвиги по времени и координатам, вращения вокруг координатных осей, переходы в другую инерциальную систему координат):

$$
\begin{array}{llll}
\hat{t} = t - \tau_1, & \hat{x}_i = x_i, & \hat{y}_i = y_i, & \hat{z}_i = z_i; \\
\hat{t} = t, & \hat{x}_i = x_i + \tau_2, & \hat{y}_i = y_i, & \hat{z}_i = z_i; \\
\hat{t} = t, & \hat{x}_i = x_i, & \hat{y}_i = y_i + \tau_3, & \hat{z}_i = z_i; \\
\hat{t} = t, & \hat{x}_i = x_i, & \hat{y}_i = y_i, & \hat{z}_i = z_i + \tau_4; \\
\hat{t} = t, & \hat{x}_i = x_i, & \hat{y}_i = y_i \cos\tau_5 - z_i \sin\tau_5, & \hat{z}_i = y_i \sin\tau_5 + z_i \cos\tau_5; \\
\hat{t} = t, & \hat{x}_i = x_i \cos\tau_6 - z_i \sin\tau_6, & \hat{y}_i = y_i, & \hat{z}_i = x_i \sin\tau_6 + z_i \cos\tau_6; \\
\hat{t} = t, & \hat{x}_i = x_i + t\tau_8, & \hat{y}_i = y_i, & \hat{z}_i = z_i; \\
\hat{t} = t, & \hat{x}_i = x_i, & \hat{y}_i = y_i + t\tau_9, & \hat{z}_i = z_i; \\
\hat{t} = t, & \hat{x}_i = x_i, & \hat{y}_i = y_i, & \hat{z}_i = z_i + t\tau_{10}.
\end{array}
$$

Каждая из подгрупп есть совокупность вариационных ($\tau_1 - \tau_7$) или дивергентных ($\tau_8 - -\tau_1 0$) симметрий [1–3]. Подгруппы порождают десять первых интегралов: полную механическую энергию $E = H$ (см. (13)), вектор импульса, вектор момента импульса, вектор скорости центра инерции системы.

Рассмотрим подгруппу сдвигов по координате x

$$\hat{t} = t, \quad \hat{x}_i = x_i + \tau_2, \quad \hat{y}_i = y_i, \quad \hat{z}_i = z_i \tag{16}$$

и подгруппу вращений вокруг оси z

$$\hat{t} = t, \quad \hat{x}_i = x_i \cos\tau_7 - y_i \sin\tau_7, \quad \hat{y}_i = x_i \sin\tau_7 + y_i \cos\tau_7; \quad \hat{z}_i = z_i. \tag{17}$$

Каждое преобразование подгрупп (16) и (17) является для системы с лагранжианом (11) преобразованием вариационной симметрии – удовлетворяет условию (5) (для проверки нужно использовать формулы (14), (15)) . Преобразованием вариационной симметрии является и суперпозиция преобразований подгрупп (16) и (17) – последовательное выполнение одного преобразования, затем другого. Суперпозиция подгрупп (16) и (17) и специализация параметров $\tau_2 = a\tau$, $\tau_7 = \tau$ ($\tau-$ параметр семейства, $a = \text{const}$) приводит к однопараметрическому семейству вариационных симметрий системы с лагранжианом (11):

$$\hat{t} = t, \quad \hat{x}_i = x_i \cos\tau - y_i \sin\tau + a\tau, \quad \hat{y}_i = x_i \sin\tau + y_i \cos\tau; \quad \hat{z}_i = z_i. \tag{18}$$

Семейство есть решение системы дифференциальных уравнений (2)

$$
\begin{aligned}
\frac{d\hat{t}}{d\tau} &= \quad 0 &&= \xi(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \tau), \\
\frac{d\hat{x}_i}{d\tau} &= -\hat{y}_i + a &&= \eta_i^x(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \tau), \\
\frac{d\hat{y}_i}{d\tau} &= \hat{x}_i - a\tau &&= \eta_i^y(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \tau), \\
\frac{d\hat{z}_i}{d\tau} &= \quad 0 &&= \eta_i^z(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \tau)
\end{aligned}
\tag{19}
$$

при начальных данных (3). Правые части системы (19) не представимы в виде $\xi(\hat{t},\hat{q},\tau) = \tilde{\xi}(\hat{t},\hat{q})f(\tau)$, $\eta_i(\hat{t},\hat{q},\tau) = \tilde{\eta}_i(\hat{t},\hat{q})f(\tau)$ с одной и той же функцией $f(\tau)$, поэтому семейство (18) не есть группа, в чем можно убедиться и непосредственно по уравнениям (18) семейства. Таким образом, условия теоремы Эмми Нётер (см. следствие) не выполнены. В соответствии с утверждением теоремы замкнутая консервативная системы с лагранжианом (11) имеет семейство первых интегралов (6) (учтены выражения (12) для обобщенных импульсов):

$$w(\tau,a) = \sum_{i=1}^{N} m_i\{\dot{x}_i(a-y_i) + \dot{y}_i(x_i - a\tau)\} = K_z + aP_x - a\tau P_y\ . \tag{20}$$

Введены: обозначение $K_z = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i(\dot{y}_i x_i - \dot{x}_i y_i)$ для проекции момента импульса системы на ось z и обозначения $P_x = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i\dot{x}_i$, $P_y = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i\dot{y}_i$ для проекций импульса системы на оси x и y. Из семейства (20) выделяются три базисных первых интеграла: $K_z = w(0,0)$, $P_x = w(0,1) - w(0,0)$, $P_y = w(0,1) - w(1,1)$. Появление первого интеграла P_y объясняется тем, что именно группа сдвига по координате y дополняет две однопараметрические группы (16) и (17) до трехпараметрической группы.

Работа поддержана РФФИ (код проекта 05-01-00940) и Советом Программ поддержки ведущих научных школ (грант НШ-2094.2003.1).

1. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
2. *Олвер П.* Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям / Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 639 с.
3. *Яковенко Г.Н.* Краткий курс аналитической динамики. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. – 238 с.
4. *Noether E.* Invariante Variationsprobleme // Nachr. König. Gesell. Wissen. Göttingen, Math-Phys. – 1918. – Kl. – S. 235-257.
5. *Engel F.* Über zehn algemeinen Integrale der klassischen Mechanik // Ibid. – 1916. – Kl. – S. 270-275.

Московский физико-технический ин-т (гос. ун-т)
yakovenko_g@mtu-net.ru

Получено 06.09.05