УДК 531.38

©2005. **Г.В. Горр, Х.М. Яхья, Е.К. Щетинина**

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ГРИОЛИ В СЛУЧАЕ ОДНОГО ИНВАРИАНТНОГО СООТНОШЕНИЯ

Проведено интегрирование дифференциальных уравнений Д. Гриоли в случае, когда они допускают одно инвариантное соотношение, которое является линейным по компонентам кинетического момента и нелинейным по компонентам единичного вектора оси симметрии силового поля. На основании первых интегралов и исходного инвариантного соотношения система уравнений Гриоли–Пуассона преобразована к системе второго порядка. С помощью теории интегрирующего множителя для определенных классов инвариантных соотношений получен интеграл приведенной системы, что позволяет установить зависимости основных переменных задачи от времени.

Введение. Многие задачи динамики твердого тела, имеющего неподвижную точку, описываются системой шести дифференциальных уравнений, допускающих три первых интеграла. При этом правые части этой системы не зависят от тех переменных, относительно которых они являются производными по времени. Например, уравнения движения твердого тела под действием потенциальных и гироскопических сил, полученные Д. Гриоли [1], имеют вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \times a\mathbf{x} + \mu(\nu_1,\nu_2,\nu_3)(\boldsymbol{\nu} \times a\mathbf{x}) + \frac{\partial L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \times a\mathbf{x} +$$

$$+\frac{\partial U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \times \boldsymbol{\nu}, \qquad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times a\mathbf{x}, \tag{1}$$

где введены следующие обозначения: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$– момент количества движения тела; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$– единичный вектор оси симметрии силового поля; $a = (a_{ij})$ – гирационный тензор, вычисленный в неподвижной точке; $\mu(\nu_1,\nu_2,\nu_3), L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$, $U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$– дифференцируемые функции;

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \left(\frac{\partial L}{\partial \nu_1}, \frac{\partial L}{\partial \nu_2}, \frac{\partial L}{\partial \nu_3}\right), \qquad \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \left(\frac{\partial U}{\partial \nu_1}, \frac{\partial U}{\partial \nu_2}, \frac{\partial U}{\partial \nu_3}\right);$$

точка над переменными $\mathbf{x}$ и $\boldsymbol{\nu}$ обозначает относительную производную по времени t.

Уравнения (1) имеют первые интегралы

$$\mathbf{x} \cdot a\mathbf{x} - 2U(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = 2E, \qquad \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\nu} + L(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = k, \qquad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1. \tag{2}$$

Здесь E и k — произвольные постоянные.

Если в уравнениях (1) положим

$$\mu(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = 0, \quad U(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(C\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}), \quad L(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}), \tag{3}$$

где $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$– постоянные векторы, $B = (B_{ij})$, $C = (C_{ij})$– постоянные симметричные матрицы третьего порядка, то получим уравнения Кирхгофа [2] (история формирования уравнений Кирхгофа и различные формы этих и обобщенных уравнений изложены в работе [3]):

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \times a\mathbf{x} + a\mathbf{x} \times B\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \mathbf{s}), \qquad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times a\mathbf{x}. \tag{4}$$

На основании соотношений (3) первые интегралы (2) примут вид

$$\mathbf{x} \cdot a\mathbf{x} - 2(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) + (C\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 2E, \qquad (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k, \qquad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1. \tag{5}$$

Классические уравнения Эйлера–Пуассона задачи о движении тяжелого твердого тела вытекают из уравнений (4) при условиях $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}, B = 0, C = 0$.

Согласно теории интегрирующего множителя Якоби, которая подробно изложена в [4], для интегрирования уравнений (1) с интегралами (2) достаточно знать дополнительный первый интеграл этих уравнений. Известно, что для уравнений Эйлера–Пуассона известны три случая существования дополнительного первого интеграла (Эйлера, Лагранжа, Ковалевской). Для уравнений (4) имеют место пять случаев существования дополнительного к соотношениям (5) первого интеграла (два случая Клебша, Кирхгофа, Стеклова, Ляпунова). Обзоры основных результатов в этом направлении даны в работах [5–7].

Поскольку дифференциальные уравнения (4) неинтегрируемы в квадратурах [8, 9], в научной литературе по динамике твердого тела интенсивно изучаются инвариантные соотношения. При этом наиболее полно исследованы линейные инвариантные соотношения, которые обладают свойством, что производная в силу уравнений движения от инвариантного соотношения тождественно равна нулю на этом инвариантном соотношении [10]. В. Гесс [11] изучал линейные инвариантные соотношения в классической задаче о движении тяжелого твердого тела, Л.Н. Сретенский [12] — в задаче о движении тяжелого гиростата, С.А. Чаплыгин [13] и П.В. Харламов [5, 14] – в задаче о движении твердого тела в жидкости. В работах [13–16] рассмотрены различные проблемы интегрирования уравнений (4) на линейном инвариантном соотношении. В работе [17] выполнено интегрирование уравнений (1) в случае, когда эти уравнения допускают линейное инвариантное соотношение по всем переменным. Работы [18–20] посвящены исследованию вопросов существования у уравнений (1) инвариантного соотношения следующего вида

$$x_1 - g(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = 0\,, \tag{6}$$

где $g(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – заданная дифференцируемая функция переменных ν_1, ν_2, ν_3.

В данной работе продолжено изучение соотношения (6), начатое в работе [20]. Используя в исследовании соотношения (6) главную систему координат, автор статьи [20] получил выражения для функций $\mu(\nu_1, \nu_2, \nu_3), L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, а интегрирование системы (1) свел к интегрированию скалярной системы третьего порядка. На основании результатов [14–17] для определенных типов инвариантных соотношений в классе (6) в данной статье выполнено интегрирование редуцированной системы [20], что позволяет получить зависимость основных переменных задачи (1) от времени.

1. Условия существования инвариантного соотношения (6). Потребуем, чтобы производная от левой части инвариантного соотношения (6) в силу скалярных уравнений, вытекающих из векторной системы (1), была тождественно равна нулю при $x_1 = g(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$. Тогда получим следующие условия

$$a_{23} = a_{12} = 0, \quad a_{33} = a_{22}, \tag{7}$$

$$a_{13}g(\nu_1,\nu_2,\nu_3)+a_{22}\left(\nu_3\frac{\partial g(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_1}-\nu_1\frac{\partial g(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_3}-\frac{\partial L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_3}-\nu_3\mu(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\right)=0, \tag{8}$$

$$a_{22}\left(\nu_1\frac{\partial g(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_2}-\nu_2\frac{\partial g(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_1}+\frac{\partial L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_2}+\nu_2\mu(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\right)+$$
$$+a_{13}\left(\nu_2\frac{\partial g(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_3}-\nu_3\frac{\partial g(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_2}\right)=0, \tag{9}$$

$$g(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\Bigg[a_{13}\left(\nu_1\frac{\partial g(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_2}-\nu_2\frac{\partial g(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_1}+\frac{\partial L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_2}+\nu_2\mu(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\right)+$$
$$+a_{11}\left(\nu_2\frac{\partial g(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_3}-\nu_3\frac{\partial g(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_2}\right)\Bigg]+\nu_3\frac{\partial U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_2}-\nu_2\frac{\partial U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_3}=0. \tag{10}$$

Из равенств (7) вытекает, что первая координатная ось, проекция вектора $\mathbf{x}$, на которую определена соотношением (6), перпендикулярна круговому сечению гирационного эллипсоида. Т. е. условия (7) являются аналогом условия Гесса [11, 12].

Выпишем общее решение уравнений (8)–(10):

$$\begin{gathered}
L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)=\frac{1}{a_{22}}\left[g(\nu_1,\nu_2,\nu_3)(a_{13}\nu_3-a_{22}\nu_1)+\Phi(\nu_1)\right],\\
2U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)=\frac{1}{a_{22}}\left[(a_{11}a_{22}-a_{13}^2)g^2(\nu_1,\nu_2,\nu_3)+f(\nu_1)\right],\\
\mu(\nu_1,\nu_2,\nu_3)=\frac{1}{a_{22}}\left(a_{22}\frac{\partial g(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_1}-a_{13}\frac{\partial g(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_3}\right),
\end{gathered} \tag{11}$$

где $\Phi(\nu_1)$ и $f(\nu_1)$ – произвольные дифференцируемые функции переменной ν_1.

При наличии соотношений (11) из первого динамического уравнения и уравнений Пуассона системы (1) вытекает

$$\big(x_1-g(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\big)^{\bullet}=\big(x_1-g(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\big)\Bigg[a_{13}x_2+$$
$$+\frac{(a_{11}a_{22}-a_{13}^2)}{a_{22}}\left(\nu_2\frac{\partial g(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_3}-\nu_3\frac{\partial g(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_2}\right)\Bigg]. \tag{12}$$

Уравнение (12) является уравнением Леви–Чивита [10] для инвариантного соотношения (6).

Если полагать, что функция $\mu(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\equiv 0$, то из последнего уравнения системы (11) следует, что $g=g(\nu_2,a_{13}\nu_1+a_2\nu_3)$.

2. Интегрирование системы (1). Для интегрирования уравнений (1) с учетом условий (6), (7), (11) обратимся к соотношениям (2). Из них найдем

$$x_2=\frac{1}{a_{22}(\nu_2^2+\nu_3^2)}\left[\nu_2(a_{22}k-\Phi(\nu_1))-\nu_3\sqrt{D(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}\right], \tag{13}$$

$$x_3 = \frac{1}{a_{22}(\nu_2^2+\nu_3^2)}\left[\nu_3(a_{22}k-\Phi(\nu_1)) - a_{13}(\nu_2^2+\nu_3^2)g(\nu_1,\nu_2,\nu_3) + \nu_2\sqrt{D(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}\right],$$

где

$$D(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = (\nu_2^2+\nu_3^2)(2a_{22}E + f(\nu_1)) - (ka_{22}-\Phi(\nu_1))^2. \tag{14}$$

Поскольку выражения (13) не содержат других особенностей, кроме случая $\nu_2^2+\nu_3^2=0$, то, полагая в дальнейшем $\nu_1 \neq 1$, можно пренебречь вторым и третьим динамическим уравнениями, вытекающими из (1). Вместо этих уравнений будем рассматривать соотношения (6), (13), (14) и уравнение Пуассона из (1).

Введем вместо переменных ν_1, ν_2, ν_3 переменные θ, φ

$$\nu_1 = \cos\theta, \quad \nu_2 = \sin\theta\cos\varphi, \quad \nu_3 = \sin\theta\sin\varphi. \tag{15}$$

Тогда геометрическое соотношение $\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1$ становится тождеством. Используя формулы (13)–(15), внесем выражения для x_1 из (6), x_2 и x_3 из (13) в уравнения Пуассона из системы (1)

$$\dot{\theta} = -\frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\Delta(\cos\theta)}, \tag{16}$$

$$a_{22}\sin\theta\cdot\sqrt{\Delta(\cos\theta)}d\varphi - [(a_{11}a_{22}-a_{13}^2)g(\cos\theta,\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi)\sin^2\theta +$$
$$+(a_{13}\sin\theta\sin\varphi - a_{22}\cos\theta)(ka_{22}-\Phi(\cos\theta)) + a_{13}\sin\theta\cos\varphi\cdot\sqrt{\Delta(\cos\theta)}]d\theta = 0. \tag{17}$$

Здесь

$$\Delta(\cos\theta) = (1-\cos^2\theta)(2a_{22}E + f(\cos\theta)) - (ka_{22}-\Phi(\cos\theta))^2. \tag{18}$$

Уравнение (16) интегрируется независимо от уравнения (17):

$$\int\limits_{\cos\theta_0}^{\cos\theta} \frac{d\cos\theta}{\sqrt{\Delta\cos\theta}} = t - t_0. \tag{19}$$

Зависимость $\theta = \theta(t)$ можно найти путем обращения интеграла (19).

Для интегрирования уравнения (17) положим

$$g(\cos\theta,\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi) = G_0(\theta) + G_1(\theta)\cos\varphi + G_2(\theta)\sin\varphi, \tag{20}$$

где G_i $(i = 0,1,2)$– заданные функции от переменной θ. Тогда в силу (20) из (17) получим

$$a_{22}\sin\theta\sqrt{\Delta\cos\theta}d\varphi - (L_0(\theta) + L_1(\theta)\cos\varphi + L_2(\theta)\sin\varphi)d\theta = 0. \tag{21}$$

Здесь

$$\begin{gathered} L_0(\theta) = a_0G_0(\theta)\sin^2\theta - a_{22}(ka_{22}-\Phi(\cos\theta))\cos\theta, \\ L_1(\theta) = [a_0G_1(\theta)\sin\theta + a_{13}\sqrt{\Delta(\cos\theta)}]\sin\theta, \qquad (a_0 = a_{11}a_{22}-a_{13}^2), \\ L_2(\theta) = [a_0G_2(\theta)\sin\theta + a_{13}(ka_{22}-\Phi(\cos\theta))]\sin\theta. \end{gathered} \tag{22}$$

Известно [13, 14], что уравнения типа (21) сводятся к уравнению Риккати. Например, замена $u = \operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}$ позволяет уравнение (21) привести к виду

$$2a_{22}\sin\theta\sqrt{\Delta(\cos\theta)}u'_\theta + (L_1(\theta)-L_0(\theta))u^2 - 2L_2(\theta)u - (L_0(\theta)+L_1(\theta)) = 0. \tag{23}$$

Уравнение (23) легко интегрируется при условии $L_1(\theta)=L_0(\theta)$, т. е. при выполнении равенства

$$a_{22}(ka_{22}-\Phi(\cos\theta))\cos\theta=\big[a_0(G_0(\theta)-G_1(\theta))\sin\theta-a_{13}\sqrt{\Delta(\cos\theta)}\big]\sin\theta. \qquad (24)$$

Зависимость $\varphi=\varphi(\theta)$ определена формулой

$$\varphi(\theta)=2\mathrm{arctg}\left[N(\theta)\left(\frac{1}{a_{22}}\int\frac{L_0(\theta)d\theta}{N(\theta)\sqrt{\Delta(\cos\theta)}\sin\theta}+c_1\right)\right], \qquad (25)$$

где $N(\theta)=\exp\left(\dfrac{1}{a_{22}}\displaystyle\int\frac{L_0(\theta)d\theta}{\sqrt{\Delta(\cos\theta)}\sin\theta}\right)$, c_1 – произвольная постоянная.

Равенство (24) связывает функции $\Phi(\cos\theta)$ и $f(\cos\theta)$. Если $a_{13}=0$, то равенство (24) дает условие на функцию $\Phi(\cos\theta)$:

$$\Phi(\cos\theta)=ka_{22}+\frac{[G_0(\theta)-G_1(\theta)]\sin^2\theta}{\cos\theta},$$

а функция $f(\cos\theta)$ остается произвольной. Так как выражение (18) принимает вид

$$\Delta(\cos\theta)=[2a_{22}E+f(\cos\theta)]\sin^2\theta-\frac{[G_0(\theta)-G_1(\theta)]^2\sin^4\theta}{\cos^2\theta},$$

то функции $\theta(t)$ и $\varphi(t)$ определяются соответственно соотношениями (19) и (25), они будут действительными, если постоянную E взять достаточно большой.

3. Интегрирование уравнения (21) с помощью интегрирующего множителя. Рассмотрим интегрирование уравнения (21) с помощью интегрирующего множителя. По аналогии с [13–17] зададим его в виде

$$M(\varphi,\theta)=\frac{1}{F(\varphi,\theta)\sqrt{\Delta(\cos\theta)}\sin\theta}, \qquad F(\varphi,\theta)=\psi_0(\theta)+\psi_1(\theta)\cos\varphi+\psi_2(\theta)\sin\varphi\ . \qquad (26)$$

Множитель (26) существует, если функции $\psi_i(\theta)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}
&a_{22}\sqrt{\Delta(\cos\theta)}\psi_0'(\theta)\sin\theta=\psi_1(\theta)L_2(\theta)-\psi_2(\theta)L_1(\theta),\\
&a_{22}\sqrt{\Delta(\cos\theta)}\psi_1'(\theta)\sin\theta=\psi_0(\theta)L_2(\theta)-\psi_2(\theta)L_0(\theta),\\
&a_{22}\sqrt{\Delta(\cos\theta)}\psi_2'(\theta)\sin\theta=\psi_1(\theta)L_0(\theta)-\psi_0(\theta)L_1(\theta).
\end{aligned} \qquad (27)$$

Если найдено решение уравнений (27), то уравнение (23) имеет первый интеграл $V(\varphi,\theta)=$ $=c_2$ (c_2 – произвольная постоянная), для которого

$$\frac{\partial V(\varphi,\theta)}{\partial\varphi}=F^{-1}(\varphi,\theta), \qquad \frac{\partial V(\varphi,\theta)}{\partial\theta}=-\frac{L_0(\theta)+L_1(\theta)\cos\varphi+L_2(\theta)\sin\varphi}{F(\varphi,\theta)\sqrt{\Delta(\cos\theta)}\sin\theta}. \qquad (28)$$

Уравнения (27) имеют первый интеграл

$$\psi_0^2(\theta)-\psi_1^2(\theta)-\psi_2^2(\theta)=c_3, \qquad (29)$$

где c_3 – произвольная постоянная.

Потребуем, чтобы система (27) имела решение $\psi_1(\theta) = \beta_i$ $(i = 0, 1, 2)$, где β_i – постоянные. Тогда получим следующие условия:

$$\Phi(\cos\theta) = ka_{22} - \frac{a_0(\beta_2 G_0(\theta) - \beta_0 G_2(\theta))\sin^2\theta}{a_{13}\beta_0\sin\theta + a_{22}\beta_2\cos\theta}, \tag{30}$$

$$a_{13}(\beta_0 a_{13}\sin\theta + \beta_2 a_{22}\cos\theta)\sqrt{\Delta(\cos\theta)} = a_0[\beta_1(a_{13}G_0(\theta)\sin\theta + a_{22}G_2(\theta)\cos\theta) -$$
$$-G_1(\theta)(\beta_0 a_{13}\sin\theta + \beta_2 a_{22}\cos\theta)]\sin\theta. \tag{31}$$

Равенство (30) является условием на функцию $\Phi(\cos\theta)$. Равенство (31) при $a_{13} \neq 0$ служит ограничением на функцию $f(\cos\theta)$, а при $a_{13} = 0$ переходит в условие

$$G_1(\theta) = \frac{\beta_1[a_{13}G_0(\theta)\sin\theta + a_{22}G_2(\theta)\cos\theta)]}{\beta_2 a_{22}\cos\theta},$$

которое связывает функции $G_i(\theta)$.

Когда выполнены условия (30), (31), уравнение (21) интегрируется в квадратурах, что позволяет найти зависимость $\varphi(\theta)$. При этом возникают три варианта. Здесь рассмотрим два из них.

В первом варианте полагаем $\beta = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2} > \beta_0$, тогда

$$\varphi(\theta) = \mathrm{arctg}\frac{\beta_2}{\beta_1} + \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{b + \beta_0}{b - \beta_0}}\,\mathrm{th}\frac{\gamma_1[F_i(\theta) + c_2]}{2}, \tag{32}$$

где c_2– произвольная постоянная и

$$\gamma_1 = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 - \beta_0^2}, \qquad F_1(\theta) = \frac{a_{11}}{\beta_1}\int\frac{G_1(\theta)d\theta}{\sqrt{\Delta(\cos\theta)}}, \tag{33}$$

$$F_2(\theta) = \frac{a_{13}}{a_{22}}\int\frac{d\theta}{\chi(\theta)}, \qquad \chi(\theta) = \beta_1 - \frac{G_1(\theta)(\beta_0 a_{13}\sin\theta + \beta_2 a_{22}\cos\theta)}{a_{13}G_0(\theta)\sin\theta + a_{22}G_2(\theta)\cos\theta}. \tag{34}$$

При использовании формулы (32) следует при $a_{13} = 0$ выбирать функцию $F_1(\theta)$ из (33), а при $a_{13} \neq 0$ выбирать функцию $F_2(\theta)$ из (34).

Во втором варианте полагаем $b < \beta_0$, тогда

$$\varphi(\theta) = \mathrm{arctg}\frac{\beta_2}{\beta_1} + 2\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{\beta_0 + b}{\beta_0 - b}}\,\mathrm{tg}\,\frac{\gamma_2[F_i(\theta) + c_4]}{2}, \tag{35}$$

где $\gamma_2 = \sqrt{\beta_0^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2}$, c_4 – произвольная постоянная, а $F_i(\theta)$ выбирается по аналогии с первым вариантом.

Для нахождения зависимости $\theta(t)$ при заданных функциях G_i $(i = 0, 1, 3)$ необходимо в уравнение (19) подставить значение $\sqrt{\Delta(\cos\theta)}$, найденное из равенства (31). Тогда зависимости основных переменных задачи (1) от времени можно определить с помощью соотношений (6), (13), (32)–(35).

Приведем второй случай существования решения системы (27). Используя полуобратный метод, будем предполагать заданными не функции $G_i(\theta)$, а функции $\psi_i(\theta)$. Положим в системе (27) $L_0(\theta) = 0,\ \psi_0(\theta) = \sqrt{\Delta(\cos\theta)}$. Тогда из (22), (27) получим

$$G_1(\theta) = -\frac{1}{a_0\sin\theta}\big(a_{22}\psi_2'(\theta) + a_{13}\psi(\theta)\big), \qquad \psi(\theta) = \sqrt{\psi_1^2(\theta) + \psi_2^2(\theta) + c_3},$$
$$G_2(\theta) = \frac{2}{a_0 a_{22}\sin 2\theta}\big[a_{22}^2\psi_1'(\theta)\cos\theta - a_0 a_{13} G_0(\theta)\sin^2\theta\big], \tag{36}$$
$$\Phi(\cos\theta) = k a_{22} - \frac{a_0 G_0(\theta)\sin^2\theta}{a_{22}\cos\theta},$$
$$f(\cos\theta) = \frac{4}{a_{22}^2\sin^2 2\theta}\big[a_0^2 G_0^2(\theta)\sin^4\theta + a_{22}^2\psi^2(\theta)\cos^2\theta\big] - 2a_{22}E.$$

Для нахождения интеграла уравнения (21) формулы (25) перепишем в виде

$$\frac{\partial V(\varphi,\theta)}{\partial\varphi} = \frac{1}{\psi(\theta) + \nu(\theta)\cos(\varphi - \alpha(\theta))}, \qquad \operatorname{tg}\alpha(\theta) = \frac{\psi_2(\theta)}{\psi_1(\theta)},$$
$$\frac{\partial V(\varphi,\theta)}{\partial\theta} = \frac{\psi_2'(\theta)\cos\varphi - \psi_1'(\theta)\sin\varphi}{\psi(\theta)[\psi(\theta) + \nu(\theta)\cos(\varphi - \alpha(\theta))]}, \qquad \nu^2(\theta) = \psi_1^2(\theta) + \psi_2^2(\theta). \tag{37}$$

Интегрирование уравнений (37) проведем в двух случаях. В первом случае полагаем $c_3 > 0$. Тогда интеграл уравнения (21) таков

$$\frac{2}{\sqrt{c_3}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\psi(\theta) - \nu(\theta)}{\psi(\theta) + \nu(\theta)}}\operatorname{tg}\frac{\varphi - \alpha(\theta)}{2} + K(\theta) = c_5, \tag{38}$$

где c_5 – произвольная постоянная, а c_3 – фиксированная постоянная.

$$K(\theta) = \int \psi^{-1}(\theta)\Big(\operatorname{arctg}\frac{\psi_2(\theta)}{\psi_1(\theta)}\Big)' d\theta. \tag{39}$$

Из равенства (38) легко определяется зависимость $\varphi = \varphi(\theta)$.

В случае $c_3 < 0$ из соотношений (37) найдем

$$\varphi(\theta) = \operatorname{arctg}\frac{\psi_2(\theta)}{\psi_1(\theta)} + 2\operatorname{arctg}\frac{P(\theta)}{\sqrt{-c_3}}\operatorname{th}\frac{\sqrt{-c_3}(c_6 - K(\theta))}{2}. \tag{40}$$

Здесь $P(\theta) = \psi(\theta) + \nu(\theta)$, c_6– произвольная постоянная, а функция $K(\theta)$ определена формулой (39). В силу соотношений (36) формула (19) примет вид

$$t - t_0 = -\int \frac{\sin\theta\ d\theta}{\sqrt{\psi_1^2(\theta) + \psi_2^2(\theta) + c_3}}\,.$$

Таким образом, задавая функции $\psi_1(\theta), \psi_2(\theta)$, функции $G_1(\theta), G_2(\theta), \psi(\theta), \Phi(\cos\theta)$, $f(\cos\theta)$ найдем из равенств (36). Когда $c_3 > 0$, то функция $\theta = \theta(t)$, определяемая в результате обращения интеграла (41), будет действительной. Когда $c_3 < 0$, то выбирая постоянную c_3 достаточно малой по модулю, опять из (41) получим действительную функцию $\theta(t)$. В обоих случаях на основании формул (6), (13), (38)–(40) находятся зависимости основных переменных задачи (1) от времени.

Отметим, что в случае $a_{13} = 0$ часть соотношений из системы (36) упрощается

$$G_1(\theta) = -\frac{\psi_2'(\theta)}{a_{11}\sin\theta}, \qquad G_2(\theta) = \frac{\psi_1'(\theta)}{a_{11}\sin\theta}\,, \tag{42}$$

т. е., если считать заданными функции $G_1(\theta), G_2(\theta)$, то $\psi_1(\theta), \psi_2(\theta)$ определяются по формулам

$$\psi_1 = a_{11}\int G_2(\theta)\sin\theta d\theta, \qquad \psi_2 = -a_{11}\int G_1(\theta)\sin\theta d\theta. \tag{43}$$

Очевидно при этом $\psi_0(\theta) = \sqrt{\Delta(\cos\theta)}$, где

$$\Delta(\cos\theta) = a_{11}\Big[(\int G_2(\theta)\sin\theta d\theta))^2 + (\int G_1(\theta)\sin\theta d\theta)^2\Big] + c_3.$$

В такой постановке функция $G_0(\theta)$ остается произвольной функцией переменной θ.

При $a_{13} \neq 0$ соотношения вида (42), (43) получить невозможно. В этом случае для произвольных дифференциальных функций $G_0(\theta), G_2(\theta)$ можно указать только явную зависимость $\psi_1(\theta)$:

$$\psi_1(\theta) = \frac{a_0}{a_{22}^2}\int\frac{(a_{22}G_2(\theta)\cos\theta + a_{13}G_0(\theta)\sin\theta)\sin\theta}{\cos\theta}\,d\theta\,,$$

а зависимость $G_1(\theta)$ остается в прежнем виде, т. е. она определена первым уравнением из системы (36).

Отметим, что в общем случае при заданных функциях $\psi_i(\theta)$ все функции $L_i(\theta)$ из системы (27) определить невозможно, так как правые части уравнений (27) зависимы.

В отмеченных выше случаях имели место условия на функции $\Phi(\cos\theta), f(\cos\theta)$. Можно привести пример, когда эти функции произвольны. Положим в выражении (20) $G_1(\theta) = G_2(\theta) = 0$, т. е.

$$g(\cos\theta, \sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi) = G_0(\theta)\,, \tag{44}$$

а в уравнении (21) считаем, что $a_{13} = 0$. Тогда из него можно найти $\varphi = \varphi(\theta)$

$$\varphi(\theta) = \int\frac{a_{11}G_0(\theta)\sin^2\theta - (ka_{22} - \Phi(\cos\theta))\cos\theta}{\sqrt{\Delta(\cos\theta)}\sin\theta}\,d\theta\,. \tag{45}$$

Таким образом, если инвариантное соотношение (6) имеет вид (44), то зависимость $\varphi(\theta)$ определится формулой (45).

1. *Grioli G.* Questioni di dinamica del corpo rigidi // Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur. — 1963. — **35**, № 1–2. — P. 35-39.
2. *Kirchhof G.R.* Über die Bewegung eines Rotationsköpers in eines Flüssigkeit // J. fur die reine und angew. Math. — 1870. — B.71. – S. 237-262.
3. *Харламов П.В., Мозалевская Г.В., Лесина М.Е.* О различных представлениях уравнений Кирхгофа // Механика твердого тела. — 2001. — Вып. 31. — С. 3-17.
4. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. — Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1965. – 221 с.

5. *Харламов П.В.* О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // Журнал прикл. математики и техн. физики. — 1963. – № 4. – С. 17-29.
6. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние // Киев: Наук. думка, 1978. — 296 с.
7. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. – Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. — 384 с.
8. *Козлов В.В., Онищенко Д.А.* Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа // Докл. АН СССР. – 1982. – **266**, № 6. — С. 1298-1300.
9. *Зиглин С.Л.* Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновых системах // Функцион. анализ и его прил. – 1983. – **17**, № 1. – С. 8-23.
10. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики: В 2-х т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1951. – Т.2, ч.2. – 555 с.
11. *Hess W.* Über die Eulerschen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren schweren Körpers um einen festen Punkt // Math. Ann. – 1890. – B.37, H.2. – S. 153-181.
12. *Сретенский Л.Н.* О некоторых случаях движения тяжелого твердого тела с гироскопом // Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика. – 1963. – № 3. — С. 60-71.
13. *Чаплыгин С.А.* О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости. Статья вторая // Собр. соч. Т.1. — М.; Л.: Гостехиздат, 1948. – С. 304-311.
14. *Харламов П.В.* О линейном интеграле уравнений движения тяжелого твердого тела в жидкости // Тр. Донецкого индустриального ин-та. – 1957. – **20**, вып.1. – С. 51-67.
15. *Узбек Е.К., Данилейко Е.А.* Об интегрировании уравнений Кирхгофа в случае линейного инвариантного соотношения // Механика твердого тела. — 2004. — Вып. 34. — С. 87-94.
16. *Горр Г.В., Узбек Е.К.* О новом решении уравнений Кирхгофа в случае линейного инвариантного соотношения // Прикл. математика и механика. — 2005. — **67**, вып.6. – С. 931-939.
17. *Щетинина Е.К.* Об интегрировании уравнений Гриоли в случае линейного инвариантного соотношения // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2005. — Вып.10. — С. 229-236.
18. *Орешкина Л.Н.* Об уравнениях М.П. Харламова // Механика твердого тела. – 1986. — Вып.19. — С. 30-33.
19. *Горр Г.В., Миронова Е.М.* Свойства одного класса инвариантных соотношений обобщенных уравнений динамики // Прикл. математика и механика. — 2001. — **65**, вып.3. – С. 411-419.
20. *Yehia H.M.* Particular Integrable Cases in Rigid Body Dynamics // Zeitschrift angew. Math. Mech. – 1988. – Bd.68, H.1. – S. 33-37.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
Гос. ун-т экономики и торговли им. Туган–Барановского, Донецк
Mansoura University, Egypt
`gorr@matfak.dongu.donetsk.ua`
`hyehia@mans.edu.eg`

Получено 12.09.05