

УДК 531.38, 531.08, 517.977.1

©2004. А.Л. Зуев

СТАБИЛИЗАЦИЯ ГИБКОГО МНОГОЗВЕННИКА С ПАССИВНЫМИ ШАРНИРАМИ

Исследуется динамика манипулятора с произвольным числом гибких звеньев на основе модели балки Эйлера-Бернулли. Первое звено системы совершает вращения вокруг неподвижной точки под действием управляющего момента. Соседние звенья связаны шарнирами, которые реализуют упругие восстанавливающие моменты, направленные на совмещение центральных линий звеньев. К последнему звену системы приложена нагрузка. Получена математическая модель такого манипулятора в виде граничной задачи с частными производными и проведено исследование ее собственных функций. Для рассмотренной граничной задачи построена приближенная система по Галеркину. Предложено управление с обратной связью, решающее задачу стабилизации положения равновесия приближенной системы. Исследована наблюдаемость в линейной постановке и проведено численное моделирование управляемого движения нелинейной конечномерной системы.

1. Введение. Задачи моделирования и стабилизации движения гибких манипуляторов рассматривались авторами работ [1]-[6] в рамках теории систем с распределенными параметрами. Однако для задач планирования движения чаще используются алгоритмы управления на основе приближенных моделей с конечным числом степеней свободы [8, 9], поскольку они допускают более простую техническую реализацию. Один из таких подходов был использован в статье [10] для стабилизации программной траектории поворотной пожарной лестницы IVECO Magirus на основе модели системы связанных твердых тел. Эта модель обеспечивает приемлемое гашение низкочастотных колебаний, но в то же время имеются нежелательные периодические смещения концевой части лестницы (груза) на более высоких частотах. Для гашения таких высокочастотных колебаний необходимо использование более точных математических моделей, которые учитывали бы моды более высокого порядка.

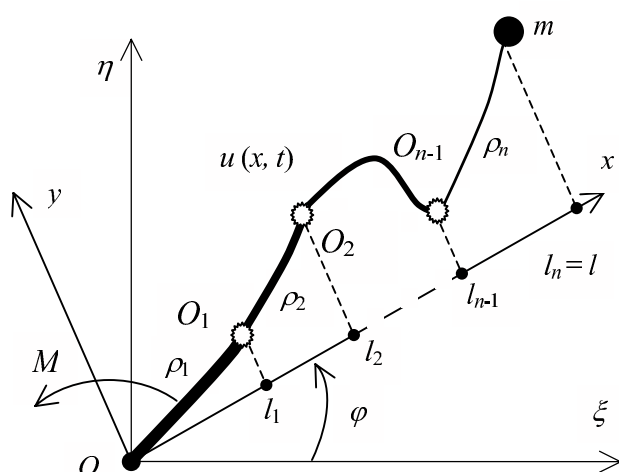


Рис. 1. Многозвенный гибкий манипулятор.

соединенных между собой упругими шарнирами в точках O_1, \dots, O_{n-1} . В реальной кон-

Целью данной статьи является синтез стабилизирующего управления для уточненной модели гибкого манипулятора, прообразом которого служит поворотная лестница.

Для уравнений движения, полученных с помощью принципа Гамильтона - Остроградского, будет построена приближенная система по Галеркину, которая позволит учитывать произвольное число мод упругих колебаний в законе управления.

2. Уравнения движения. На рис. 1 изображен гибкий манипулятор, совершающий движение в плоскости под действием управляющего момента M . Рассматриваемая система состоит из n гибких звеньев,

струкции звенья могут телескопически раздвигаться. Однако при быстрых маневрах телескопический сдвиг не используется, а нежесткую заделку соседних звеньев можно приближенно моделировать упругими цилиндрическими шарнирами при плоском движении. Вращение системы происходит вокруг неподвижной точки O , к подвижному концу манипулятора прикреплен груз массы m . Сделаем предположение, что длина манипулятора l значительно превосходит диаметр сечения каждого звена, так что применима модель балки Эйлера-Бернулли.

Будем обозначать через $\varphi(t)$ угол поворота подвижной системы координат Oxy относительно неподвижной $O\xi\eta$. Обозначим далее через $u(x, t)$ отклонение центральной линии балки от оси Ox в точке $x \in [0, l]$.

Для заданного разбиения $0 = l_0 < l_1 < \dots < l_n = l$ отрезка $[0, l]$ смещение $u(\cdot, t)$ принадлежит классу $C^0[0, l] \cap C^4((0, l) \setminus \{l_1, \dots, l_{n-1}\})$ для всех $t \geq 0$. Функция $u(x, t)$ удовлетворяет геометрическим граничным условиям в точке O : $u|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 0$.

Пренебрегая эффектами сдвиговой деформации и вращательной динамикой сечений звеньев, запишем кинетическую энергию рассматриваемой системы:

$$2T = \int_0^l \left((u\dot{\varphi})^2 + \left(x\dot{\varphi} + \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right) \rho(x) dx + \\ + \left\{ m \left((u\dot{\varphi})^2 + \left(l\dot{\varphi} + \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right) + J \left(\dot{\varphi} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right) \right)^2 \right\}_{x=l},$$

где $\rho(x)$ – масса на единичную длину звена в точке с абсциссой x , J – момент инерции нагрузки относительно ее точки закрепления.

Потенциальная энергия U рассматриваемой механической системы имеет вид

$$2U = \int_0^l \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 c^2(x) \rho(x) dx + \sum_{j=1}^{n-1} \kappa_j^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l_j+0} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l_j-0} \right)^2,$$

где $c^2(x) = E(x)I(x)/\rho(x)$, $E(x)$ – модуль Юнга, $I(x)$ – момент инерции сечения звена, κ_j^2 – коэффициент жесткости торсионной пружины в точке O_j . В дальнейшем будем предполагать $\rho(x)$ и $c(x)$ кусочно-постоянными функциями, то есть $\rho(x) = \rho_j$, $c(x) = c_j$ при $x \in [l_{j-1}, l_j]$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Пусть $\varphi(t)$, $u(x, t)$ определяют движение системы на заданном отрезке времени $t \in [t_1, t_2]$ под действием управляющего момента $M(t)$. Используя принцип Гамильтона-Остроградского, получаем

$$\delta \left(\int_{t_1}^{t_2} L dt \right) + \int_{t_1}^{t_2} M(t) \delta \varphi(t) dt = 0 \quad (1)$$

для всех вариаций $\delta \varphi(t)$, $\delta u(x, t)$, удовлетворяющих условиям

$$\delta \varphi \in C^2[t_1, t_2], \quad \delta \varphi(t_1) = \delta \varphi(t_2) = 0,$$

$$\delta u \in C^2(((0, l) \setminus \{l_1, \dots, l_{n-1}\}) \times [t_1, t_2]), \quad \delta u(x, t_1) = \delta u(x, t_2) = 0, \quad \forall x \in [0, l],$$

$$\delta u|_{x=0} = \frac{\partial \delta u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \delta u(\cdot, t) \in C^0[0, l], \quad \forall t \in [t_1, t_2], \quad (2)$$

где $L = T - U$ – лагранжиан системы.

Вариация интеграла $\int_{t_1}^{t_2} L dt$ в (1) вычисляется с помощью интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} -\delta \left(\int_{t_1}^{t_2} L dt \right) - \int_{t_1}^{t_2} M \delta \varphi dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt} \left(m(u^2 + l^2) \dot{\varphi} + ml \frac{\partial u}{\partial t} + J \dot{\varphi} + J \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right) \Big|_{x=l} + \right. \\ &+ \left. \frac{d}{dt} \int_0^l \left((u^2 + x^2) \dot{\varphi} + x \frac{\partial u}{\partial t} \right) \rho dx - M \right] \delta \varphi dt + \int_{t_1}^{t_2} \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, u, \delta u, \ddot{\varphi}, \dot{\varphi} \right) dt = 0, \quad (3) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mu &= \int_0^l \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + x \ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2 u \right) \delta u \rho dx + m \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{c^2 \rho}{m} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + l \ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2 u \right) \delta u \right]_{x=l} + \\ &+ J \left[\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} + \frac{c^2 \rho}{J} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dot{\varphi} \right) \frac{\partial \delta u}{\partial x} \right]_{x=l} + \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \left[\left(c^2 \rho \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{x=l_j+0} - \left(c^2 \rho \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{x=l_j-0} \right] \delta u|_{x=l_j} + \right. \\ &+ \left[\left(\frac{c^2 \rho}{\varkappa_j^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=l_j-0} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l_j+0} \right] \varkappa_j^2 \frac{\partial \delta u}{\partial x} \Big|_{x=l_j-0} + \\ &+ \left. \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{c^2 \rho}{\varkappa_j^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{x=l_j+0} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l_j-0} \right] \varkappa_j^2 \frac{\partial \delta u}{\partial x} \Big|_{x=l_j+0} \right\}. \end{aligned}$$

Для упрощения уравнений движения (3), введем новое управление v посредством преобразования с обратной связью:

$$\begin{aligned} v &= \left(m (u|_{x=l})^2 + \int_0^l (2x^2 + u^2) \rho dx \right)^{-1} \times \\ &\times \left(M + \left(c^2 \rho \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{x=0} - m \dot{\varphi} \left(2u \frac{\partial u}{\partial t} + l \dot{\varphi} u \right)_{x=l} + \dot{\varphi} \int_0^l \left(\dot{\varphi} x - 2 \frac{\partial u}{\partial t} \right) u \rho dx \right). \quad (4) \end{aligned}$$

Поскольку вариационная форма (3) должна обнуляться при всех $(\delta \varphi, \delta u)$, удовлетворяющих (2), то получим следующую граничную задачу:

$$\ddot{\varphi} = v, \quad v \in \mathbb{R},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \dot{\varphi}^2 u - xv, \quad x \in (0, l) \setminus \{l_1, \dots, l_{n-1}\}, \quad (5)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dot{\varphi}^2 u + lv - \frac{c_n^2 \rho_n}{m} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \Big|_{x=l} = 0, \quad \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} + v + \frac{c_n^2 \rho_n}{J} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=l} = 0,$$

$$u|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l_j-0} = u|_{x=l_j+0}, \quad j = \overline{1, n-1},$$

$$c_j^2 \rho_j \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \Big|_{x=l_j-0} = c_{j+1}^2 \rho_{j+1} \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \Big|_{x=l_j+0}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l_j+0} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c_j^2 \rho_j}{\varkappa_j^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=l_j-0}, \quad k = 2, 3.$$

Для случая модели манипулятора без нагрузки, аналогичная система уравнений динамики последовательно связанных балок рассматривалась в работе [2].

Нашей целью является построение управления с обратной связью $v = \gamma \left(\varphi, \dot{\varphi}, u, \frac{\partial u}{\partial t} \right)$, которое обеспечивало бы асимптотическую устойчивость положения равновесия $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = 0$, $u = \frac{\partial u}{\partial t} = 0$. Эта задача будет решена для конечномерной аппроксимации граничной задачи (5).

3. Собственные функции однородной задачи. Для получения приближенных уравнений движения, проведем разделение переменных, то есть подставим функции

$$u(x, t) = \psi(x)q(t), \quad \varphi(t) = \text{const}, \quad v(t) = 0 \quad (6)$$

в граничную задачу (5). В результате получим

$$\begin{aligned} q(t) &= A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \\ \psi(x) &= C_{j1} \sin(\eta_j x) + C_{j2} \cos(\eta_j x) + C_{j3} \sinh(\eta_j x) + C_{j4} \cosh(\eta_j x), \quad x \in [l_{j-1}, l_j], \\ \eta_j^2 c_j &= \omega, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (7)$$

где константы C_{ji} суть решения следующей системы линейных однородных уравнений:

$$M(\omega, P) (C_{11}, \dots, C_{14}, \dots, C_{n1}, \dots, C_{n4})^T = 0. \quad (8)$$

Здесь $M(\omega, P)$ – матрица размера $4n \times 4n$ с коэффициентами, зависящими от параметров ω и $P = (m, J, n, l_j, \rho_j, c_j, \varkappa_j)$.

Для фиксированного P система (8) допускает нетривиальное решение только в том случае, если ω удовлетворяет характеристическому уравнению $\det M(\omega, P) = 0$. Выражение для $\det M(\omega, P)$ получено с помощью программы Maple. Детали процедуры вычислений не приводятся в силу громоздкости. Будем называть функцию $\psi(x)$ *формой*, соответствующей ω , если ее коэффициенты $(C_{ji}) \neq 0$ удовлетворяют (8).

ЛЕММА 1. Пусть ψ_1 и ψ_2 – формы, соответствующие значениям $\omega_1 \neq \omega_2$. Тогда ψ_1 и ψ_2 ортогональны по отношению к следующей билинейной форме

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle_X = \int_0^l \psi_1 \psi_2 \rho dx + m \psi_1(l) \psi_2(l) + J \psi_1'(l) \psi_2'(l).$$

Доказательство. Справедливость леммы проверяется интегрированием по частям выражения $\int_0^l \psi_1 \psi_2 \rho dx$ с учетом граничных условий в точках $x = l_j$. \square

Чтобы проиллюстрировать частные решения вида (6) граничной задачи (5), найдем несколько решений ω_k характеристического уравнения при следующем значении вектора параметров P :

$$n = 2, \quad l_1 = \frac{l_2}{2} = c_1 = c_2 = \rho_1 = \rho_2 = \frac{\varkappa_1^2}{2} = m = J = 1. \quad (9)$$

Имеем: $\omega_1 = 0.3875771806$; $\omega_2 = 1.455554174$; $\omega_3 = 5.629214811$; $\omega_4 = 16.22789077$. Соответствующие формы ψ показаны на рис. 2. Формы нормализованы так, чтобы $\langle \psi_i, \psi_k \rangle_X = \delta_{ik}$ при всех $1 \leq i \leq j \leq 4$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Легко видеть, что производные $\psi'_k(x)$ имеют разрыв в точке $x = l_1$. Таким образом, формы $\psi_k(\cdot)$ не являются элементами пространства Соболева $H^2(0, l)$, в отличие от случая одиночной балки Эйлера-Бернулли с непрерывной плотностью.

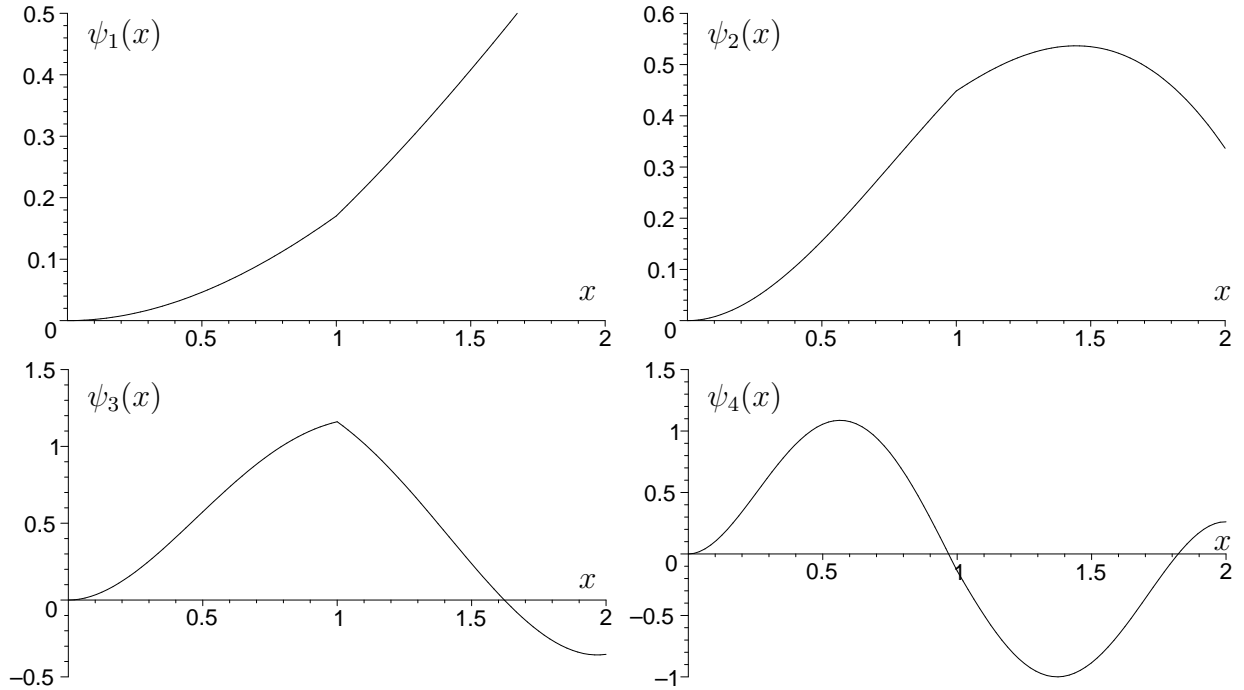


Рис. 2. Формы $\psi_k(x)$ при $k \leq 4$.

4. Приближенная модель. Пусть $(\psi_1(\cdot), \dots, \psi_N(\cdot))$ – формы, соответствующие частотам $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_N$. Для вывода приближения по Галеркину граничной задачи (5), заменим функции $u(\cdot, t)$ и $\delta u(\cdot, t)$ элементами конечномерного пространства

$$\mathcal{S}_N = \text{span}\{\psi_1(\cdot), \dots, \psi_N(\cdot)\}.$$

в вариационной форме (3). Следуя схеме Галеркина (см. напр. [11]), нужно определить $\varphi(t)$ и $u_N(\cdot, t) \in \mathcal{S}_N$, которые удовлетворяют (3) при всех $\delta\varphi(t)$ и $\delta u_N(\cdot, t) \in \mathcal{S}_N$. Пусть $(q_1(t), \dots, q_N(t))$ – координаты $u_N(\cdot, t)$ в базисе $(\psi_1(\cdot), \dots, \psi_N(\cdot))$:

$$u_N(x, t) = \sum_{k=1}^N \psi_k(x) q_k(t). \quad (10)$$

Заметим, что функции $(\psi_1(\cdot), \dots, \psi_N(\cdot))$ образуют базис в \mathcal{S}_N вследствие Леммы 1 и предположения $\omega_i \neq \omega_k$ при $i \neq k$. Подставляя u_N в (3) и используя Лемму 1, получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= v, \quad v \in \mathbb{R}, \\ \ddot{q}_k &= -\omega_k^2 q_k + \left(q_k - \sum_{p=1}^N a_{kp} q_p \right) \dot{\varphi}^2 - b_k v, \\ k &= 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (11)$$

где $(\varphi, \dot{\varphi}, q_1, \dot{q}_1, \dots, q_N, \dot{q}_N)$ – фазовый вектор, v – управление,

$$a_{kp} = \frac{J\psi'_k(l)\psi'_p(l)}{\|\psi_k\|_X^2}, \quad b_k = \frac{\langle x, \psi_k \rangle_X}{\|\psi_k\|_X^2}, \quad \|\psi_k\|_X^2 = \langle \psi_k, \psi_k \rangle_X.$$

Если для системы приближения по Галеркину (11) построен закон управления $v(t)$, то исходный управляющий момент $M(t)$ может быть приближенно вычислен с помощью подстановки $u = u_N(x, t)$ в преобразование (4). Вопрос о точности и сходимости решений приближенной системы (11) не исследуется в данной статье.

5. Стабилизация положения равновесия. Основным результатом работы является

ТЕОРЕМА 1. Пусть (ψ_1, \dots, ψ_N) – формы, соответствующие частотам $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_N$, и пусть, кроме того, $\omega_1 > 0$. Тогда существует гладкое управление с обратной связью вида $v = \gamma(\varphi, \dot{\varphi}, q_1, \dot{q}_1, \dots, q_N, \dot{q}_N)$, которое обеспечивает глобальную асимптотическую устойчивость положения равновесия системы (11).

Доказательство. Рассмотрим функцию типа Ляпунова для (11):

$$2V_N(\varphi, \dot{\varphi}, \dots, q_N, \dot{q}_N) = k_1\varphi^2 + k_2\dot{\varphi}^2 + \sum_{j=1}^N \omega_j^2 \|\psi_j\|_X^2 q_j^2 + \sum_{j=1}^N \|\psi_j\|_X^2 \dot{q}_j^2 + 2\dot{\varphi} \sum_{j=1}^N \langle x, \psi_j \rangle_X \dot{q}_j + \\ + \left(\|x\|_X^2 + \sum_{j=1}^N \|\psi_j\|_X^2 q_j^2 - J \left(\sum_{j=1}^N \psi_j'(l) q_j \right)^2 \right) \dot{\varphi}^2, \quad (k_1 > 0, k_2 > 0).$$

Для доказательства положительной определенности V_N , запишем ее квадратичную часть Q_N следующим образом:

$$2Q_N = k_1\varphi^2 + k_2\dot{\varphi}^2 + \left\| \frac{\partial u_N}{\partial t} + \dot{\varphi} x \right\|_X^2 + \sum_{j=1}^N \omega_j^2 \|\psi_j\|_X^2 q_j^2,$$

где u_N задается выражением (10). Имеем

$$V_N = Q_N + \frac{\dot{\varphi}^2}{2} \left[\int_0^l \left(\sum_{j=1}^N \psi_j(x) q_j \right)^2 \rho dx + m \left(\sum_{j=1}^N \psi_j(l) q_j \right)^2 \right]. \quad (12)$$

Легко видеть, что $Q_N \geq 0$, при этом Q_N обращается в нуль только при выполнении условий

$$\varphi = \dot{\varphi} = q_1 = \dots = q_N = 0, \quad \left\| \sum_{j=1}^N \psi_j \dot{q}_j \right\|_X = 0.$$

Из приведенных условий следует $\dot{q}_1 = \dots = \dot{q}_N = 0$, ибо функции (ψ_1, \dots, ψ_N) линейно-независимы на $[0, l]$. Следовательно, квадратичная форма Q_N определена положительно. Отсюда с учетом (12) следует положительная определенность V_N и компактность множеств

$$L_c = \{(\varphi, \dot{\varphi}, q_1, \dot{q}_1, \dots, q_N, \dot{q}_N) \in \mathbb{R}^{2N+2} \mid V_N \leq c\}$$

при всех константах $c > 0$. Производная V_N в силу (11) имеет вид

$$\dot{V}_N = (\alpha_N + \beta_N v) \dot{\varphi},$$

где

$$\alpha_N = k_1\varphi + \sum_{j=1}^N (2\|\psi_j\|_X^2 \dot{\varphi} \dot{q}_j + \langle x, \psi_j \rangle_X (\dot{\varphi}^2 - \omega_j^2)) q_j -$$

$$-J\dot{\varphi} \left(\sum_{j=1}^N \psi'_j(l)q_j \right) \left(\sum_{j=1}^N \psi'_j(l) \left(2\dot{q}_j + \frac{\langle x, \psi_j \rangle_X}{\|\psi_j\|_X^2} \dot{\varphi} \right) \right),$$

$$\beta_N = k_2 + \|x\|_X^2 - J \left(\sum_{j=1}^N \psi'_j(l)q_j \right)^2 + \sum_{j=1}^N \left(\|\psi_j\|_X^2 q_j^2 - \frac{\langle x, \psi_j \rangle_X^2}{\|\psi_j\|_X^2} \right) > 0.$$

Определим управление с обратной связью $v = \gamma(\varphi, \dot{\varphi}, \dots, q_N, \dot{q}_N)$ посредством выражения

$$\gamma(\varphi, \dot{\varphi}, q_1, \dot{q}_1, \dots, q_N, \dot{q}_N) = -\frac{\alpha_N + h\dot{\varphi}}{\beta_N}, \quad (13)$$

где $h > 0$ – константа. Отсюда следует $\dot{V}_N = -h\dot{\varphi}^2 \leq 0$ в силу замкнутой системы (11), (13).

Нетрудно видеть, что всякая целая полутраектория замкнутой системы на множестве

$$Z_0 = \{(\varphi, \dot{\varphi}, q_1, \dot{q}_1, \dots, q_N, \dot{q}_N) \in \mathbb{R}^{2N+2} \mid \dot{V}_N = 0\}$$

удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\varphi(t) = \varphi_0 = \text{const},$$

$$q_k(t) = A_k \cos(\omega_k t) + B_k \sin(\omega_k t), \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

$$k_1 \varphi_0 = \sum_{j=1}^N \langle x, \psi_j \rangle \omega_j^2 q_j(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Из приведенных выше соотношений следует $\varphi_0 = A_1 = B_1 = \dots = B_N = 0$ в силу линейной независимости функций $(\cos(\omega_1 t), \dots, \sin(\omega_N t))$ на \mathbb{R}^+ , а также $\langle x, \psi_j \rangle_X \omega_j \neq 0$ при сделанных предположениях. Следовательно, единственной полутраекторией замкнутой системы на множестве Z_0 является начало координат. Поэтому замкнутая система (11), (13) глобально асимптотически устойчива на основании теоремы Барбашина-Красовского. \square

6. Задача наблюдаемости. Для реализации обратной связи (13) на практике, необходимо решить задачу наблюдения полного вектора состояния системы (11) по неполной информации измерений.

Задача наблюдаемости для твердого тела с двумя упругими стержнями, имеющими свободные концы, исследована в работе [12]. Было показано, что состояние конечномерной системы наблюдаемо по измерениям угла ориентации тела и относительных смещений некоторых точек на стержнях. Однако для гибких манипуляторов значения $u(x, t)$ напрямую недоступны. Вместо этого возможно использовать показания датчика, расположенного в определенной точке $x = \Delta$, $0 \leq \Delta \leq l_1$, который измеряет значения $\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=\Delta}$. Такой датчик инженерно реализуется с помощью пьезоэлектрической пленки, присоединенной к балке вблизи $x = \Delta$. При этом заряд, возникающий в пьезоэлементе вследствие деформации балки, приближенно пропорционален $\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=\Delta}$. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что измеряется следующий выход системы (11):

$$y_1(t) = \left. \frac{\partial^2 u_N(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=\Delta} = \sum_{k=1}^N \psi''_k(\Delta) q_k(t), \quad y_2(t) = \varphi(t). \quad (14)$$

Для случая $\Delta = 0$ стабилизируемость однородной балки без нагрузки по отношению к выходу (14) доказана в работе [7]. Ниже будут доказаны условия наблюдаемости системы с нагрузкой (11) относительно выхода (14) без предположения $\Delta = 0$.

ЛЕММА 2. Предположим, что $\psi_k''(\Delta) \neq 0$ при всех $k = \overline{1, N}$, $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_N$. Тогда система линейного приближения, построенная для (11) в окрестности нуля, наблюдаема по отношению к выходу (14).

Доказательство. Записав линеаризованную систему (11) в матричном виде, нетрудно составить для нее матрицу наблюдаемости с выходом (14). При выполнении условий $\psi_1''(\Delta) \neq 0, \dots, \psi_N''(\Delta) \neq 0$ и при различных ω_k матрица наблюдаемости имеет полный ранг, откуда следует утверждение леммы на основании рангового условия наблюдаемости Калмана [13]. \square

ЗАМЕЧАНИЕ. Лемма 2 обосновывает возможность применения управления с обратной связью (13) для стабилизации в линейном случае. Действительно, при выполнении предположений Теоремы 1 и Леммы 2 существует система-наблюдатель для линейного приближения уравнений (11). Подстановка фазового вектора этого наблюдателя в качестве оценки искомого фазового вектора в линеаризованные формулы (13), (4) дает оценку управляющего момента M , при этом система линеаризованных уравнений с наблюдателем имеет асимптотически устойчивое тривиальное решение на основании результата из [13]. В нелинейном случае необходимо дополнительное исследование устойчивости решений дифференциальных уравнений с наблюдателем в цепи обратной связи.

7. Численное моделирование. В данном пункте приведены результаты численного интегрирования системы (11) с законом управления (13) в случае $N = 2$.

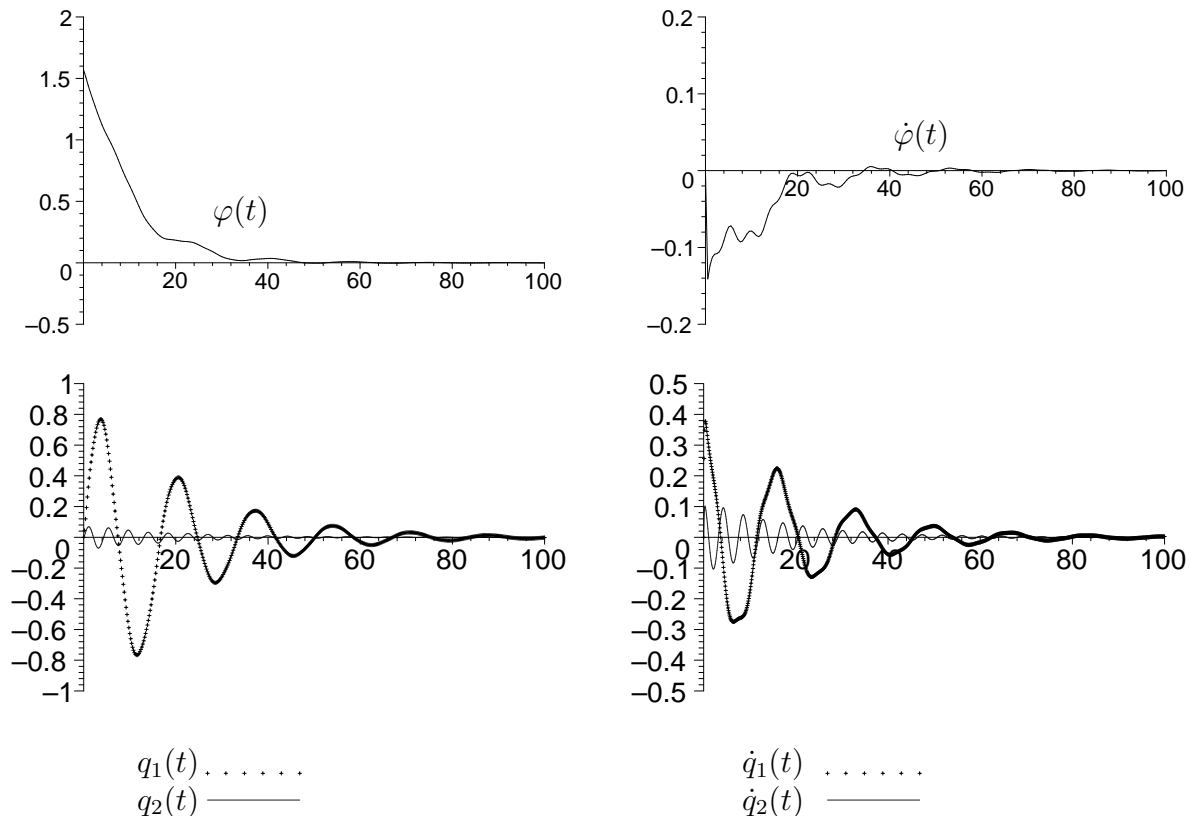


Рис. 3. Решение системы (11), (13).

Рис. 3 иллюстрирует решение задачи Коши с начальными условиями

$$\varphi(0) = \frac{\pi}{2}, \dot{\varphi}(0) = q_1(0) = q_2(0) = \dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0.$$

При этом механические параметры заданы соотношениями (9), а константы управления выбраны такими: $h = 10$, $k_1 = k_2 = 1$.

Из рис. 3 видно, что предложенный закон управления (13) обеспечивает сходимость к нулю решения системы (11).

1. Гуляев В.И., Завражсина Т.В. Динамика робота-манипулятора с упругими звеньями // Прикл. механика. – 2001. – **37**, 11. – С. 130-140.
2. Chen G., Delfour M.C., Krall A.M., Payre G. Modeling, stabilization and control of serially connected beams. *SIAM J. Control Optim.*, 25:526–546, 1987.
3. Bloch A.M., Titi E.S. On the dynamics of rotating elastic beams. In *New Trends in Systems Theory, Proc. Jt. Conf., Genoa/Italy 1990*, volume 7, pages 128–135. 1991.
4. Xu C.Z., Baillieul J. Stabilizability and stabilization of a rotating body-beam system with torque control. *IEEE Trans. on Autom. Control*, 38:1754–1765, 1993.
5. Coron J.-M., d'Andrea Novel B. Stabilization of a rotating body beam without damping. *IEEE Trans. on Autom. Control*, 44:608–618, 1998.
6. Luo Z.-H., Guo B.-Z., Morgul O. *Stability and Stabilization of Infinite Dimensional Systems*. Springer-Verlag, London, 1999, 403 p.
7. Luo Z.-H., Guo B.-Z. Shear force feedback control of a single-link flexible robot with a revolute joint. *IEEE Trans. on Autom. Control*, 42:53–65, 1997.
8. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. Манипуляционные роботы. – М.: Наука, 1989. – 368 с.
9. Talebi H.A., Patel R.V., Khorasani K. *Control of Flexible-link Manipulators Using Neural Networks*. Springer-Verlag, London, 2001, 142 p.
10. Sawodny O., Aschemann H., Bulach A. Mechatronical designed control of fire-rescue turntable ladders as flexible link robots. *Proc. 15th IFAC World Congress, Barcelona, Spain*, 2002.
11. Donea J., Huerta A. *Finite Element Methods for Flow Problems*. Wiley, Chichester, 2003, 350 p.
12. Ковалев А.М., Зуев А.Л., Щербак В.Ф. Синтез стабилизирующего управления твердым телом с присоединенными упругими элементами // Пробл. управления и информатики. – 2002. – 6. – С. 5-16.
13. Уонэм М. Линейные многомерные системы управления. – М.: Наука, 1980. – 376 с.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
 Technical University of Ilmenau, Inst. of Automation and Systems Engineering,
 P.O.B. 100565, 98684 Ilmenau, Germany
 al_zv@mail.ru

Получено 30.06.2004