ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2005. Вып. 35

УДК 531.38

©2005. **М.Е. Лесина, Я.В. Зиновьева**

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ НА ИНВАРИАНТНОМ СООТНОШЕНИИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Получено новое точное решение задачи о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа, соединенных упругим шарниром. Для его построения подбиралось инвариантное соотношение специального вида.

Построение решения. В работе [1] получено уравнение Абеля

$$\eta\eta' = F_1(\theta,\omega_2)\eta + F_0(\theta,\omega_2), \tag{1}$$

где

$$F_1(\theta,\omega_2) = [2\omega_2\sin\theta - 2(A_0k + Nk_0)\cos\theta + Ak_0 - Nk_0\cos\theta]\sin\theta, \tag{2}$$

$$F_0(\theta,\omega_2) = (\omega_2' - Nk_0)[-\omega_2\sin\theta + (A_0k + Nk_0)\cos\theta - (Ak_0 + Nk)]\sin^3\theta. \tag{3}$$

В соотношениях (1), (2), (3) функция ω_2 оставалась неконкретизированной, штрихом обозначено дифференцирование по переменной θ.

Новые случаи интегрируемости можно получить, конкретизируя ω_2 так, чтобы $F_1(\theta,\omega_2)$ обращалась в нуль. А так как $\sin\theta$ отличен от нуля, то это требование эквивалентно такому

$$\omega_2\sin\theta = (A_0k + Nk_0)\cos\theta + (Nk_0\cos\theta - Ak_0)/2. \tag{4}$$

Фактически уравнение Абеля (1) подсказало структуру инвариантного соотношения [2] вида (4), позволяющего свести задачу к квадратурам.

На инвариантном соотношении (4) уравнение (1) принимает вид

$$4\eta\eta' = -(2Nk_0\cos^2\theta + Ak_0\cos\theta - 2A_0k - 5Nk_0)(Nk_0\cos\theta + Ak_0 + 2Nk)\sin\theta. \tag{5}$$

Вместо θ введем новую переменную $u = \cos\theta$ и, проинтегрировав уравнение (5), находим зависимость $\eta(u)$ в виде

$$\eta^2(u) = \frac{1}{4}N^2k_0^2u^4 + \frac{1}{6}Nk_0(3Ak_0 + 4Nk)u^3 + \frac{1}{4}\big[(A^2 - 5N^2)k_0 +$$

$$+2(A - A_0)Nk\big]k_0u^2 - \frac{1}{2}(Ak_0 + 2Nk)(2A_0k + 5Nk_0)u + \eta_0^2 \equiv P_4(u). \tag{6}$$

Это решение содержит физические параметры A, A_0, N, циклические постоянные k, k_0 и постоянную интегрирования η_0^2.

Наличие шести свободных параметров приводит к большому разнообразию движений, поэтому отметим частные случаи для выражения (6):

$$N = 0, \tag{7}$$

$$k_0 = 0, \qquad N \neq 0. \tag{8}$$

При условии (7) зависимость $\eta(u)$ такова

$$\eta^2(u) = \frac{1}{4}A^2k_0^2u^2 - AA_0kk_0u + \eta_0^2, \tag{9}$$

а при условии (8)

$$\eta^2(u) = \eta_0^2 - 2A_0Nk^2u. \tag{10}$$

Вводя дополнительное условие

$$\eta_0^2 = A_0^2k^2, \tag{11}$$

из (9) получим

$$\eta(u) = (Ak_0u - 2A_0k)/2. \tag{12}$$

Подставив (7) в (4), находим

$$\omega_2 \sin\theta = A_0k\cos\theta - Ak_0/2. \tag{13}$$

Так как переменные Ω_2 и η связаны между собой [1]

$$\Omega_2(\theta)\sin\theta = \eta(\theta) + [\omega_2\cos\theta + (A_0k + Nk_0)\sin\theta]\sin\theta, \tag{14}$$

учитывая условия (8), (11) и полученное при этом соотношение (12), определяем Ω_2

$$\Omega_2 = 0. \tag{15}$$

Из конечных соотношений[1] [3, (5.55)*]

$$\omega_3\sin\theta = \Omega_2 - \omega_2\cos\theta, \tag{16}$$

$$\Omega_3\sin\theta = \Omega_2\cos\theta - \omega_2, \tag{17}$$

при значениях (13), (15) имеем

$$\omega_3(\theta) = \frac{(Ak_0 - 2A_0k\cos\theta)\cos\theta}{2\sin^2\theta}, \qquad \Omega_3(\theta) = \frac{Ak_0 - 2A_0k\cos\theta}{2\sin^2\theta}. \tag{18}$$

Для переменной ξ в [1] получено выражение

$$\xi = \frac{-2\omega_2' + Nk_0 - A_0k + \omega_3}{A_0k + Nk_0 - \omega_3}, \tag{19}$$

подставив в которое (7), (13), (18), находим

$$\xi = 1. \tag{20}$$

Используя замену [3, (5.57)*]

$$\omega_1 = (\xi + 1)\varkappa, \qquad \Omega_1 = (\xi - 1)\varkappa, \tag{21}$$

при значении (20) получим из (21): $\Omega_1 = 0$. Сравнивая с решением [3, (9.17)*–(9.20)*], заключаем, что при условиях (7), (11) получаем частный случай указанного решения.

[1] При ссылке на формулы монографии [3] будем снабжать их звездочкой.

Запишем переменные задачи (4), (14), (16), (17), (19), (21) при условии (8) и значении (10)

$$\omega_2(\theta) = \frac{A_0 k \cos\theta}{\sin\theta}, \tag{22}$$

$$\Omega_2(\theta) = \frac{A_0 k + \sqrt{\eta_0^2 - 2A_0 N k^2 \cos\theta}}{\sin\theta}, \tag{23}$$

$$\omega_3(\theta) = A_0 k + \frac{\sqrt{\eta_0^2 - 2A_0 N k^2 \cos\theta}}{\sin^2\theta}, \tag{24}$$

$$\Omega_3(\theta) = \frac{\sqrt{\eta_0^2 - 2A_0 N k^2 \cos\theta}\cos\theta}{\sin^2\theta}, \tag{25}$$

$$\xi(\theta) = -1 - \frac{2A_0 k}{\sqrt{\eta_0^2 - 2A_0 N k^2 \cos\theta}}, \tag{26}$$

$$\omega_1(\theta) = \frac{-2A_0 k}{\sqrt{\eta_0^2 - 2A_0 N k^2 \cos\theta}}\varkappa(\theta), \qquad \Omega_1(\theta) = -\Big[2 + \frac{2A_0 k}{\sqrt{\eta_0^2 - 2A_0 N k^2 \cos\theta}}\Big]\varkappa(\theta)\ . \tag{27}$$

Целесообразно считать промежуточной переменной не θ, а η и выразить из (10) $\cos\theta = u$ через η

$$u = \frac{\eta_0^2 - \eta^2}{2A_0 N k^2}. \tag{28}$$

Запишем теперь соотношения (22) – (27)

$$\omega_1(\eta) = -\frac{2A_0 k}{\eta}\varkappa(\eta), \tag{29}$$

$$\Omega_1(\eta) = -\frac{2A_0 k + \eta}{\eta}\varkappa(\eta), \tag{30}$$

$$\omega_2(\eta) = \frac{A_0 k(\eta_0^2 - \eta^2)}{\sqrt{4A_0^2 N^2 k^4 - (\eta^2 - \eta_0^2)^2}}, \tag{31}$$

$$\Omega_2(\eta) = \frac{2A_0 N k^2 (A_0 k + \eta)}{\sqrt{4A_0^2 N^2 k^4 - (\eta^2 - \eta_0^2)^2}}, \tag{32}$$

$$\omega_3(\eta) = A_0 k + \frac{4A_0^2 N^2 k^4 \eta}{4A_0^2 N^2 k^4 - (\eta^2 - \eta_0^2)^2}, \quad \Omega_3(\eta) = \frac{2A_0 N k^2 \eta(\eta^2 - \eta_0^2)}{4A_0^2 N^2 k^4 - (\eta^2 - \eta_0^2)^2}. \tag{33}$$

Для завершения построения решения необходимо найти $\varkappa$, установить зависимость η, φ, Φ от t и выражение потенциальной энергии упругого элемента.

Для определения $\varkappa$ используем интеграл [3, (5.15)*–(5.17)*]

$$G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = g^2, \tag{34}$$

где

$$G_1 = (A - N\cos\theta)\omega_1 + (A_0 - N\cos\theta)\Omega_1, \tag{35}$$

$$G_2 = (A - N\cos\theta)\omega_2 + (A_0\cos\theta - N)\Omega_2 - n_0\sin\theta, \tag{36}$$

$$G_3 = (A_0\Omega_2 - N\omega_2)\sin\theta + n + n_0\cos\theta. \tag{37}$$

Постоянные k, k_0 связаны с n, n_0 соотношениями

$$n = (AA_0 - N^2)k, \quad n_0 = (AA_0 - N^2)k_0. \tag{38}$$

Запишем (35) – (37) при условии (8) и значениях (31), (32), (38), (10)

$$G_1 = -2\varkappa[A_0 - N\cos\theta + (A - A_0 - 2N\cos\theta)A_0k/\eta],$$
$$G_2 = \big\{(A_0\cos\theta - N)\eta + A_0k[-N\cos^2\theta + (A + A_0)\cos\theta - N]\big\}/\sin\theta,$$
$$G_3 = A_0\eta + \big[-A_0N\cos\theta + (A + A_0)A_0 - N^2\big]k,$$

и, подставив их в интеграл (34), находим

$$\begin{gathered}4\varkappa^2\sin^2\theta[A_0 - N\cos\theta + (A + A_0 - 2N\cos\theta)A_0k/\eta]^2 = \\ = g^2(1 - \cos^2\theta) + (2A_0N\cos\theta - A_0^2 - N^2)\eta_0^2 + \\ +2A_0k\eta[-2N^2\cos^2\theta + (A + 3A_0)N\cos\theta - (A + A_0)A_0] + \\ +k^2\big[2A_0N^3\cos^3\theta - (2AA_0 + 9A_0^2 - N^2)N^2\cos^2\theta + \\ +2A_0^2(2A + 3A_0)N\cos\theta - A_0^2N^2 - (AA_0 + A_0^2 - N^2)^2)\big].\end{gathered} \tag{39}$$

Как следует из [3, (5.6)*],

$$\dot\theta = \Omega_1 - \omega_1,$$

которое с учетом (21) имеет вид

$$\dot\theta = -2\varkappa.$$

Запишем выражение для $\varkappa\sin\theta$, учитывая замену (28),

$$2\varkappa\sin\theta = \frac{-\eta\dot\eta}{A_0Nk^2},$$

и, подставив его вместе с (38) в (39), получим

$$\dot\eta P_3(\eta) = \sqrt{P_6(\eta)}, \tag{40}$$

где

$$\begin{gathered}P_3(\eta) = -\{\eta^3 + 2A_0k\eta^2 + (2A_0^2k^2 - \eta_0^2)\eta + 2A_0k[(A + A_0)A_0k^2 - \eta_0^2]\}/(A_0Nk^2), \\ P_6(\eta) = -\eta^6 - 4A_0k\eta^5 + [3\eta_0^2 - g^2/N^2 - (2AA_0 + 9A_0^2 - N^2)k^2]\eta^4 + 4A_0k[2\eta_0^2 - \\ -A_0(A + 3A_0)k^2]\eta^3 + [-3\eta_0^4 + 2\eta_0^2g^2/N^2 + 2(2AA_0 + 7A_0^2 - N^2)k^2\eta_0^2 - \\ -4A_0^3(2A + 3A_0)k^4]\eta^2 + 4A_0k[-\eta_0^4 + (A + 3A_0)A_0k^2\eta_0^2 - 2(A + A_0)A_0^3k^4]\eta + \\ +\eta_0^6 - g^2\eta_0^4/N^2 - (2AA_0 + 5A_0^2 - N^2)k^2\eta_0^4 + 4A_0^2g^2k^4 + \\ +4(2AA_0 + 2A_0^2 - N^2)A_0^2k^4\eta_0^2 - 4A_0^4N^2k^6 - 4(AA_0 + A_0^2 - N^2)^2A_0^2k^6,\end{gathered} \tag{41}$$

из уравнения (40) определим квадратурой зависимость t от η

$$t - t_0 = \int \frac{P_3(\eta)}{\sqrt{P_6(\eta)}}d\eta. \tag{42}$$

Как следует из (42),

$$\varkappa^2(\theta) = \frac{\eta^2 P_6(\eta)}{[4A_0^2N^2k^4 - (\eta^2-\eta_0^2)^2]P_3^2(\eta)}. \tag{43}$$

Заметим, что справа в (42) имеем гиперэллиптический интеграл.

Запишем циклические интегралы [3, (5.11)*] при условии (8):

$$\dot\varphi = \frac{n}{I} - \omega_3, \quad \dot\Phi = -\Omega_3.$$

Подставив в них соотношения (24), (25), (28), найдем

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{AA_0 - N^2 - A_0I}{I}kt - 4A_0^2N^2k^4\int\frac{P_3(\eta)\eta d\eta}{[4A_0^2N^2k^4-(\eta^2-\eta_0^2)^2]\sqrt{P_6(\eta)}}\ , \tag{44}$$

$$\Phi - \Phi_0 = 2A_0Nk^2\int\frac{(\eta^2-\eta_0^2)P_3(\eta)\eta d\eta}{[4A_0^2N^2k^4-(\eta^2-\eta_0^2)^2]\sqrt{P_6(\eta)}}\ . \tag{45}$$

В (44), (45) интегралы также гиперэллиптические.

Зависимость потенциальной энергии П упругого элемента от η находим, подставив в интеграл энергии [3, (5.14)*]

$$A(\omega_1^2+\omega_2^2) + A_0(\Omega_1^2+\Omega_2^2) - 2N(\Omega_1\omega_1\cos\theta + \omega_2\Omega_2) + 2\Pi(\theta) = 2h$$

величины (29) — (32), (43), (28):

$$\begin{gathered} 2h - 2\Pi(\eta) = \\ = \frac{A_0^2k^2[A(\eta^2-\eta_0^2)^2 + 4N^2k(\eta+A_0k)(\eta^2-\eta_0^2) + 4A_0N^2k^2(\eta+A_0k)^2]}{4A_0^2N^2k^4-(\eta^2-\eta_0^2)^2} + \\ + \frac{4A_0^2N^2k^3[AA_0^2k^3 + A_0k(A_0k+\eta)^2 + (A_0k+\eta)(\eta^2-\eta_0^2)]P_6(\eta)}{[4A_0^2N^2k^4-(\eta^2-\eta_0^2)^2][A_0k(2AA_0k^2+\eta^2-\eta_0^2)+(\eta+A_0k)(2A_0^2k^2+\eta^2-\eta_0^2)]^2}, \end{gathered} \tag{46}$$

где $P_6(\eta)$ определено соотношением (41). Отметим, что потенциальная энергия П представлена рациональной функцией переменной η.

Таким образом, построено новое точное решение задачи, определяемое соотношениями (29) — (33), (42) — (46).

1. *Лесина М.Е., Зиновьева Я.В.* Новое точное решение // Зб. наук.-метод. робiт. – Донецьк: ДонНТУ, 2005. – С. 18-35.
2. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. — 1974. — Вып. 6. — С. 15-24.
3. *Лесина М.Е.* Точные решения двух новых задач аналитической динамики систем сочлененных тел. – Донецк: ДонГТУ, 1996. – 238 с.

Донецкий национальный техн. ун-т Получено 12.04.05