

УДК 531.44

©2004. М.М. Жечев, М.В. Скатонок

## ЯВЛЕНИЕ "WEDGING" В СИСТЕМАХ С СУХИМ ТРЕНИЕМ

В данной работе рассмотрены вопросы геометрической интерпретации явления "wedging" (заклинивания) в системах с кулоновым (сухим) трением. Для систем с тремя точками контакта получены геометрически наглядное достаточное условие отсутствия "wedging", а также необходимое условие возникновения "wedging", более жесткое, чем приведенные в [1].

**Введение.** Понятие "wedging" было определено для систем с сухим трением S. Simunovic [2] в 1975 г. при исследовании процесса автоматической сборки – вставки втулки в отверстие ("peg-in-hole") при помощи манипулятора (рис. 1). S. Simunovic



Рис. 1. Вставка втулки в отверстие при помощи манипулятора.

понимал под "wedging" такое статическое явление, при котором любая возможная активная сила уравнивается контактными (реактивными) силами [2]. Суть "wedging" заключается в том, что в некоторых конфигурациях систему заклинивает и вывести её из этого состояния без переориентации невозможно. Значения возникающих при этом сил реакций могут быть очень большими, что может привести к появлению необратимых деформаций в телах и даже к разрушению системы [3]. Чтобы избежать "wedging", необходимо знать условия, при которых он может возникнуть, либо условия, при выполнении которых его возникновение невозможно.

Необходимые условия возникновения "wedging" рассмотрены в ряде работ (см., например, [3, 4]). Однако в этих работах речь, как правило, идет только о двухточечном контакте. В статье [1] получены геометрически наглядные необходимые условия возникновения "wedging" для систем с двух- и трехточечными контактами. Изложим кратко суть полученных в [1] результатов. Прежде всего, отметим, что при любом числе контактов "wedging" возможен только в том случае, если система допускает равновесие реактивных сил  $R_1, R_2, \dots$ , каждая из которых принадлежит своему конусу трения  $K_1, K_2, \dots$  соответственно [1]. Как известно из статики [5], произвольная система сил является уравновешенной, если ее главный вектор и главный момент (относительно некоторой точки) равны нулю. Поэтому в [1] отдельно рассмотрены случаи равенства нулю главного век-

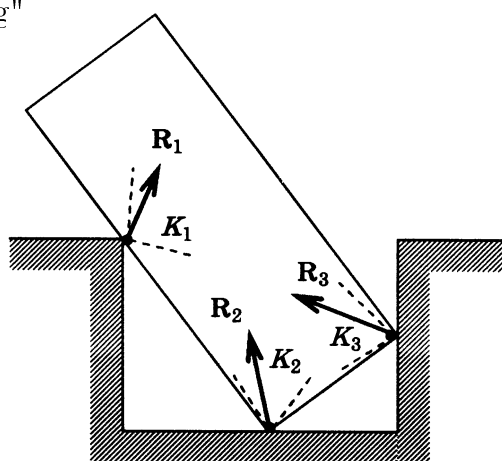


Рис. 2. Система с тремя точками контакта.

тора и главного момента системы реактивных сил. Для систем с тремя точками контакта (рис. 2) получены два необходимых условия возникновения "wedging", которым должны удовлетворять конусы трения.

Если обозначить (рис. 2) через  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_2$  и  $\mathbf{R}_3$  реактивные силы в точках контакта, каждая из которых представляет собой сумму нормальной реакции и соответствующей силы сухого трения, то два полученных в [1] необходимых условия возникновения "wedging" принимают следующий вид.

1. Плоский угол  $\varphi$  при вершине конуса, включающего в себя целиком все конусы трения  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  (образующие этого конуса на рис. 3, а обозначены пунктиром), должен быть не меньше  $\pi$ . Необходимость данного условия объясняется тем, что в этом случае существует, по крайней мере, одна система сил  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_2$  и  $\mathbf{R}_3$ , каждая из которых принадлежит соответствующему конусу трения, такая, что ее главный вектор равен нулю.

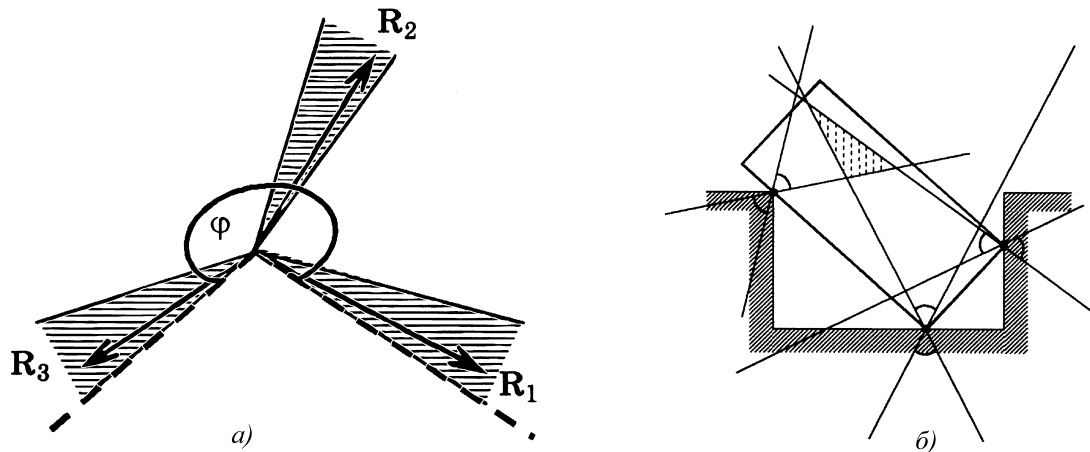


Рис. 3. Необходимые условия возникновения "wedging": а) – первое; б) – второе.

2. Для формулировки второго необходимого условия нужно ввести дополнительные обозначения:  $K_i^*$  ( $i = \overline{1,3}$ ) – конус, образуемый векторами  $-\mathbf{R}_i$ , где  $\mathbf{R}_i \in K_i$ , то есть  $K_i^* = \{-\mathbf{R}_i : \mathbf{R}_i \in K_i\}$ , и  $\overline{K}_i$  – множество точек, ограниченных образующими конусов  $K_i$  и  $K_i^*$ . Для возникновения "wedging" необходимо, чтобы указанные множества  $\overline{K}_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) имели непустое пересечение (например, заштрихованная область на рис. 3, б). При выполнении этого условия существует, по крайней мере, одна такая система сил  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$ , что ее главный момент равен нулю.

Чтобы "wedging" был возможен, первое и второе необходимые условия должны выполняться одновременно.

В данной работе для системы с тремя точками контакта получены геометрически наглядное достаточное условие отсутствия "wedging", а также необходимое условие возникновения "wedging", более жесткое, чем приведенные ранее в работе [1].

**1. Достаточное условие отсутствия "wedging".** Определим условия, при которых "wedging" в системе с тремя точками контакта отсутствует. Чтобы "wedging" был невозможен, достаточно, чтобы не выполнялось хотя бы одно из необходимых условий его возникновения. Поэтому найдем условия, при которых главный вектор и главный момент системы реактивных сил не могут одновременно равняться нулю. Знание этих условий позволит подбирать параметры механических систем таким образом, чтобы

"wedging" при этом не возникал.

Заметим, что первое необходимое условие легко переформулировать как условие отсутствия "wedging". А именно: чтобы в системе был невозможен "wedging", необходимо, чтобы плоский угол  $\varphi$  при вершине конуса, образующие которого на рис. 3,  $a$  обозначены пунктиром, был меньше  $\pi$ .

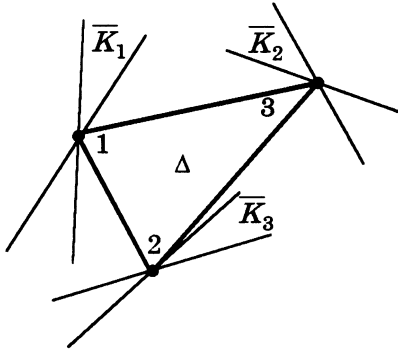


Рис. 4. Пример выполнения условий теоремы 1.

При выполнении этого условия главный вектор реактивных сил не может равняться нулю. Поэтому требуется только установить, при каком условии главный момент реактивных сил не может равняться нулю. Построим треугольник, вершинами которого являются точки контакта. Обозначим множество точек, принадлежащих этому треугольнику и его границам, через  $\Delta$  (рис. 4).

Как отмечено выше, второе необходимое условие возникновения "wedging" состоит в том, чтобы пересечение множеств  $\bar{K}_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) было непустым [1], то есть  $\bigcap_{i=1}^3 \bar{K}_i \neq \emptyset$ .

**ТЕОРЕМА 1.** Для отсутствия "wedging" достаточно, чтобы ни одно из множеств  $\bar{K}_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) не пересекалось с множеством  $\Delta$  нигде, кроме соответствующей точки контакта.

*Доказательство.* Предположим, что условие теоремы выполняется (см., например, рис. 4). Тогда для доказательства теоремы достаточно показать, что в таком случае пересечение всех множеств  $\bar{K}_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) пусто, то есть  $\bigcap_{i=1}^3 \bar{K}_i = \emptyset$ .

При сделанном предположении каждое из множеств  $\bar{K}_i$  принадлежит соответствующему множеству  $\tilde{K}_i$  (см. рис. 5, заштрихованные участки), а прямые, ограничивающие множество  $\Delta$ , не принадлежат множествам  $\tilde{K}_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ). Если пересечение всех

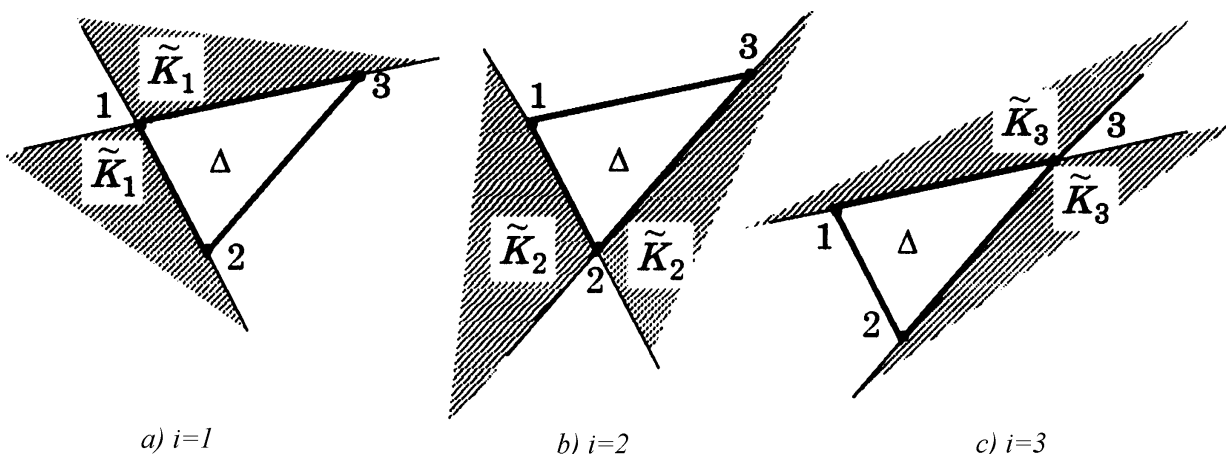


Рис. 5. Множества  $\tilde{K}_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ).

$\tilde{K}_i$  пусто, то пересечение всех  $\bar{K}_i$  также пусто. Поэтому для доказательства теоремы

достаточно показать, что  $\bigcap_{i=1}^3 \tilde{K}_i = \emptyset$ .

Введем в рассмотрение множества  $\Omega_{12}, \Omega_{23}, \Omega_{13}$  (рис. 6) и множества  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  (заштрихованные участки на этом рисунке) и представим попарные пересечения множеств  $\tilde{K}_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) в виде

$$\begin{aligned}\tilde{K}_1 \cap \tilde{K}_2 &= \Omega_{12} \cup \Gamma_3, \\ \tilde{K}_1 \cap \tilde{K}_3 &= \Omega_{13} \cup \Gamma_2, \\ \tilde{K}_2 \cap \tilde{K}_3 &= \Omega_{23} \cup \Gamma_1.\end{aligned}$$

Поскольку  $\tilde{K}_i \equiv \tilde{K}_i \cap \tilde{K}_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ), то

$$\bigcap_{i=1}^3 \tilde{K}_i = \tilde{K}_1 \cap \tilde{K}_2 \cap \tilde{K}_3 = \tilde{K}_1 \cap \tilde{K}_1 \cap \tilde{K}_2 \cap \tilde{K}_2 \cap \tilde{K}_3 \cap \tilde{K}_3.$$

В силу коммутативности и ассоциативности операции пересечения  $\cap$  имеем

$$\begin{aligned}\tilde{K}_1 \cap \tilde{K}_2 \cap \tilde{K}_3 &= (\tilde{K}_1 \cap \tilde{K}_2) \cap (\tilde{K}_1 \cap \tilde{K}_3) \cap (\tilde{K}_2 \cap \tilde{K}_3) = \\ &= (\Omega_{12} \cup \Gamma_3) \cap (\Omega_{13} \cup \Gamma_2) \cap (\Omega_{23} \cup \Gamma_1).\end{aligned}$$

Так как при  $i \neq j$ , очевидно,  $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ , то в силу дистрибутивности операций пересечения  $\cap$  и объединения  $\cup$  последнее выражение совпадает со следующим:

$$\begin{aligned}&\tilde{K}_1 \cap \tilde{K}_2 \cap \tilde{K}_3 = \\ &= (\Omega_{12} \cap \Omega_{23} \cap \Omega_{13}) \cup (\Gamma_3 \cap \Omega_{23} \cap \Omega_{13}) \cup (\Gamma_1 \cap \Omega_{12} \cap \Omega_{13}) \cup (\Gamma_2 \cap \Omega_{12} \cap \Omega_{23}).\end{aligned}$$

Среди этих четырех пересечений первое, очевидно, пусто, а каждое из оставшихся трех пересечений совпадает соответственно с третьей, первой и второй точками контакта. Поскольку  $\tilde{K}_i$  не содержит других точек контакта, кроме  $i$ -ой, то пересечение  $\bigcap_{i=1}^3 \tilde{K}_i$  не содержит ни одной точки контакта. С другой стороны,  $\bigcap_{i=1}^3 \bar{K}_i \subset \bigcap_{i=1}^3 \tilde{K}_i$ , то есть пересечение множеств  $\bar{K}_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) принадлежит множеству, включающему только точки контакта. Следовательно, пересечение  $\bigcap_{i=1}^3 \bar{K}_i$  пусто, что и требовалось доказать.  $\square$

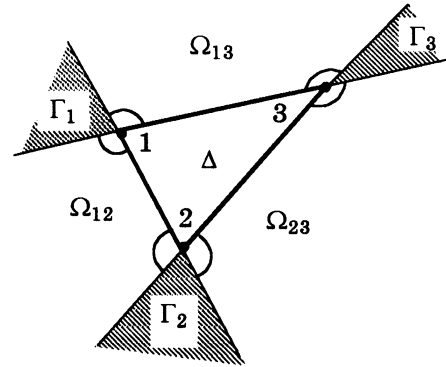


Рис. 6. Множества  $\Omega_{12}, \Omega_{23}, \Omega_{13}, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ .

**2. Согласование необходимых условий возникновения "wedging".** Получим более жесткое необходимое условие возникновения "wedging", чем те, которые приведены в работе [1]. Это позволит сузить круг случаев, в которых возможен "wedging", а также более точно устанавливать возможность его возникновения. Новое, более жесткое необходимое условие возникновения "wedging" можно получить, согласовав между собой первое и второе необходимые условия из [1].

Предположим, что выполняются оба этих необходимых условия (рис. 7, а, б). Обозначим через  $\bar{K}'_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) множества, которым принадлежат линии действия сил из

конусов трения, проходящие через пересечение множеств  $\overline{K}_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) (на рис. 7, б это пересечение заштриховано). Множества  $\overline{K}_i$  и  $\overline{K}'_i$  могут совпадать, однако в общем случае это не так. Например, на рис. 7  $\overline{K}'_1$  не совпадает с  $\overline{K}_1$  (соответствующий конус трения на рис. 7, б помечен двойной дугой), в то время как  $\overline{K}'_2$  совпадает с  $\overline{K}_2$ , так же как и  $\overline{K}'_3$  совпадает с  $\overline{K}_3$ .

Как отмечено выше, "wedging" возможен, если первое и второе необходимые условия выполняются одновременно. Поэтому имеет место следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 2.** Чтобы в системе был возможен "wedging", угол при вершине конуса, включающего конусы  $K'_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) (рис. 7, в), должен быть не меньше  $\pi$ .

Из рис. 7, в видно, что при выполнении второго необходимого условия возникновения "wedging" условие для конусов трения  $K_i$  из [1] (первое необходимое условие) выполняется, а условие для конусов  $K'_i$  из теоремы 2 при этом не выполняется. Это иллюстрирует вывод о том, что полученное необходимое условие является более жестким, чем необходимые условия, приведенные в [1].

**Заключение.** Таким образом, для механических систем с кулоновым трением, имеющих три точки контакта, получены достаточное условие отсутствия "wedging" и необходимое условие возникновения "wedging", которые являются геометрически наглядными и достаточно удобными при исследовании реальных механических систем.

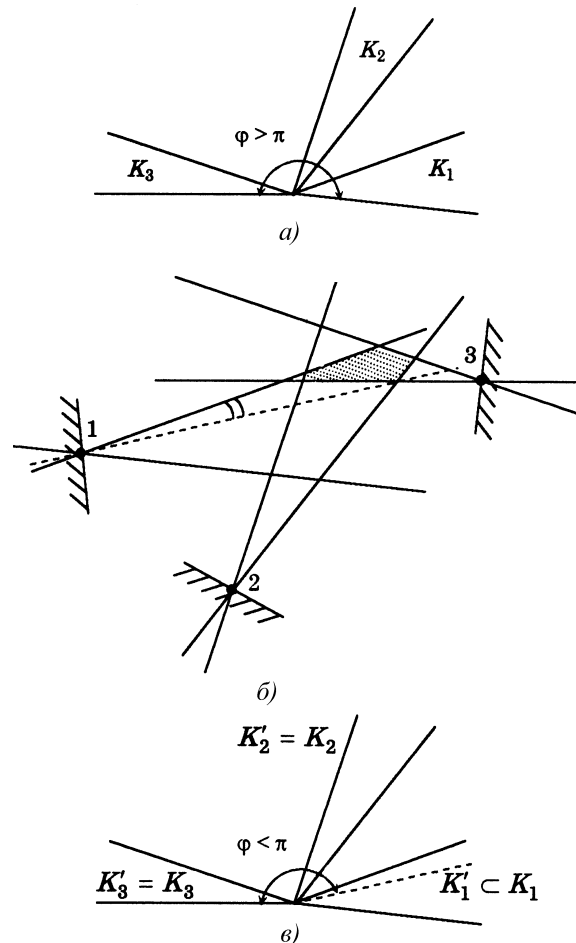


Рис. 7. Необходимые условия возникновения "wedging": а) и б) – необходимые условия из [1], в) – новое условие.

1. Жечев М.М., Скатенок М.В. Необходимые условия "wedging" в системах с кулоновым трением // Техн. механика. – 2004. – № 1. – С. 31–39.
2. Simunovic S. Force information in assembly processes // 5th International Symposium of Industrial Robots: Proc. – 1975. – P. 415–431.
3. Whitney D.E. Quasi-static assembly of compliantly supported rigid parts // J. of Dynamic Systems, Measurement and Control. – 1982. – № 104. – P. 65–77.
4. Dupont P.E. and Yamajako S.P. Jamming and Wedging in Constrained Rigid-body Dynamics // IEEE International conference on Robotics and Automation: Proc. – 1994. – P. 2349–2354.
5. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Наука, 1968. – 480 с.