

УДК 531.38

©2005. А.М. Ковалев, И.Н. Гашененко, В.В. Кириченко

## О ХАОТИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ И РАСЩЕПЛЕНИИ СЕПАРАТРИС ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ГЕССА

Построенное Гессом точное решение задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой позволяет изучить поведение сложной динамической системы, типичной для многих задач классической механики. На этом частном примере, досконально изученном аналитическими и качественными методами, можно исследовать нелинейную динамику решений возмущенной системы и попытаться выяснить общие внутренние свойства динамических систем, порождающие регулярные и хаотические движения. В настоящей работе изучены возмущенные движения твердого тела в окрестности решения Гесса при нулевой постоянной интеграла площадей. Введены канонические переменные, упрощающие анализ гетероклинических траекторий. Вычислен интеграл Мельникова, характеризующий пересечение сепаратрис. Дано качественное описание асимптотически маятниковых движений твердого тела.

**Введение.** Решение Гесса [1] обладает уникальными аналитическими и качественными свойствами и потому занимает исключительно важное место в современной динамике твердого тела. Двумерные инвариантные многообразия, несущие решение Гесса, определяют границу хаоса в динамической системе, что позволяет изучить возможные сценарии перехода от регулярных к хаотическим движениям. В этом решении удивительным образом сочетаются: инвариантные торы, несущие квазипериодические движения, предельные циклы и изолированные периодические траектории, простейшие движения физического маятника, устойчивые и неустойчивые относительные равновесия, гомо- и гетероклинические движения, частотные резонансы и расщепления сепаратрисных поверхностей. Все это позволяет утверждать, что наиболее значимые идеи и результаты динамики твердого тела могут быть достаточно наглядно объяснены на одном примере – случае Гесса задачи о движении тела вокруг неподвижной точки.

Дифференциальные уравнения движения, отнесенные к главным осям инерции твердого тела в его неподвижной точке, имеют вид

$$\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{G} \times \boldsymbol{\omega} + \mu(\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{r}), \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (1)$$

где  $\boldsymbol{\omega}$  – угловая скорость тела,  $\mathbf{G} = A\boldsymbol{\omega}$  – кинетический момент,  $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$  – тензор инерции,  $\boldsymbol{\gamma}$  – орт вертикали, направленный вверх,  $\mathbf{r}$  – орт, направленный из неподвижной точки к центру тяжести тела,  $\mu$  – произведение веса тела на расстояние центра тяжести от неподвижной точки. Будем изучать движение тела, распределение масс которого удовлетворяет условиям Гесса [1]

$$r_1 \sqrt{A_1(A_3 - A_2)} = r_2 \sqrt{A_2(A_1 - A_3)}, \quad r_3 = 0, \quad A_1 > A_3 > A_2. \quad (2)$$

Если выполнены условия (2), то уравнения (1) допускают линейное инвариантное соотношение [1]

$$r_1 G_1 + r_2 G_2 = 0. \quad (3)$$

Из условий (2), с учетом принятого ограничения  $|\mathbf{r}| = 1$ , найдем

$$r_1^2 = \frac{A_2(A_1 - A_3)}{A_3(A_1 - A_2)}, \quad r_2^2 = \frac{A_1(A_3 - A_2)}{A_3(A_1 - A_2)}. \quad (4)$$

Фундаментальное аналитическое исследование решения Гесса выполнил П.А. Некрасов: он свел задачу к интегрированию уравнения Риккати, из которого получил линейное дифференциальное уравнение второго порядка с периодическими коэффициентами, затем изучил аналитические свойства решений этого уравнения и отметил некоторые свойства траекторий на сфере Пуассона. В совместной работе Б.К. Млодзеевского и П.А. Некрасова были изучены достаточные условия существования периодических и асимптотических движений. Важные качественные свойства движения тела (в частности, при нулевой постоянной площадей) были отмечены Н.Е. Жуковским, именно он назвал рассматриваемую механическую систему локсодромическим маятником Гесса. Полный качественный анализ фазовых траекторий решения Гесса выполнен А.М. Ковалевым [2]. Основанная на результатах [2] детальная классификация возможных движений твердого тела предложена в работе [3]. Расщепление сепаратрис в случае Гесса изучалось в работах [4–6]. В частности, В.В. Козлов показал, что при малых значениях  $\mu$  инвариантная асимптотическая поверхность, заданная уравнением (3), представляет собой пару нерасщепившихся сепаратрис невозмущенной задачи. В [5] было продолжено изучение расщепления сепаратрис возмущенного случая Эйлера–Пуансо и показано, что при достаточно малых  $\mu$  сепаратрисы расщепляются всегда, кроме случая Гесса, когда две пары сепаратрис остаются сдвоенными, а две другие – расщепляются. Метод сечений Пуанкаре применен в [7] для изучения фазовых траекторий на интегральных многообразиях, несущих решение Гесса. Там же дано подробное описание фазовых портретов, соответствующих различным значениям констант первых интегралов.

В настоящей работе исследованы движения твердого тела, подчиненного условиям (2), при нулевой постоянной интеграла площадей и малых значениях параметра  $\mu$ . Введены новые канонические переменные, позволяющие изучать гетероклинические траектории динамической системы. Аналитически вычислен интеграл Мельникова [8] вдоль невозмущенной орбиты, соединяющей устойчивый и неустойчивый предельные циклы. Дано качественное описание асимптотически маятниковых движений на бесконечном интервале времени, изучен и описан механизм возникновения хаотических движений в окрестности решения Гесса. Указаны основные свойства возмущенного движения Гесса в неподвижном базисе.

**1. Канонические переменные Андуайе–Депри<sup>1</sup>.** Для изучения движений твердого тела в окрестности интегрируемого случая Эйлера успешно применяются канонические переменные Андуайе–Депри. Эти же переменные нашли применение в различных компьютерных реализациях метода сечений Пуанкаре [7, 9]. Используем следующие обозначения [4]:  $OXYZ$  – неподвижный триэдр с началом в точке подвеса,  $Oxyz$  – главные оси инерции,  $\Sigma$  – плоскость, перпендикулярная вектору кинетического момента  $\mathbf{G}$  и проходящая через точку закрепления тела. Тогда переменные Андуайе–Депри таковы:  $G$  – модуль вектора кинетического момента  $\mathbf{G}$ ,  $L$  – проекция вектора  $\mathbf{G}$  на подвижную ось  $Oz$ ,  $M$  – проекция вектора  $\mathbf{G}$  на неподвижную ось  $OZ$  (вертикаль),  $g$  – угол между линиями пересечения  $\Sigma$  с плоскостями  $Oxy$  и  $OXY$ ,  $l$  – угол между осью  $Ox$  и линией пересечения  $\Sigma$  с  $Oxy$ ,  $m$  – угол между осью  $OX$  и линией пересечения  $\Sigma$  с  $OXY$ . Сопряженные с  $G, L, M$  переменные  $g, l, m$  являются углами, изменяющимися по модулю  $2\pi$ . Зависимость фазовых переменных от канонических переменных

<sup>1</sup>Краткий комментарий об истории создания этих переменных имеется в монографии [4, с. 54].

Андуайе–Депри выражена следующими формулами

$$G_1 = \sqrt{G^2 - L^2} \sin l, \quad G_2 = \sqrt{G^2 - L^2} \cos l, \quad G_3 = L, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= (\sin \zeta \cos \eta + \sin \eta \cos \zeta \cos g) \sin l + \cos \zeta \sin g \cos l, \\ \gamma_2 &= (\sin \zeta \cos \eta + \sin \eta \cos \zeta \cos g) \cos l - \cos \zeta \sin g \sin l, \\ \gamma_3 &= \sin \zeta \sin \eta - \cos \eta \cos \zeta \cos g, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\sin \eta = L/G$ ,  $\sin \zeta = M/G$ . Формулы обратного преобразования таковы:

$$\begin{aligned} G &= |\mathbf{G}|, \quad g = \arcsin \left( \frac{(G_2 \gamma_1 - G_1 \gamma_2) |\mathbf{G}|}{\sqrt{G_1^2 + G_2^2} |\mathbf{G} \times \boldsymbol{\gamma}|} \right), \\ L &= G_3, \quad l = \operatorname{arctg}(G_1/G_2), \quad M = \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\gamma}. \end{aligned} \quad (7)$$

Запишем инвариантное соотношение (3) в переменных Андуайе–Депри

$$\sqrt{G^2 - L^2} \sin(l + \varphi_0) = 0, \quad (8)$$

где постоянный угол

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{A_1(A_3 - A_2)}}{\sqrt{A_2(A_1 - A_3)}} \right) \in (0, \pi/2), \quad (9)$$

определяющий неподвижную плоскость (инвариантное подпространство) в пространстве  $\mathbb{R}^3(G_1, G_2, G_3)$ , зависит от параметров твердого тела. С учетом (5), (6) гамильтониан системы примет вид

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} [(G^2 - L^2)(A_1^{-1} \sin^2 l + A_2^{-1} \cos^2 l) + A_3^{-1} L^2] + \\ &+ \mu [\sin \zeta \cos \eta \sin(l + \varphi_0) + \cos \zeta \sin \eta \sin(l + \varphi_0) \cos g + \cos \zeta \cos(l + \varphi_0) \sin g]. \end{aligned} \quad (10)$$

Аналогичные канонические переменные  $G, L, M, g, l, m$  использовались для изучения решения Гесса неоднократно, например, в работах [4, 5, 7]. Мы решили нарушить сложившуюся традицию и изменили порядок следования главных осей инерции в подвижном базисе  $Oxyz$ . Переобозначение осей инерции несущественно повлияло на структуру гамильтониана (10), но при этом упростилось уравнение (8). Успех дальнейших исследований мы связываем именно с простой аналитической структурой инвариантного соотношения Гесса.

**2. Новые канонические переменные.** С помощью производящей функции

$$S_2 = 2(l + \varphi_0)J_1 + (g - l - \varphi_0)J_2 + mJ_3$$

найдем соотношения

$$\begin{aligned} L &= \frac{\partial S_2}{\partial l} \equiv 2J_1 - J_2, \quad G = \frac{\partial S_2}{\partial g} \equiv J_2, \quad M = \frac{\partial S_2}{\partial m} \equiv J_3, \\ \theta_1 &= \frac{\partial S_2}{\partial J_1} \equiv 2(l + \varphi_0), \quad \theta_2 = \frac{\partial S_2}{\partial J_2} \equiv g - l - \varphi_0, \quad \theta_3 = \frac{\partial S_2}{\partial J_3} \equiv m, \end{aligned} \quad (11)$$

которые задают каноническое преобразование к переменным  $(J_i, \theta_i)$ . Тогда из (11) следуют выражения

$$l = \frac{\theta_1}{2} - \varphi_0, \quad g = \theta_2 + \frac{\theta_1}{2}, \quad m = \theta_3, \quad J_1 = \frac{G+L}{2}, \quad J_2 = G, \quad J_3 = M.$$

В новых переменных гамильтониан (10) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}} = & J_1(J_1 - J_2)(A_1^{-1} - A_2^{-1}) [\cos(\theta_1 - 2\varphi_0) - \cos 2\varphi_0] + \frac{1}{2} J_2^2 A_3^{-1} + \\ & + \mu [J_1 \sin(\theta_1 + \theta_2) + (J_2 - J_1) \sin \theta_2] \frac{\sqrt{J_2^2 - J_3^2}}{J_2^2} + \\ & + 2\mu \sin \frac{\theta_1}{2} \frac{J_3 \sqrt{J_1(J_2 - J_1)}}{J_2^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Инвариантное соотношение Гесса следует из (8):

$$\sqrt{J_1(J_2 - J_1)} \sin \frac{\theta_1}{2} = 0. \quad (13)$$

На рис. 1 изображены фазовые портреты невозмущенной системы Эйлера–Пуансо, подчиненной условиям (2), в переменных Андуайе–Депри (в интерпретации [4, 5]) и в новых переменных. Выделенные кривые соответствуют сепаратрисам. Жирной линией и пунктиром отмечены сепаратрисы, к которым стремятся решения Гесса при  $\mu \rightarrow 0$ . Цифрами 1–4 отмечены равномерные вращения, к вращениям 1, 2 стремятся маятниковые движения возмущенной задачи.

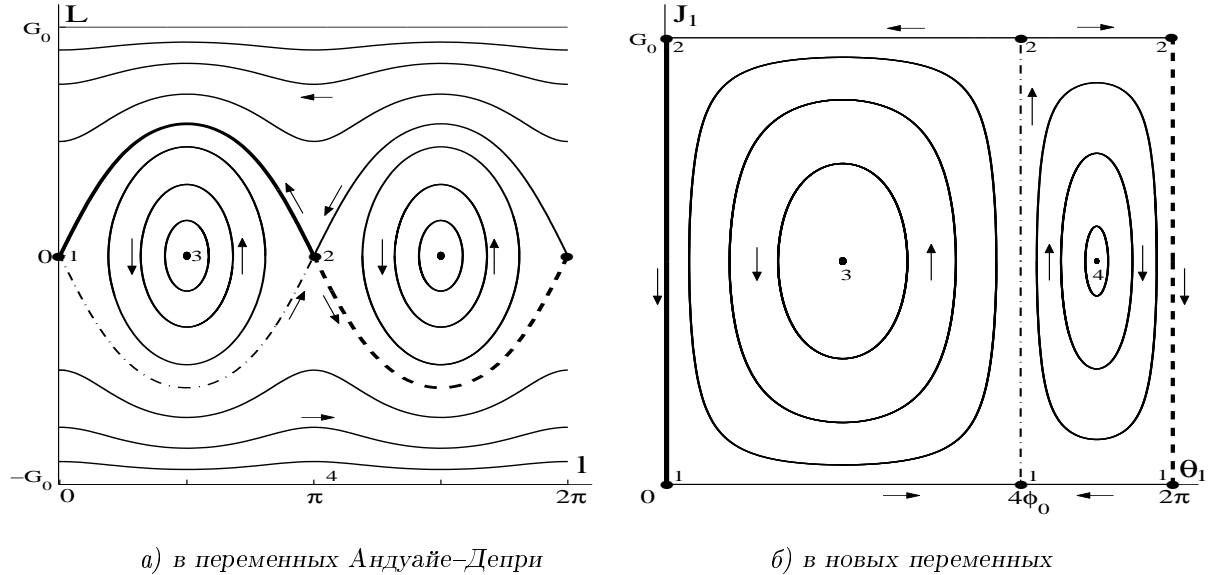


Рис. 1. Фазовый портрет невозмущенной системы Эйлера–Пуансо.

На нулевом уровне интеграла площадей  $M = 0$  гамильтониан (12) равен

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{c}{2} J_2^2 + \varkappa J_1(J_1 - J_2) [\cos(\theta_1 - 2\varphi_0) - \cos 2\varphi_0] + \\ & + \frac{\mu}{J_2} [J_1 \sin(\theta_1 + \theta_2) + (J_2 - J_1) \sin \theta_2], \end{aligned} \quad (14)$$



где  $\varkappa = (A_1^{-1} - A_2^{-1})$ ,  $c = A_3^{-1}$ . Далее будем считать, что углы  $\theta_{1,2}$  изменяются по модулю  $2\pi$ , а изменение переменных  $J_{1,2}$  ограничено неравенствами  $J_2 > 0$ ,  $J_2 \geq J_1 \geq 0$ .

Дифференциальными уравнениями движения твердого тела в новых координатах являются уравнения Гамильтона

$$\dot{\theta}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_i}, \quad \dot{J}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, 2,$$

запишем их в явном виде:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \varkappa(2J_1 - J_2) [\cos(\theta_1 - 2\varphi_0) - \cos 2\varphi_0] + \frac{\mu}{J_2} [\sin(\theta_1 + \theta_2) - \sin \theta_2], \\ \dot{J}_1 &= \varkappa J_1(J_1 - J_2) \sin(\theta_1 - 2\varphi_0) - \mu \frac{J_1}{J_2} \cos(\theta_1 + \theta_2), \\ \dot{\theta}_2 &= cJ_2 - \varkappa J_1 [\cos(\theta_1 - 2\varphi_0) - \cos 2\varphi_0] - \mu \frac{J_1}{J_2} [\sin(\theta_1 + \theta_2) - \sin \theta_2], \\ \dot{J}_2 &= -\frac{\mu}{J_2} [J_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) + (J_2 - J_1) \cos \theta_2]. \end{aligned} \tag{15}$$

Если известно решение системы (15), то циклическую координату  $\theta_3$  найдем квадратурой из уравнения

$$\dot{\theta}_3 = 2\mu \frac{\sqrt{J_1(J_2 - J_1)}}{J_2^2} \sin \frac{\theta_1}{2}.$$

Проекции фазовых траекторий возмущенной системы (15) на плоскость  $\mathbb{R}^2(\theta_1, J_1)$  показаны на рис. 2. Выделенная штрихпунктиром область изображена справа в увеличенном виде для трех различных значений  $\varphi_0$ . Вычисления производились для следующих значений параметров твердого тела:  $\mu = 0.01$ ,  $A_1 = 2.5$ ,  $A_2 = 2.0$ ,  $A_3 = 2.2$ .

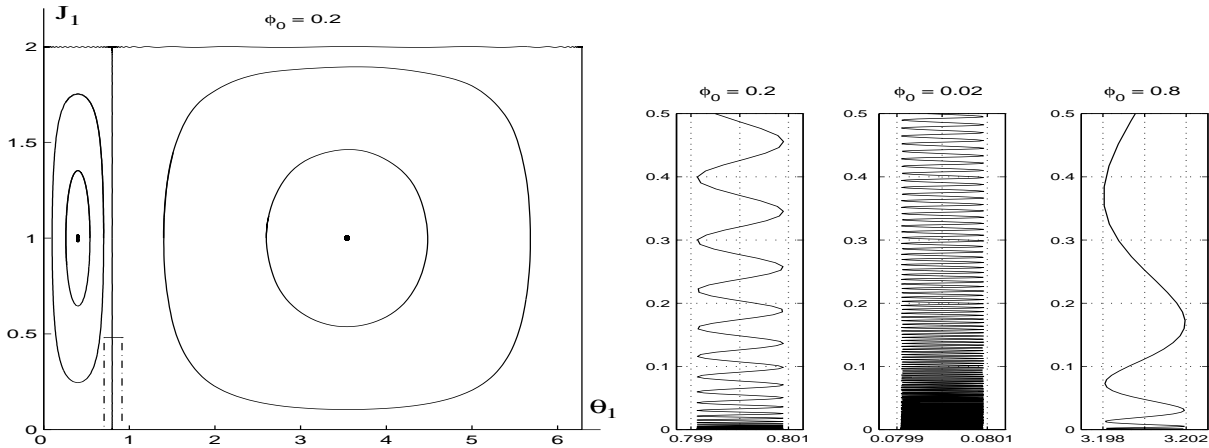


Рис. 2. Проекция фазовых траекторий динамической системы (15) на плоскость  $\mathbb{R}^2(\theta_1, J_1)$ .

**3. Частные решения системы (15).** Для малых значений параметра  $\mu$  величина модуля кинетического момента твердого тела  $|\mathbf{G}| = J_2(t)$  будет оставаться в малой окрестности своего начального значения  $J_2(0)$ . Рассмотрим точные решения системы дифференциальных уравнений (15), которые соответствуют уровням энергии  $h$ , близким к  $h_0 = cJ_2^2(0)/2 > \mu$ .

а) Решения невозмущенной системы. При  $\mu = 0$  имеем невозмущенную систему

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= \varkappa(2J_1 - J_2) [\cos(\theta_1 - 2\varphi_0) - \cos 2\varphi_0], & \dot{J}_1 &= \varkappa J_1(J_1 - J_2) \sin(\theta_1 - 2\varphi_0), \\ \dot{\theta}_2 &= cJ_2 - \varkappa J_1 [\cos(\theta_1 - 2\varphi_0) - \cos 2\varphi_0], & \dot{J}_2 &= 0.\end{aligned}\quad (16)$$

Эта система интегрируема – она описывает движение твердого тела в интегрируемом случае Эйлера. Общее решение системы (16) может быть выписано посредством эллиптических функций времени. Используемые далее невозмущенные сепаратрисы соответствуют двоякоасимптотическим решениям системы (16):

$$1) \theta_1 = 0, \quad J_1 = J_2^0 / (e^{u(t-t_0)+v} + 1), \quad \theta_2 = cJ_2^0(t - t_0) + \theta_2^0, \quad J_2 = J_2^0, \quad (17)$$

$$2) \theta_1 = 4\varphi_0, \quad J_1 = J_2^0 / (e^{-u(t-t_0)+v} + 1), \quad \theta_2 = cJ_2^0(t - t_0) + \theta_2^0, \quad J_2 = J_2^0, \quad (18)$$

где  $\theta_i^0, J_i^0$  – начальные значения при  $t = t_0$ , постоянные параметры обозначены через

$$u = -\varkappa J_2^0 \sin 2\varphi_0 > 0, \quad v = \ln \frac{(J_2^0 - J_1^0)}{J_1^0} \in (-\infty, \infty).$$

б) Решение Гесса. Из результатов Гесса [1, §12] следует, что дифференциальные уравнения (15) допускают два инвариантных соотношения следующего вида

$$\theta_1 = 0, \quad J_1 - \frac{C_1 J_2}{C_1 + C_2 e^{\lambda \theta_2}} = 0, \quad (19)$$

где  $\lambda = -\varkappa A_3 \sin 2\varphi_0 = 2 \frac{\sqrt{(A_1 - A_3)(A_3 - A_2)}}{\sqrt{A_1 A_2}} > 0$ ,  $C_{1,2} = \text{const}$ ,  $C_1^2 + C_2^2 > 0$ .

Дальнейшее интегрирование (15) сводится к эллиптическим квадратурам

$$J_2^2 = \mu^2 - \left(\frac{c}{2} J_2^2 - h\right)^2, \quad \theta_2 = \arcsin \left(\frac{2h - cJ_2^2}{2\mu}\right), \quad (20)$$

где  $h$  – константа интеграла энергии (14), определяемая начальными значениями переменных.

в) Физический маятник. В предположениях  $h > \mu$ ,  $C_{1,2} \neq 0$  все решения, удовлетворяющие уравнениям (19),(20), являются двоякоасимптотическими, стремящимися при  $t \rightarrow \pm\infty$  к двум различным предельным циклам. В предельных случаях инвариантные соотношения (19) записываются в виде следующих равенств:

$$1) \theta_1 = 0, \quad J_1 = 0; \quad 2) \theta_1 = 0, \quad J_1 = J_2.$$

Маятниковые движения выражаются в эллиптических функциях времени, так как переменные  $J_2, \theta_2$  по-прежнему удовлетворяют уравнениям (20).

Из (5),(11) следует, что значение угла  $\theta_1$  не определено для  $J_1 = 0$  и  $J_1 = J_2$ . Это вырождение не существенно, так как положение и скорость маятника, соответствующего приведенным равенствам, однозначно определяются меньшим числом фазовых переменных. Если  $J_1 = o(\mu)$ , то с помощью интеграла (14) исключим  $J_2$  из первого и третьего уравнений (15). Далее заменой переменных  $y = \text{ctg}(\theta_1/2)$ ,  $\tau = \theta_2$  получим

линейное дифференциальное уравнение  $y' + a_1(\tau)y + a_2(\tau) = 0$ , которое просто интегрируется. Если  $J_2 - J_1 = o(\mu)$ , то аналогичное линейное уравнение получим в результате замены  $y = \text{ctg}(\theta_1/2)$ ,  $\tau = \theta_1 + \theta_2$ . Найденная зависимость  $y(\tau)$  позволяет изучить  $\theta_1(t)$  в сколь угодно малой окрестности маятниковых движений.

**4. Приближенные решения системы (15).** Малые возмущения точных решений, рассмотренных в предыдущем пункте, приводят к появлению семейств асимптотических решений на уровнях энергии  $h$ , близких к  $h_0 = cJ_2^2(0)/2 > \mu$ . Приведем формулы, в первом приближении описывающие асимптотические решения дифференциальных уравнений (15).

г) *Решения, близкие к маятниковым.* Отличные от гессовых асимптотически маятниковые движения твердого тела, удовлетворяющего условиям (2), были обнаружены Г.В. Горром, Ю.П. Вархалевым в работе [10]. В частности, ими были вычислены действительные характеристические показатели  $\pm\lambda$  линеаризованной системы первого приближения, записано общее решение этой системы, с помощью теоремы Ляпунова доказано существование движений, асимптотически стремящихся к вращению маятника вокруг горизонтальной оси, построены сходящиеся степенные ряды, представляющие решения, близкие к маятниковым. Этот класс асимптотических движений твердого тела найден в предположениях  $r_1G_1 + r_2G_2 \neq 0$ ,  $h > \mu$ ,  $M = 0$ . Следует заметить, что ряды Ляпунова, выписанные в терминах определенных интегралов достаточно сложной структуры, непригодны для качественного анализа асимптотических движений даже в малой окрестности предельного цикла. Поведение решений вне этой окрестности остается неизученным. Получим приближенные формулы для малых значений  $\mu$ .

Обозначим  $\theta_2^*(t) = cJ_2^0(t - t_0) + \theta_2^0$  и рассмотрим два периодических решения

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1 : \quad & \theta_1 = 4\varphi_0 + \mu(d_{11} \sin \theta_2^* + d_{12} \cos \theta_2^*), \quad J_1 = o(\mu), \\ & \theta_2 = \theta_2^* + \frac{\mu}{c(J_2^0)^2} \cos \theta_2^*, \quad J_2 = J_2^0 - \frac{\mu}{cJ_2^0} \sin \theta_2^*; \\ \tilde{T}_2 : \quad & \theta_1 = 4\varphi_0 + \mu(d_{21} \sin \theta_2^* + d_{22} \cos \theta_2^*), \quad J_1 = J_2 = J_2^0 - \frac{\mu}{cJ_2^0} \sin(4\varphi_0 + \theta_2^*), \\ & \theta_2 = \theta_2^* + \frac{\mu}{c(J_2^0)^2} (2 \cos(4\varphi_0 + \theta_2^*) - \cos \theta_2^*) - \frac{\mu\kappa}{c} \sin 2\varphi_0 (d_{21} \cos \theta_2^* - d_{22} \sin \theta_2^*), \end{aligned} \quad (21)$$

где коэффициенты  $d_{ij}$  имеют вид

$$\begin{aligned} d_{11} &= \frac{2 \sin 2\varphi_0 (c \cos 2\varphi_0 + \kappa \sin^2 2\varphi_0)}{(J_2^0)^2 (c^2 + \kappa^2 \sin^2 2\varphi_0)}, & d_{12} &= \frac{2 \sin^2 2\varphi_0 (c - \kappa \cos 2\varphi_0)}{(J_2^0)^2 (c^2 + \kappa^2 \sin^2 2\varphi_0)}, \\ d_{21} &= \frac{2 \sin 2\varphi_0 (c \cos 2\varphi_0 - \kappa \sin^2 2\varphi_0)}{(J_2^0)^2 (c^2 + \kappa^2 \sin^2 2\varphi_0)}, & d_{22} &= \frac{2 \sin^2 2\varphi_0 (c + \kappa \cos 2\varphi_0)}{(J_2^0)^2 (c^2 + \kappa^2 \sin^2 2\varphi_0)}. \end{aligned}$$

Решения системы (15), соответствующие асимптотически маятниковым движениям, неограниченно приближаются к предельным циклам  $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2$ , при этом переменная  $\theta_1$  колеблется в интервале длиной  $\Delta\theta_1 = 2\mu\sqrt{d_{11}^2 + d_{12}^2} = 2\mu\sqrt{d_{21}^2 + d_{22}^2}$ . В результате вычислений находим

$$\Delta\theta_1 = \frac{8\mu A_2 A_1}{(J_2^0)^2 (A_1 - A_2)} \frac{\sqrt{(A_1 - A_3)(A_3 - A_2)}}{\sqrt{4A_3 A_2 + 4A_1 A_3 - 3A_1 A_2 - 4A_3^2}}. \quad (22)$$

д) *Возмущенные сепаратрисы.* Положим в окрестности сепаратрисы (18)

$$\theta_1 = 4\varphi_0 + \mu\delta\theta_1, \quad J_1 = J_1^*(t) + \mu\delta J_1, \quad \theta_2 = \theta_2^*(t) + \mu\delta\theta_2, \quad J_2 = J_2^0 + \mu\delta J_2.$$

Линаризованные уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\begin{aligned} \delta\dot{\theta}_1 &= -\varkappa \sin 2\varphi_0 (2J_1^* - J_2^0) \delta\theta_1 + \frac{1}{J_2^0} [\sin(4\varphi_0 + \theta_2^*) - \sin\theta_2^*], \\ \delta\dot{J}_1 &= \varkappa \sin 2\varphi_0 (2J_1^* - J_2^0) \delta J_1 + \varkappa \cos 2\varphi_0 J_1^* (J_1^* - J_2^0) \delta\theta_1 - \\ &\quad - \varkappa \sin 2\varphi_0 J_1^* \delta J_2 - \frac{J_1^*}{J_2^0} \cos(4\varphi_0 + \theta_2^*), \\ \delta\dot{\theta}_2 &= c \delta J_2 + \varkappa \sin 2\varphi_0 J_1^* \delta J_1 + \frac{J_1^*}{(J_2^0)^2} [\sin\theta_2^* - \sin(4\varphi_0 + \theta_2^*)], \\ \delta\dot{J}_2 &= -\cos\theta_2^* + \frac{J_1^*}{J_2^0} [\cos\theta_2^* - \cos(4\varphi_0 + \theta_2^*)]. \end{aligned} \quad (23)$$

Не все четыре уравнения (23) являются независимыми, они допускают первый интеграл, связывающий переменные  $\delta\theta_1, \delta J_2$ :

$$\varkappa \sin 2\varphi_0 J_1^* (J_2^0 - J_1^*) \delta\theta_1 + c J_2^0 \delta J_2 + \sin\theta_2^* + \frac{J_1^*}{J_2^0} [\sin(4\varphi_0 + \theta_2^*) - \sin\theta_2^*] = \text{const.}$$

Дифференциальные уравнения (23) интегрируются в квадратурах. В частности, из первого уравнения находим отклонение величины  $\theta_1$ , вычисляемой вдоль возмущенной сепаратрисы, от исходного (невозмущенного) значения  $\theta_1^* = 4\varphi_0$ :

$$\begin{aligned} \mu\delta\theta_1 &= \frac{\mu}{J_1^* (J_1^* - J_2^0)} \int_{t_0}^t J_1^* (J_1^* - J_2^0) [\sin(4\varphi_0 + \theta_2^*) - \sin\theta_2^*] dt = \\ &= 2\mu \sin 2\varphi_0 \frac{(e^{u(t-t_0)-v} + 1)^2}{J_2^0 e^{u(t-t_0)-v}} \int_0^{t-t_0} \frac{e^{u\tau-v}}{(e^{u\tau-v} + 1)^2} \cos(\omega_2\tau + 2\varphi_0 + \theta_2^0) d\tau. \end{aligned} \quad (24)$$

**5. Интеграл Мельникова.** В соответствии с обозначениями [4, 5] запишем функцию Гамильтона (14) в виде суммы  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mu\mathcal{H}_1$ . Пересечения родственных ветвей расщепленной сепаратрисы системы (15) исследуем с помощью интеграла Мельникова [8]

$$\begin{aligned} I_M(\tilde{\theta}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \mathcal{H}_0, \frac{\mathcal{H}_1}{\omega_2} \right\} (J_1^*, \theta_1^*, J_2^*, \theta_2^* + \tilde{\theta}) dt, \\ \left\{ \mathcal{H}_0, \frac{\mathcal{H}_1}{\omega_2} \right\} (J_1^*, \theta_1^*, J_2^*, \theta_2^* + \tilde{\theta}) &= \frac{1}{\omega_2} \left[ \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \theta_1} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial J_1} - \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial J_1} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \theta_1} \right] \Big|_{J_1^*, \theta_1^*, J_2^*, \theta_2^* + \tilde{\theta}}, \end{aligned}$$

вычисленного вдоль невозмущенной орбиты (18), соединяющей устойчивый и неустойчивый предельные циклы. Функции  $J_1^*(t), \theta_1^*(t), J_2^*(t), \theta_2^*(t)$  соответствуют двоякоасимптотическому решению (18). В результате несложных преобразований получим

$$I_M(\tilde{\theta}) = 2A_3 \varkappa \sin^2 2\varphi_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{u\tau-v}}{(e^{u\tau-v} + 1)^2} \cos(\omega_2\tau + 2\varphi_0 + \tilde{\theta}) d\tau.$$

Интеграл  $I_M(\tilde{\theta})$  является расходящимся несобственным интегралом, потому нас будет интересовать только оценка его среднего значения (без быстро осциллирующей части). Линейной подстановкой  $\tau = (2\pi x + v)/u$ , с учетом обозначений

$$\nu = \frac{\pi\omega_2}{u} > 0, \quad \delta = 2\varphi_0 + \frac{\omega_2 v}{u},$$

среднее значение  $I_M(\tilde{\theta})$  приводится к несобственному интегралу Лежандра, который просто вычисляется:

$$\widehat{I}_M(\tilde{\theta}) = -\frac{8\pi}{\varkappa J_2^0} \cos(\delta + \tilde{\theta}) \int_0^\infty \frac{\sin(2\nu x)}{e^{2\pi x} + 1} dx = -\frac{2\pi}{\varkappa J_2^0} \left[ \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\operatorname{sh} \nu} \right] \cos(\delta + \tilde{\theta}). \quad (25)$$

Далее находим, что в случае Гесса при любых допустимых значениях параметров твердого тела всегда выполнено строгое неравенство

$$\frac{2\pi}{\varkappa J_2^0} \left[ \frac{1}{\operatorname{sh} \nu} - \frac{1}{\nu} \right] > 0.$$

Таким образом, интеграл  $\widehat{I}_M(\tilde{\theta})$ , рассматриваемый как функция действительного аргумента  $\tilde{\theta}$ , имеет простые нули только в точках  $\tilde{\theta} = \pm k\pi/2 - \delta$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Эти значения определяют два гетероклинических решения гамильтоновой системы (15), асимптотически стремящиеся (при  $t \rightarrow \pm\infty$ ) к двум различным периодическим решениям  $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2$ . Трансверсальное пересечение возмущенных сепаратрис означает, что для твердого тела, удовлетворяющего условиям (2), хаотические движения всегда существуют (по крайней мере, вблизи сепаратрис), если только параметр  $\mu \neq 0$  достаточно мал по сравнению с константой энергии  $h$ . Следуя предложенной Пуанкаре методике, можно доказать, что для произвольных фиксированных значений параметров, удовлетворяющих (2), и начальных условий, удовлетворяющих  $M = 0$ ,  $h \gg \mu > 0$ , уравнения Гамильтона (15) допускают счетное число гетероклинических решений. Эти решения соответствуют двоякоасимптотическим маятниковым движениям твердого тела.

**6. Асимптотически маятниковые движения.** Динамическая система (1) при ограничениях (2) имеет два гиперболических периодических решения  $T_1$  и  $T_2$ , которые представлены двумя замкнутыми непересекающимися кривыми в фазовом пространстве  $\mathbb{R}^6(\mathbf{G}, \boldsymbol{\gamma})$ . Через каждую из этих кривых проходят две асимптотические поверхности  $S_1^\pm, S_2^\pm$ . При  $\mu = 0$  эти поверхности попарно сливаются, т. е.  $S_1^+ = S_2^-, S_2^+ = S_1^-$ . Решение Гесса принадлежит сдвоенной сепаратрисе  $S_1^+ = S_2^-$ , которая не расщепляется под действием возмущения (при  $\mu \neq 0$ ). Для описания асимптотических движений твердого тела в случае  $h > \mu$  важны следующие свойства:

- не существует инвариантных торов, которые могли бы изолировать одну из сепаратрис  $S_1^-, S_2^+, S_1^+ = S_2^-$ ;
- не существует гомоклинических решений, стремящихся при  $t \rightarrow \pm\infty$  к периодическим решениям  $T_1, T_2$ ;
- при заданных параметрах системы (1) на любом уровне энергии  $h > \mu$  существует счетное число гетероклинических решений из  $S_1^- \cap S_2^+$ , предельными циклами которых являются  $T_1, T_2$ ;

- различные типы гетероклинических траекторий из  $S_1^- \cap S_2^+$  характеризуются конечной двоичной последовательностью циклов  $z(\tilde{\theta})$ , где один цикл соответствует движению от  $T_1$  к  $T_2$  вдоль невозмущенной сепаратрисы (18) и обратному движению к  $T_1$  вдоль траекторий решения Гесса;
- любые две траектории на сепаратрисе  $S_1^- (S_2^+)$  разделены гетероклинической орбитой, потому соседние траектории экспоненциально расходятся с течением времени.

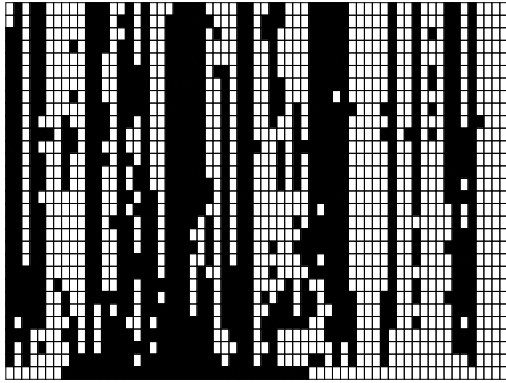


Рис. 3. Допустимые циклы различных траекторий сепаратрисы  $S_1^-$ .

Рис. 3 содержит информацию о допустимых циклах различных траекторий из  $S_1^-$  вдоль невозмущенных сепаратрис (17), (18). Точками  $\tilde{\theta}_k = k/10$ , где  $k = \overline{0, 62}$ , зададим разбиение интервала  $[0, 2\pi)$ , в котором изменяется аргумент  $\tilde{\theta}$  функции Мельникова (25). Вертикальные столбцы составлены из первых членов последовательностей  $z(\tilde{\theta}_k)$ , каждая белая клетка на рис. 3 соответствует циклу вдоль периметра левого прямоугольника на рис. 2, черная – вдоль периметра правого прямоугольника на рис. 2. Вычисления проводились для первых 30 циклов, при этом использованы следующие значения параметров:

$A_1 = 2, A_2 = 1.5, A_3 = 1.8, \mu = 0.001$ . Нижняя строка рис. 3 соответствует первому циклу, верхняя – тридцатому. Белые и черные клетки в нижней строке рис. 3 отвечают различным знакам функции Мельникова (25).

Исследуем качественные свойства движения твердого тела в неподвижном базисе. При нулевой постоянной интеграла площадей ( $M = 0$ ) вектор кинетического момента  $\mathbf{G}$  во все время движения находится в горизонтальной плоскости  $OXY$ . Направление вектора  $\mathbf{G}$  в плоскости  $OXY$  и его модуль  $|\mathbf{G}|$  характеризуют переменные  $\theta_3, J_2$ , следовательно, временная динамика кинетического момента описывается функциями  $\theta_3(t), J_2(t)$ . Известно, что решения Гесса (19),(20) и решения, соответствующие маятниковым движениям, имеют дополнительное ограничение  $\theta_3 = \text{const}$ , т. е. сохраняется направление  $\mathbf{G}$  в неподвижном базисе и изменяется лишь модуль  $|\mathbf{G}|$ . Для возмущенной сепаратрисы, описываемой уравнениями (23), находим приращение угла  $\theta_3$  при неограниченном возрастании времени:

$$\Delta\theta_3 \approx -\frac{2\mu\pi}{\varkappa(J_2^0)^2} \approx \frac{\mu\pi A_1 A_2}{A_3(A_1 - A_2)h}. \quad (26)$$

Заметим, что эта величина может быть достаточно большой, если эллипсоид инерции мало отличается от сферы.

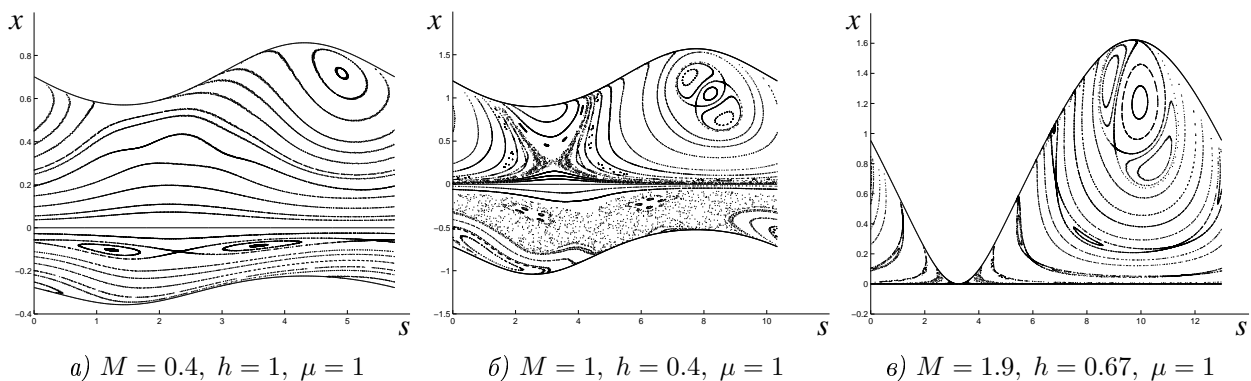
Таким образом, при малых значениях  $\mu$  траектории возмущенного движения могут многократно проходить в окрестности сепаратрисы (18), при этом каждый раз угол  $\theta_3$  получает приращение  $\Delta\theta_3$  в соответствии с приведенной формулой (26), на остальных участках движения  $\Delta\theta_3 = o(\mu)$ . Отличительной особенностью гетероклинических решений является существование конечных пределов

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \theta_3(t) = \theta_3^-, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \theta_3(t) = \theta_3^+.$$

В общем случае траектории остаются гетероклиническими в неподвижном базисе, но можно подобрать параметры динамической системы так, чтобы разность  $(\theta_3^+ - \theta_3^-) \neq 0$  была произвольной величиной, например, соизмеримой или кратной  $2\pi$ . Дальнейшее вращение тела происходит таким образом, что вблизи каждой сепаратрисы (17),(18) средняя ось инерции вычерчивает на единичной сфере кривую, близкую к локсодроме. При этом пространственная ориентация твердого тела меняется на противоположную.

**7. Метод сечений Пуанкаре.** Эффективным инструментом компьютерного изучения гамильтоновых систем с двумя степенями свободы является разработанный А. Пуанкаре метод фазовых сечений. Для динамической системы (1) выберем секущую поверхность, трансверсальную к фазовому потоку на инвариантном подпространстве, заданном соотношением (3). В качестве такой поверхности в пространстве  $\mathbb{R}^3(\mathbf{G})$  можно взять прямой круговой цилиндр, ось которого коллинеарна вектору  $\mathbf{r}$ , а направляющая окружность радиуса  $\rho$  расположена в плоскости (3). Величина  $\rho$  зависит от параметров тела, ее можно подобрать таким образом, чтобы все траектории решения Гесса трансверсально пересекали цилиндр. На рис. 4 приведены результаты компьютерного моделирования, на развертке поверхности точками отмечены последовательные пересечения цилиндра фазовыми траекториями. При этом использованы обозначения:  $x = \mathbf{G} \cdot \mathbf{r}$  – расстояние от точки до плоскости (3),  $s$  – значение дуговой координаты на окружности радиуса  $\rho$ . Решению Гесса соответствует уровень  $x = 0$ , траектории системы (1) в этом случае изучены в работах [2, 3]. Фазовые портреты на рис. 4 разделены на два слоя сдвоенной сепаратрисой Гесса – точки из одного слоя не проникают в другой. При  $h < \mu$  соотношение Гесса (3) задает инвариантную кривую, принадлежащую слоению, которое на рис. 4, *а, б, д* почти не отличается от регулярного. При  $h > \mu$  инвариантная кривая расположена внутри стохастического слоя (рис. 4, *г, е, ж, з*). Если  $h \rightarrow \infty$  (либо  $\mu \rightarrow 0$ ), то все сводится к случаю Эйлера, решение Гесса стремится к сепаратрисе неустойчивого перманентного вращения тела вокруг средней оси инерции (рис. 4, *и*). Случаи, когда инвариантное многообразие Гесса вырождается в окружность, на которой существуют одна либо две неподвижные гиперболические точки, показаны на рис. 4, *в, з*.

На рис. 4, *д–з* основная часть сечения заполнена точками, которые соответствуют хаотическим движениям. Полученные результаты согласуются с результатами моделирования динамики в переменных Андуайе–Депри [7]. В динамической системе (1) хаотические движения возникают при малых  $\mu$  в узких щелях между ветвями пересекающихся сепаратрис  $S_1^-, S_2^+$ .



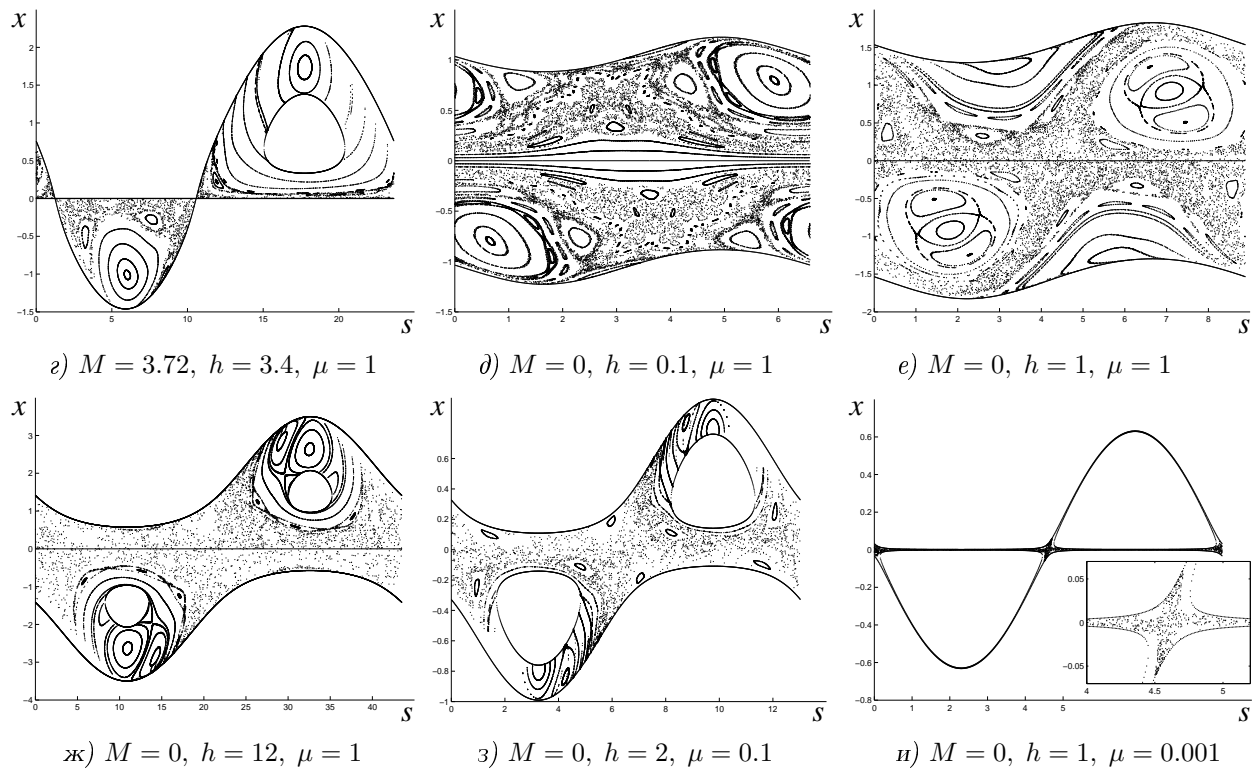


Рис. 4. Фазовые портреты системы (1) при условиях Гесса.

1. *Hess W.* Über die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue particuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt// *Math. Ann.* – 1890. – **37**, Н. 2. – С. 153-181.
2. *Ковалев А.М.* Подвижный годограф угловой скорости в решении Гесса задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку// *Прикл. математика и механика.* – 1968. – **32**, вып. 6. – С. 1111–1118.
3. *Ковалев А.М., Кириченко В.В.* Годограф вектора кинетического момента в решении Гесса// *Механика твердого тела.* – 2004. – Вып. 34. – С. 9–20.
4. *Козлов В.В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980. – 232 с.
5. *Зиглин С.Л.* Расщепление сепаратрис, ветвление решений и несуществование интеграла в динамике твердого тела// *Тр. Моск. матем. о-ва.* – 1980. – **41**. – С. 287–303.
6. *Довбыш С.А.* О сепаратрисе неустойчивого положения равновесия волчка Гесса–Апшелярота// *Прикл. математика и механика.* – 1992. – **56**, вып. 4. – С. 632–642.
7. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. – М.; Ижевск: Изд-во ИКИ, 2005. – 576 с.
8. *Мельников В.К.* Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях// *Тр. Моск. матем. о-ва.* – 1963. – **12**. – С. 3–52.
9. *Galvani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M.* Chaotic motions and transition to stochasticity in the classical problem of the heavy rigid body with a fixed point// *Nuovo Cimento.* – 1981. – **61** В, № 1. – Р. 1–20.
10. *Вархалец Ю.П., Горр Г.В.* Асимптотически маятниковые движения гироскопа Гесса–Апшелярота// *Прикл. математика и механика.* – 1984. – **48**, вып. 3. – С. 490–493.