ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2004. Вып. 34

УДК 531.38

©2004. **С.Н. Судаков**

О ДВИЖЕНИИ ПО ИНЕРЦИИ ВОКРУГ ЦЕНТРА МАСС АБСОЛЮТНО ТВЕРДОЙ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ С ВЯЗКО-УПРУГИМ И ЖИДКИМ ЗАПОЛНЕНИЯМИ

Рассмотрена задача о движении по инерции вокруг центра масс механической системы, состоящей из двух подобных соосных эллипсоидов, жестко связанных друг с другом. Пространство между эллипсоидами целиком заполнено несжимаемой вязко-упругой средой Кельвина-Фойгта. Предполагается, что на эту среду наложены кинематические связи, допускающие только однородные деформации. Внутренний эллипсоид целиком заполнен несжимаемой ньютоновской жидкостью, совершающей однородное вихревое движение. Движение системы описывается девятью обыкновенными дифференциальными уравнениями. Найдены стационарные решения этих уравнений, описывающие равномерные вращения системы вокруг наименьшей оси эллипсоидов. В линейной постановке исследовано поведение решений уравнений движения в малой окрестности стационарных решений. Установлено, что если геометрические размеры и массовые характеристики эллипсоидов и их заполнений выбрать такими же, какие имеет Земля, то можно указать значение модуля Юнга вязко-упругой среды, при котором период времени обхода вектором угловой скорости наименьшей оси эллипсоидов будет равен периоду Чендлера.

Согласно работе [1], вязкость жидкого ядра Земли на границе с мантией равна $100\,\text{Па}\cdot\text{с}$ и возрастает к центру Земли, достигая на границе между наружным и внутренним ядрами величины $10^{11}\,\text{Па}\cdot\text{с}$. Столь сильное изменение вязкости необходимо учитывать при построении моделей вращения Земли. С этой целью в работах [2, 3] рассмотрена задача о движении твердого тела с эллипсоидальной полостью, целиком заполненной несжимаемой ньютоновской жидкостью, вязкость которой является заданной функцией кооринат. Однако такая постановка задачи еще недостаточна для успешного описания процесса вращения Земли, поскольку оболочка, содержащая жидкость, принята в ней абсолютно твердой, а согласно работам [4, 5], именно ее упругость позволяет теоретически получать период Чендлера.

Целью настоящей работы является построение простой математической модели планеты с учетом вязко-упругости оболочки и переменной вязкости жидкого ядра. Для учета вязко-упругости оболочки используется подход, изложенный в работе [6]. А для описания движения жидкости ядра используются результаты работ [2, 3].

Обозначим через $O\xi_1\xi_2\xi_3$ неподвижную декартову систему координат. Через $Ox_1x_2x_3$ обозначим подвижную декартову систему координат, начало O которой является для нее неповижной точкой. Будем считать, что с подвижной системой координат связаны два подобных соосных элипсоида, которые заданы уравнениями

$$\sum_{i=1}^{3} x_i^2/C_i^2 = 1\,, \qquad \sum_{i=1}^{3} x_i^2/c_i^2 = 1, \tag{1}$$

где C_1, C_2, C_3 — длины полуосей наружного эллипсоида, а c_1, c_2, c_3 — внутреннего. В силу подобия эллипсоидов должны выполняться соотношения $c_1/C_1 = c_2/C_2 = c_3/C_3$. Пространство между эллипсоидами заполнено вязко-упругой средой Кельвина-Фойгта [7]. Эту среду удобно представлять несжимаемой ньютоновской жидкостью, в которой, кроме давления и сил вязкого трения, действуют силы упругости, определяемые смещениями точек среды от нейтрального положения. Дополнительно будем считать, что на вязко-упругую среду наложены кинематические связи, допускающие только однородные деформации ее между эллипсоидами.

Пространство, ограниченное внутренним эллипсоидом, будем считать целиком заполненным несжимаемой ньютоновской жидкостью. Вязко-упругая среда и жидкость во внутреннем эллипсоиде имеют одну и ту же постоянную плотность ρ, а их динамические вязкости являются следующими функциями координат:

$$\mu_v = \mu_0(1 - \sum_{i=1}^{3} x_i^2/C_i^2), \qquad \mu_c = \mu_*(1 - \sum_{i=1}^{3} x_i^2/c_i^2). \tag{2}$$

Здесь μ_0 — параметр, определяющий вязкость вязко-упругой среды; μ_* — динамическая вязкость жидкости ядра в центре эллипсоида. Из формул (1), (2) следует, что вязкость вязко-упругой среды μ_v обращается в нуль на внешнем эллипсоиде, а вязкость жидкости ядра μ_c — на внутреннем.

Описание деформаций вязко-упругой среды. Однородные деформации вязко-упругой среды, заключенной между двумя подобными соосными эллипсоидами (1), можно построить с помощью трех последовательных линейных отображений:

1) деформация среды, заключенной между эллипсоидами, в шаровой слой

$$x_i' = x_{i0}R/C_i, \quad i = 1,2,3,$$

где $R = \sqrt[3]{c_1c_2c_3}$; x_{10}, x_{20}, x_{30} — координаты частиц среды до деформации; x_1', x_2', x_3' — координаты частиц среды после деформации;

2) поворот шарового слоя вокруг центра

$$x_i'' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j', \quad i = 1,2,3,$$

где a_{ij} — компоненты матрицы поворота;

3) деформация шарового слоя в слой, заключенный между эллипсоидами (1),

$$x_i = x_i'' C_i/R, \quad i = 1,2,3.$$

В результате мы получим отображение

$$x_i = C_i \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_{j0}/C_j, \quad i = 1,2,3. \tag{3}$$

Поворот шарового слоя вокруг его центра будем задавать углами Крылова α, β, γ. Тогда компоненты a_{ij} матрицы поворота A выражаются через углы Крылова следующим образом:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\gamma & -\cos\beta\sin\gamma & \sin\beta \\ \cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma & \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma & -\sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma & \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma & cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}.$$

Таким образом, формулы (3) выражают координаты x_1, x_2, x_3 точек вязко-упругой среды после деформации через углы Крылова α, β, γ и их координаты x_{10}, x_{20}, x_{30} до деформации.

Выражение для кинетической энергии. Положение подвижных осей $Ox_1x_2x_3$ относительно неподвижных $O\xi_1\xi_2\xi_3$ будем определять углами Эйлера φ, ψ, θ, где угол нутации θ является углом между осями Ox_3 и $O\xi_3$; угол прецессии ψ — это угол между осью $O\xi_1$ и линией узлов.

Отображение (3) описывает движение вязко-упругой среды между эллипсоидами. Согласно работам [6, 8], движение, задаваемое отображением (3), является однородным вихревым и его кинетическая энергия определяется выражением

$$T_v = \frac{k_v}{2} \sum_{(123)} [(\zeta_2^2 + \zeta_3^2)\omega_1^{o2} + (\zeta_2^2 + \zeta_3^2){\omega_1}^2 + 4\zeta_2\zeta_3\omega_1^o\omega_1], \tag{4}$$

где символ (123) означает, что остальные члены суммы получаются циклической перестановкой индексов;

$$k_v = \frac{mR^2 - m_c r_c^2}{5}, \quad r_c = \sqrt[3]{c_1c_2c_3}, \quad m = \rho Q, \quad Q = \frac{4}{3}\pi C_1C_2C_3,$$

$$m_c = \rho Q_c, \quad Q_c = \frac{4}{3}\pi c_1c_2c_3, \quad \zeta_i = C_i/R, \quad i = 1, 2, 3;$$

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — проекции абсолютной угловой скорости подвижных осей на себя, которые имеют вид

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta \cos\varphi, \\ \omega_2 &= \dot\psi \sin\theta \cos\varphi - \dot\theta \sin\varphi, \\ \omega_3 &= \dot\psi \cos\theta + \dot\varphi; \end{aligned} \tag{5}$$

$\omega_1^o, \omega_2^o, \omega_3^o$ – проекции на подвижные оси $Ox_1x_2x_3$ относительной угловой скорости вспомогательного твердого тела (шаровой слой, в который переходит вязко-упругая среда в результате линейного преобразования 1), положение которого относительно осей $Ox_1x_2x_3$ определяется углами Крылова α, β, γ:

$$\begin{aligned} \omega_1^o &= \dot\alpha + \dot\gamma \sin\beta, \\ \omega_2^o &= -\dot\gamma \cos\beta \sin\alpha + \dot\beta \cos\alpha, \\ \omega_3^o &= \dot\gamma \cos\beta \cos\alpha + \dot\beta \sin\alpha. \end{aligned} \tag{6}$$

Точки над символами означают дифференцирование по времени t.

Движение жидкости внутри второго эллипсоида (1) тоже будет однородным вихревым и его кинетическая энергия определяется выражением [8]

$$T_c = \frac{k_c}{2} \sum_{(123)} [(\zeta_2^2 + \zeta_3^2)\omega_1^{*2} + (\zeta_2^2 + \zeta_3^2)\omega_1^2 + 4\zeta_2\zeta_3\omega_1^*\omega_1], \tag{7}$$

где $k_c = m_c r_c^2/5$; $\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*$ — проекции на подвижные оси $Ox_1x_2x_3$ относительной угловой скорости вспомогательного твердого тела, положение которого относительно осей $Ox_1x_2x_3$ определяется углами Крылова $\alpha_*, \beta_*, \gamma_*$:

$$\omega_1^* = \dot\alpha_* + \dot\gamma_* \sin\beta_*,$$

$$\omega_2^* = -\dot{\gamma}_* \cos\beta_* \sin\alpha_* + \dot{\beta}_* \cos\alpha_*, \tag{8}$$
$$\omega_3^* = \dot{\gamma} \cos\beta_* \cos\alpha_* + \dot{\beta}_* \sin\alpha_*;$$

Кинетическая энергия эллипсоидов (1) равна

$$T_o = \frac{k_v}{2} \sum_{i=1}^{3} A_i \omega_i^2, \tag{9}$$

где $A_i = A_i^o/k_v$, A_i^o — суммарные главные центральные моменты инерции эллипсоидов (1).

Кинетической энергией всей системы будет $T = T_c + T_v + T_o$, где T_v, T_c, T_o определены выражениями (4) – (9).

Выражение для потенциальной энергии упругих деформаций. Потенциальная энергия образуется при деформациях вязко-упругой среды, заключенной между эллипсоидами. Проекции вектора перемещений точек вязко-упругой среды относительно осей $Ox_1x_2x_3$ на эти же оси определяются соотношениями $u_i = x_i - x_{i0}$, $i = 1, 2, 3$, где x_i даются выражениями (3), x_i^0 — координаты точек вязко-упругой среды в недеформированном состоянии. Используя для компонент тензора деформаций нелинейные формулы [9, с. 20, 127] и учитывая предположение о несжимаемости среды, зададим потенциальную энергию упругих деформаций выражением [6]

$$\Pi = GQ_v[\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 + \frac{1}{2}\ (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2)],$$

где $Q_v = Q - Q_c$ — объем, заключенный между эллипсоидами (1); $G = \frac{E}{2(1+\eta)}$; E — модуль Юнга вязко-упругой среды; η — коэффициент Пуассона;

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}\Big(-1 + a_{11}^2 + \frac{\zeta_2^2}{\zeta_1^2}\ a_{21}^2 + \frac{\zeta_3^2}{\zeta_1^2}\ a_{31}^2\Big), \quad \varepsilon_{12} = \frac{\zeta_1}{\zeta_2}\ a_{11}a_{12} + \frac{\zeta_2}{\zeta_1}\ a_{21}a_{22} + \frac{\zeta_3^2}{\zeta_1\zeta_2}\ a_{31}a_{32} \quad (123).$$

Диссипативная функция Рэлея. Диссипация энергии при движении происходит за счет вязкого трения внутри вязко-упругой среды, заключенной между эллипсоидами (1), и внутри жидкости, заполняющей внутренний эллипсоид. Используя результаты работы [3], запишем выражение для диссипативной функции Рэлея в виде

$$\mathcal{F} = \frac{1}{5}\ \mu_* Q_c \sum_{(123)} \Big(\frac{\zeta_3^2 - \zeta_2^2}{\zeta_3\zeta_2}\Big)^2 \omega_1^{*2} + \frac{1}{5}\ \mu_0 Q_v \sum_{(123)} \Big(\frac{\zeta_3^2 - \zeta_2^2}{\zeta_3\zeta_2}\Big)^2 \omega_1^{o2}.$$

Уравнения движения Лагранжа 2-рода. Вводя функцию Лагранжа $L = T - \Pi$, запишем уравнения движения в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_*} - \frac{\partial L}{\partial \alpha_*} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\alpha}_*} = \mathcal{Q}_{\alpha_*} \quad (\alpha_*\beta_*\gamma_*\alpha\beta\gamma\varphi\psi\theta),$$

где символ $(\alpha_*\beta_*\gamma_*\alpha\beta\gamma\varphi\psi\theta)$ означает, что остальные уравнения получаются циклической перестановкой взятых в скобки символов; $\mathcal{Q}_{\alpha_*} = \mathcal{Q}_{\beta_*} = \mathcal{Q}_{\gamma_*} = \mathcal{Q}_\alpha = \mathcal{Q}_\beta = \mathcal{Q}_\gamma = 0$, обобщенные силы $\mathcal{Q}_\varphi, \mathcal{Q}_\psi, \mathcal{Q}_\theta$ в общем случае могут быть отличны от нуля, однако в настоящей работе мы будем считать их равными нулю.

Запишем уравнения движения в развернутом виде

$$
\begin{gathered}
\zeta_2\zeta_3\dot\Omega_1+\zeta_3\zeta_1\Omega_2\omega_3^*-\zeta_1\zeta_2\Omega_3\omega_2^*+\frac{\mu_*Q_c}{5k_c}\,\Big(\frac{\zeta_3^2-\zeta_2^2}{\zeta_3\zeta_2}\Big)^2\omega_1^*=0,\\
\zeta_3\zeta_1\dot\Omega_2\cos\alpha_*+\zeta_1\zeta_2\dot\Omega_3\sin\alpha_*-(\zeta_3\zeta_1\Omega_2\sin\alpha_*-\zeta_1\zeta_2\Omega_3\cos\alpha_*)\dot\alpha_*-\\
-(\zeta_2\zeta_3\Omega_1\cos\beta_*+\zeta_3\zeta_1\Omega_2\sin\beta_*\sin\alpha_*-\zeta_1\zeta_2\Omega_3\sin\beta_*\cos\alpha_*)\dot\gamma_*+\\
+\frac{\mu_*Q_c}{5k_c}\Big[\Big(\frac{\zeta_1^2-\zeta_3^2}{\zeta_1\zeta_3}\Big)^2\omega_2^*\cos\alpha_*+\Big(\frac{\zeta_2^2-\zeta_1^2}{\zeta_2\zeta_1}\Big)^2\omega_3^*\sin\alpha_*\Big]=0,\\
\zeta_2\zeta_3\dot\Omega_1\sin\beta_*-\zeta_3\zeta_1\dot\Omega_2\cos\beta_*\sin\alpha_*+\zeta_1\zeta_2\dot\Omega_3\cos\beta_*\cos\alpha_*-\\
-(\zeta_3\zeta_1\Omega_2\cos\beta_*\cos\alpha_*+\zeta_1\zeta_2\Omega_3\cos\beta_*\sin\alpha_*)\dot\alpha_*+\\
(\zeta_2\zeta_3\Omega_1\cos\beta_*+\zeta_3\zeta_1\Omega_2\sin\beta_*\sin\alpha_*-\zeta_1\zeta_2\Omega_3\sin\beta_*\cos\alpha_*)\dot\beta_*+\\
+\frac{\mu_*Q_c}{5k_c}\,\Big[\Big(\frac{\zeta_3^2-\zeta_2^2}{\zeta_3\zeta_2}\Big)^2\omega_1^*\sin\beta_*-\Big(\frac{\zeta_1^2-\zeta_3^2}{\zeta_1\zeta_3}\Big)^2\omega_2^*\cos\beta_*\sin\alpha_*+\\
+\Big(\frac{\zeta_2^2-\zeta_1^2}{\zeta_2\zeta_1}\Big)^2\omega_3^*\cos\beta_*\cos\alpha_*\Big]=0,\\
\zeta_2\zeta_3\dot\Omega_1'+\zeta_3\zeta_1\Omega_2'\omega_3^o-\zeta_1\zeta_2\Omega_3'\omega_2^o+\frac{1}{2k_v}\frac{\partial\Pi}{\partial\alpha_o}+\frac{\mu_0Q_v}{5k_v}\,\Big(\frac{\zeta_3^2-\zeta_2^2}{\zeta_3\zeta_2}\Big)^2\omega_1^o=0,\\
\zeta_3\zeta_1\dot\Omega_2'\cos\alpha+\zeta_1\zeta_2\dot\Omega_3'\sin\alpha-(\zeta_3\zeta_1\Omega_2'\sin\alpha-\zeta_1\zeta_2\Omega_3'\cos\alpha)\dot\alpha-\\
-(\zeta_2\zeta_3\Omega_1'\cos\beta+\zeta_3\zeta_1\Omega_2'\sin\beta\sin\alpha-\zeta_1\zeta_2\Omega_3'\sin\beta\cos\alpha)\dot\gamma+\\
+\frac{\mu_0Q_v}{5k_v}\Big[\Big(\frac{\zeta_1^2-\zeta_3^2}{\zeta_1\zeta_3}\Big)^2\omega_2^o\cos\alpha+\Big(\frac{\zeta_2^2-\zeta_1^2}{\zeta_2\zeta_1}\Big)^2\omega_3^o\sin\alpha\Big]+\frac{1}{2k_v}\frac{\partial\Pi}{\partial\beta}=0, \qquad (10)\\
\zeta_2\zeta_3\dot\Omega_1'\sin\beta-\zeta_3\zeta_1\dot\Omega_2'\cos\beta\sin\alpha+\zeta_1\zeta_2\dot\Omega_3'\cos\beta\cos\alpha-\\
-(\zeta_3\zeta_1\Omega_2'\cos\beta\cos\alpha+\zeta_1\zeta_2\Omega_3'\cos\beta\sin\alpha)\dot\alpha+\\
(\zeta_2\zeta_3\Omega_1'\cos\beta+\zeta_3\zeta_1\Omega_2'\sin\beta\sin\alpha-\zeta_1\zeta_2\Omega_3\sin\beta\cos\alpha)\dot\beta+\\
+\frac{\mu_0Q_v}{5k_v}\,\Big[\Big(\frac{\zeta_3^2-\zeta_2^2}{\zeta_3\zeta_2}\Big)^2\omega_1^o\sin\beta-\Big(\frac{\zeta_1^2-\zeta_3^2}{\zeta_1\zeta_3}\Big)^2\omega_2^o\cos\beta\sin\alpha+\\
+\Big(\frac{\zeta_2^2-\zeta_1^2}{\zeta_2\zeta_1}\Big)^2\omega_3^o\cos\beta\cos\alpha\Big]+\frac{1}{2k_v}\frac{\partial\Pi}{\partial\gamma}=0,\\
k_v\dot X_3^o+k_c\dot X_3^*-(k_vX_1^o+k_cX_1^*)\omega_2+(k_vX_2^o+k_cX_2^*)\omega_1=\mathcal{Q}_\varphi,\\
(k_v\dot X_1^o+k_c\dot X_1^*)\sin\theta\sin\varphi+(k_v\dot X_2^o+k_c\dot X_2^*)\sin\theta\cos\varphi+(k_v\dot X_3^o+k_c\dot X_3^*)\cos\theta+\\
+(k_vX_1^o+k_cX_1^*)(\dot\theta\cos\theta\sin\varphi+\dot\varphi\sin\theta\cos\varphi)+\\
+(k_vX_2^o+k_cX_2^*)(\dot\theta\cos\theta\cos\varphi+\dot\varphi\sin\theta\sin\varphi)-(k_vX_3^o+k_cX_3^*)\dot\theta\sin\theta=\mathcal{Q}_\psi,\\
(k_v\dot X_1^o+k_c\dot X_1^*)\cos\varphi-(k_v\dot X_2^o+k_c\dot X_2^*)\sin\varphi-\\
-(k_vX_1^o+k_cX_1^*)\omega_3\sin\varphi-(k_vX_2^o+k_cX_2^*)\omega_3\cos\varphi+(k_vX_3^o+k_cX_3^*)\dot\psi\sin\theta=\mathcal{Q}_\theta,
\end{gathered}
$$

где

$$\Omega_1 = \frac{\zeta_3^2+\zeta_2^2}{2\zeta_3\zeta_2}\,\omega_1^* + \omega_1, \quad \Omega_1' = \frac{\zeta_3^2+\zeta_2^2}{2\zeta_3\zeta_2}\,\omega_1^o + \omega_1\,,$$

$$X_1^o = (\zeta_2^2+\zeta_3^2+A_1)\omega_1 + 2\zeta_2\zeta_3\omega_1^o, \quad X_1^* = (\zeta_2^2+\zeta_3^2)\omega_1 + 2\zeta_2\zeta_3\omega_1^* \quad (123), \tag{11}$$

а $\omega_i, \omega_i^o, \omega_i^*$, $i = 1,2,3$ выражены через $\varphi, \psi, \theta, \alpha, \beta, \gamma, \alpha_*, \beta_*, \gamma_*$ и их производные по формулам (5), (6), (8).

Здесь $2\Omega_1, 2\Omega_2, 2\Omega_3$ — проекции на оси $Ox_1x_2x_3$ вектора вихря абсолютной скорости жидкости, заполняющей внутренний эллипсоид, а $2\Omega_1', 2\Omega_2', 2\Omega_3'$ — проекции на эти же оси вихря абсолютной скорости вязко-упругой среды, находящейся между наружным и внутренним эллипсоидами.

Переход к уравнениям в неголономных переменных. Обозначая левые части уравнений (10) в порядке их следования через $f_{\alpha_*}, f_{\beta_*}, f_{\gamma_*}, f_\alpha, f_\beta, f_\gamma, f_\varphi, f_\psi, f_\theta$ и составляя из них следующие линейные комбинации:

$$f_{\alpha_*} = 0, \quad f_{\alpha_*}\sin\alpha_*\sin\beta_* + f_{\beta_*}\cos\beta_*\cos\alpha_* - f_{\gamma_*}\sin\alpha_* = 0,$$

$$-f_{\alpha_*}\sin\beta_*\cos\alpha_* + f_{\beta_*}\cos\beta_*\sin\alpha_* + f_{\gamma_*}\cos\alpha_* = 0,$$

$$f_\alpha = 0, \quad f_\alpha\sin\alpha\sin\beta + f_\beta\cos\beta\cos\alpha - f_\gamma\sin\alpha = 0,$$

$$-f_\alpha\sin\beta\cos\alpha + f_\beta\cos\beta\sin\alpha + f_\gamma\cos\alpha = 0,$$

$$-f_\varphi\sin\varphi\,\mathrm{ctg}\theta + f_\psi\sin\varphi\sin^{-1}\theta + f_\theta\cos\varphi = \mathcal{L}_1,$$

$$-f_\varphi\cos\varphi\,\mathrm{ctg}\theta + f_\psi\cos\varphi\sin^{-1}\theta - f_\theta\sin\varphi = \mathcal{L}_2, \quad f_\varphi = \mathcal{L}_3,$$

где

$$\mathcal{L}_1 = -\mathcal{Q}_\varphi\sin\varphi\,\mathrm{ctg}\theta + \mathcal{Q}_\psi\sin\varphi\sin^{-1}\theta + \mathcal{Q}_\theta\cos\varphi,$$

$$\mathcal{L}_2 = -\mathcal{Q}_\varphi\cos\varphi\,\mathrm{ctg}\theta + \mathcal{Q}_\psi\cos\varphi\sin^{-1}\theta - \mathcal{Q}_\theta\sin\varphi, \quad \mathcal{L}_3 = \mathcal{Q}_\varphi, \tag{12}$$

приводим уравнения движения (10) к виду

$$\zeta_2\zeta_3\dot\Omega_1 + \zeta_3\zeta_1\Omega_2\omega_3^* - \zeta_1\zeta_2\Omega_3\omega_2^* + \frac{\mu_* Q_c}{5k_c}\left(\frac{\zeta_3^2-\zeta_2^2}{\zeta_3\zeta_2}\right)^2\omega_1^* = 0,$$

$$\zeta_2\zeta_3\dot\Omega_1' + \zeta_3\zeta_1\Omega_2'\omega_3^o - \zeta_1\zeta_2\Omega_3'\omega_2^o + \frac{\mu_0 Q_v}{5k_v}\left(\frac{\zeta_3^2-\zeta_2^2}{\zeta_3\zeta_2}\right)^2\omega_1^o - \zeta_2\zeta_3\Pi_1 = 0, \tag{13}$$

$$k_v\dot X_1^o + k_c\dot X_1^* - (k_vX_2^o + k_cX_2^*)\omega_3 + (k_vX_3^o + k_cX_3^*)\omega_2 = \mathcal{L}_1,$$

(123),

где

$$\Pi_1 = -\frac{1}{2k_v\zeta_2\zeta_3}\,\frac{\partial\Pi}{\partial\alpha}\,,$$

$$\Pi_2 = -\frac{1}{2k_v\zeta_3\zeta_1}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\alpha}\sin\alpha\,\mathrm{tg}\beta + \frac{\partial\Pi}{\partial\beta}\cos\alpha - \frac{\partial\Pi}{\partial\gamma}\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}\right), \tag{14}$$

$$\Pi_3 = -\frac{1}{2k_v\zeta_1\zeta_2}\left(-\frac{\partial\Pi}{\partial\alpha}\cos\alpha\,\mathrm{tg}\beta + \frac{\partial\Pi}{\partial\beta}\sin\alpha + \frac{\partial\Pi}{\partial\gamma}\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right).$$

Используя выражения (11), запишем уравнения движения (13) в виде

$$\dot{\Omega}_1 = (1-\varepsilon_3)\omega_3\Omega_2 - (1+\varepsilon_2)\omega_2\Omega_3 + (\varepsilon_2+\varepsilon_3)\Omega_2\Omega_3 - \sigma_1^*(\Omega_1-\omega_1) \quad (123), \tag{15}$$

$$\dot{\Omega}'_1 = (1-\varepsilon_3)\omega_3\Omega'_2 - (1+\varepsilon_2)\omega_2\Omega'_3 + (\varepsilon_2+\varepsilon_3)\Omega'_2\Omega'_3 - \sigma_1^o(\Omega'_1-\omega_1) + \Pi_1 \quad (123), \tag{16}$$

$$A_1^*\dot{\omega}_1 + 4\frac{\zeta_3^2\zeta_2^2}{\zeta_3^2+\zeta_2^2}\,(k_c\dot{\Omega}_1 + k_v\dot{\Omega}'_1) = (A_2^* - A_3^*)\omega_2\omega_3 +$$

$$+\frac{4\zeta_1^2\zeta_3^2}{\zeta_1^2+\zeta_3^2}\,\omega_3(k_c\Omega_2 + k_v\Omega'_2) - 4\frac{\zeta_1^2\zeta_2^2}{\zeta_1^2+\zeta_2^2}\,\omega_2(k_c\Omega_3 + k_v\Omega'_3) + \mathcal{L}_1 \quad (123), \tag{17}$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{\zeta_3^2-\zeta_2^2}{\zeta_3^2+\zeta_2^2}, \quad A_1^* = A_1^o + \frac{mR^2}{5}\,\frac{(\zeta_3^2-\zeta_2^2)^2}{\zeta_3^2+\zeta_2^2},$$

$$\sigma_1^* = \frac{2\mu_* Q_c\varepsilon_1^2}{5k_c}\,\frac{\zeta_3^2+\zeta_2^2}{\zeta_3^2\zeta_2^2}, \quad \sigma_1^o = \frac{2\mu_0 Q_v\varepsilon_1^2}{5k_v}\,\frac{\zeta_3^2+\zeta_2^2}{\zeta_3^2\zeta_2^2} \quad (123).$$

Будем считать величины α, β, γ малыми. Тогда для $\frac{\partial\Pi}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\Pi}{\partial\beta}$, $\frac{\partial\Pi}{\partial\gamma}$ можно использовать их линеаризованные выражения

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\alpha} = GQ_v\Big(\frac{\zeta_3^2-\zeta_2^2}{\zeta_3\zeta_2}\Big)^2\alpha, \quad \frac{\partial\Pi}{\partial\beta} = GQ_v\Big(\frac{\zeta_1^2-\zeta_3^2}{\zeta_1\zeta_3}\Big)^2\beta, \quad \frac{\partial\Pi}{\partial\gamma} = GQ_v\Big(\frac{\zeta_2^2-\zeta_1^2}{\zeta_2\zeta_1}\Big)^2\gamma. \tag{18}$$

Используя уравнения (15) и (16), приводим уравнения (17) к виду

$$\dot{\omega}_1 = a_1\omega_2\omega_3 + p_1(k_c\omega_2\Omega_3 + k_v\omega_2\Omega'_3) - q_1(k_c\omega_3\Omega_2 + k_v\omega_3\Omega'_2) +$$

$$+b_1(k_c\Omega_2\Omega_3 + k_v\Omega'_2\Omega'_3) + \tilde{\sigma}_1^*(\Omega_1-\omega_1) + \tilde{\sigma}_1^o(\Omega'_1-\omega_1) - r_1\Pi_1 + \mathcal{L}_1/A_1^* \quad (123), \tag{19}$$

где $\Pi_i, \quad i = 1, 2, 3$ определены соотношениями (14), (18);

$$a_1 = \frac{A_2^*-A_3^*}{A_1^*}, \quad p_1 = \frac{4\zeta_1^2\zeta_2^2\varepsilon_1\varepsilon_2}{(\zeta_1^2+\zeta_2^2)A_1^*}, \quad q_1 = \frac{4\zeta_1^2\zeta_3^2\varepsilon_1\varepsilon_3}{(\zeta_1^2+\zeta_3^2)A_1^*}, \quad r_1 = \frac{4\zeta_3^2\zeta_2^2 k_v}{(\zeta_3^2+\zeta_2^2)A_1^*},$$

$$b_1 = \frac{8\varepsilon_1}{(\zeta_1^2+\zeta_2^2)(\zeta_1^2+\zeta_3^2)A_1^*}, \quad \tilde{\sigma}_1^* = \frac{8\mu_* Q_c\varepsilon_1^2}{5A_1^*}, \quad \tilde{\sigma}_1^o = \frac{8\mu_0 Q_v\varepsilon_1^2}{5A_1^*} \quad (123).$$

Разрешая уравнения (6) относительно $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$ и используя вторую группу соотношений (11), будем иметь

$$\dot{\alpha} = \frac{2\zeta_2\zeta_3}{\zeta_2^2+\zeta_3^2}\,(\Omega'_1-\omega_1) + \frac{2\zeta_3\zeta_1}{\zeta_3^2+\zeta_1^2}\,(\Omega'_2-\omega_2)\sin\alpha\,\mathrm{tg}\beta - \frac{2\zeta_1\zeta_2}{\zeta_1^2+\zeta_2^2}\,(\Omega'_3-\omega_3)\cos\alpha\,\mathrm{tg}\beta,$$

$$\dot{\beta} = \frac{2\zeta_3\zeta_1}{\zeta_3^2+\zeta_1^2}\,(\Omega'_2-\omega_2)\cos\alpha + \frac{2\zeta_1\zeta_2}{\zeta_1^2+\zeta_2^2}\,(\Omega'_3-\omega_3)\sin\alpha, \tag{20}$$

$$\dot{\gamma} = -\frac{2\zeta_3\zeta_1}{\zeta_3^2+\zeta_1^2}\,\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}\,(\Omega'_2-\omega_2) + \frac{2\zeta_1\zeta_2}{\zeta_1^2+\zeta_2^2}\,\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\,(\Omega'_3-\omega_3).$$

Уравнения (5),(15),(16),(19),(20) полностью описывают движение рассматриваемой механической системы.

Рассмотрим случай нулевых моментов внешних сил (12): $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_3 = 0$. Уравнения (15),(16),(19),(20) решаются независимо от уравнений (5)и имеют частное решение

$$\Omega_3 = \Omega_3' = \omega_3 = \omega_0, \quad \Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_1' = \Omega_2' = \omega_1 = \omega_2 = \alpha = \beta = \gamma = 0, \tag{21}$$

описывающее равномерные вращения всей системы вокруг оси Ox_3 с угловой скоростью ω_0. Исследуем в линейной постановке движение рассматриваемой механической системы в малой окрестности равномерных вращений, описываемых стационарным решением (21). Для этого Ω_3, Ω_3' и ω_3 представим в виде

$$\Omega_3 = \omega_0 + \delta_1, \quad \Omega_3' = \omega_0 + \delta_2, \quad \omega_3 = \omega_0 + \delta_3, \tag{22}$$

где $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ — новые переменные. Подставим выражения (22) в систему (15), (16), (19), (20) и, считая переменные $\Omega_1, \Omega_2, \delta_1, \Omega_1', \Omega_2', \delta_2, \omega_1, \omega_2, \delta_3, \alpha, \beta, \gamma$ малыми, выполним по ним линеаризацию. В результате получим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{y}} = D\mathbf{y}, \tag{23}$$

$$\begin{gathered}
\dot{\delta}_1 = -\sigma_3^*(\delta_1 - \delta_3), \\
\dot{\delta}_2 = -\sigma_3^o(\delta_2 - \delta_3) - \frac{GQ_v(\zeta_2^2 - \zeta_1^2)^2}{2k_v\zeta_2^3\zeta_1^3}\,\gamma, \\
\dot{\delta}_3 = \tilde{\sigma}_3^*(\delta_1 - \delta_3) + \tilde{\sigma}_3^o(\delta_2 - \delta_3) + \frac{2GQ_v(\zeta_2^2 + \zeta_1^2)}{A_3^*}\,\gamma, \\
\dot{\gamma} = \frac{2\zeta_1\zeta_2}{\zeta_1^2 + \zeta_2^2}\,(\delta_2 - \delta_3),
\end{gathered} \tag{24}$$

где $\mathbf{y} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_1', \Omega_2', \omega_1, \omega_2, \alpha, \beta)$; D — квадратная матрица с постоянными коэффициентами d_{ij}, которые имеют вид

$$d_{11} = -\sigma_1^*, \quad d_{12} = \omega_0(1 + \varepsilon_2), \quad d_{13} = d_{14} = 0, \quad d_{15} = -d_{11}, \quad d_{16} = -d_{12},$$

$$d_{17} = d_{18} = 0,$$

$$d_{21} = -\omega_0(1 - \varepsilon_1), \quad d_{22} = -\sigma_2^*, \quad d_{23} = d_{24} = 0, \quad d_{25} = -d_{21}, \quad d_{26} = -d_{22},$$

$$d_{27} = d_{28} = 0,$$

$$d_{31} = d_{32} = 0, \quad d_{33} = -\sigma_1^o, \quad d_{34} = \omega_0(1 + \varepsilon_2), \quad d_{35} = -d_{33}, \quad d_{36} = -d_{34},$$

$$d_{37} = -\frac{GQ_v(\zeta_3^2 - \zeta_2^2)^2}{2k_v\zeta_3^3\zeta_2^3}, \quad d_{38} = 0,$$

$$d_{41} = d_{42} = 0, \quad d_{43} = -\omega_0(1 - \varepsilon_1), \quad d_{44} = -\sigma_2^o, \quad d_{45} = -d_{43}, \quad d_{46} = -d_{44},$$

$$d_{47} = 0, \quad d_{48} = -\frac{GQ_v(\zeta_1^2 - \zeta_3^2)^2}{2k_v\zeta_1^3\zeta_3^3},$$

$$d_{51} = \tilde{\sigma}_1^*, \quad d_{52} = \omega_0 k_c(b_1 - q_1), \quad d_{53} = \tilde{\sigma}_1^o, \quad d_{54} = \omega_0 k_v(b_1 - q_1),$$

$$d_{55} = -(\tilde{\sigma}_1^* + \tilde{\sigma}_1^o), \quad d_{56} = \omega_0[a_1 + p_1(k_c + k_v)], \quad d_{57} = \frac{2GQ_v\zeta_1\varepsilon_1^2(\zeta_3^2 + \zeta_2^2)}{A_1^*}, \quad d_{58} = 0,$$

$$d_{61} = \omega_0[a_2 - q_2(k_c + k_v)], \quad d_{62} = \tilde{\sigma}_2^*, \quad d_{63} = \omega_0 k_v(b_2 + p_2), \quad d_{64} = \tilde{\sigma}_2^o,$$

$$d_{65}=\omega_0[a_2-q_2(k_c+k_v)]\,,\quad d_{66}=-(\tilde{\sigma}_2^*+\tilde{\sigma}_2^o)\,,\quad d_{67}=0\,,\quad d_{68}=\frac{2GQ_v\zeta_2\varepsilon_2^2(\zeta_1^2+\zeta_3^2)}{A_2^*}\,,$$

$$d_{71}=d_{72}=0\,,\quad d_{73}=\frac{2\zeta_2\zeta_3}{\zeta_2^2+\zeta_3^2},\quad d_{74}=0\,,\quad d_{75}=-d_{73}\,,\quad d_{76}=d_{77}=d_{78}=0\,,$$

$$d_{81}=d_{82}=d_{83}=0\,,\quad d_{84}=\frac{2\zeta_3\zeta_1}{\zeta_3^2+\zeta_1^2},\quad d_{85}=0\,,\quad d_{86}=-d_{84},\quad d_{87}=d_{88}=0.$$

Системы линейных дифференциальных уравнений (23) и (24) решаются независимо друг от друга. Введем безразмерное время $\tau=t/T$ и запишем систему (23) в виде

$$\frac{d\mathbf{y}'}{d\tau}=D'\mathbf{y}',\tag{25}$$

где $\mathbf{y}'=(y_1',y_2',...,y_8')$; $\quad y_i'=\Omega_i T,\quad y_{2+i}'=\Omega_i' T,\quad y_{4+i}'=\omega_i T\,,\quad i=1,2,\quad y_7'=\alpha,\quad y_8'=\beta.$ Элементы матрицы D' получаются из элементов матрицы D по формулам

$$d_{ij}'=d_{ij}T,\;\; i,j=\overline{1,6};\quad d_{ij}'=d_{ij}T^2,\;\; i=\overline{1,6},\;\; j=7,8;\quad d_{ij}'=d_{ij},\;\; i=7,8,\;\; j=\overline{1,8}.$$

Общее решение системы (25) имеет вид

$$\mathbf{y}'=\sum_{j=1}^{8}h_j\mathbf{l}_je^{\lambda_j\tau}\,,\tag{26}$$

где λ_j — собственные значения матрицы D'; $\mathbf{l}_j$ — собственные векторы матрицы D', соответствующие собственным значениям λ_j; h_j — произвольные постоянные.

Используя численные методы, вычислим собственные значения $\lambda_j,\;\; j=\overline{1,8}$ для

$$\begin{gathered}T=24\cdot60^2\,\text{с}\,,\quad \omega_0=2\pi/T,\quad \rho=5518\,\text{кг/м}^3,\quad \eta=0,5\,,\quad E=2,498\cdot10^{11}\,\text{н/м}^2,\\ C_1^o=C_2^o=6378160\,\text{м},\quad C_3^o=6356777\,\text{м},\quad \delta C=500\,\text{м},\quad r_c=3500000\,\text{м},\\ C_1=C_1^o+\delta C;\quad C_2=C_2^o-\delta C,\quad C_3=\frac{C_1^oC_2^oC_3^o}{C_1C_2}\,,\\ \mu_*=10^{11}\,\text{м}^5/(\text{кг}\cdot\text{с}),\quad \mu_0=10^{11}\,\text{м}^5/(\text{кг}\cdot\text{с}),\quad A_i^o=0,\quad i=1,2,3.\end{gathered}\tag{27}$$

Выбранные значения параметров (27) соответствуют угловой скорости, размерам и массовым характеристикам планеты Земля. Величина вязкости μ_* имеет порядок, указанный в работе [1].

Для указанных значений параметров с помощью пакета MATLAB были найдены следующие собственные значения матрицы D':

$$\begin{gathered}\lambda_{1,2}=-0,078508011432\pm190,285662501380\,i,\\ \lambda_{3,4}=-0,075968052681\pm183,817412981613\,i,\\ \lambda_{5,6}=-0,000005884611\pm6,305019999887\,i,\\ \lambda_{7,8}=-0,000000000715\pm0,014711935041\,i.\end{gathered}\tag{28}$$

Из равенств (28) следует, что первые две пары слагаемых в решении (26) описывают быстро затухающие высокочастотные колебания с периодами

$$T_1 = 2\pi/\mathrm{Im}\,\lambda_1 = 0,0330 \text{ суток}, \quad T_2 = 2\pi/\mathrm{Im}\,\lambda_3 = 0,03418 \text{ суток}.$$

Пятое и шестое слагаемые в решении (26) описывают колебания с периодом

$$T_3 = 2\pi/\mathrm{Im}\,\lambda_5 = 0,9965 \text{ суток},$$

которые являются околосуточными колебаниями. В теории движения полюсов Земли околосуточные колебания, обусловленные наличием жидкого ядра, впервые были предсказаны в работе Ф.А.Слудского [10, с. 302].

Два последних слагаемых в решении (26) описывают колебания с периодом

$$T_4 = 2\pi/\mathrm{Im}\,\lambda_7 = 427,3877 \text{ суток},$$

который совпадает с периодом Чендлера.

Таким образом, добавление в модель [6] эллипсоидальной полости с несжимаемой ньютоновской жидкостью привело к возникновению дополнительного колебания в движении системы, а именно — околосуточного колебания. Остальные колебания (два высокочастотных и одно с периодом Чендлера) имеют такой же характер, как и колебания у модели из работы [6].

Полученная уточненная модель может быть использована при решении различных вопросов, связанных с вращением Земли и планет.

1. *Бражкин В.В.* Универсальный рост вязкости металлических расплавов в мегабарном диапазоне давлений:стеклообразное состояние внутреннего ядра Земли // Успехи физ. наук. – 2000.– **170**, № 5. – С. 535–551.
2. *Судаков С.Н.* Движение тела с жидкостью переменной вязкости в поле неповижного притягивающего центра // Механика твердого тела. – 2001. – Вып. 31. – С. 111–118.
3. *Судаков С.Н.* Об уравнениях движения твердого тела с эллипсоидальной полостью, целиком заполненной жидкостью переменной вязкости // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2000. – **5**.- - С. 141–144.
4. *Klein F., Sommerfeld A.* Über die Theorie des Kreisels. – New York: Johnson Reprint Corporation, 1965. – 966 с.
5. *Жуковский Н.Е.* Геометрическая интерпретация теории движения полюсов вращения Земли по ее поверхности // Собр. соч.– М. – Л.: Гостехиздат, 1948. – Т.1. – С. 419–440.
6. *Судаков С.Н.* Модельная задача о движении вокруг центра масс абсолютно твердой эллипсоидальной оболочки с вязко-упругим заполнением // Механика твердого тела. – 2003. – Вып. 33.– С. 119–126.
7. *Фрейденталь А., Гейрингер Х.* Математические теории неупругой сплошной среды.–М.: Физматгиз, 1962.– 432 с.
8. *Судаков С.Н.* Канонические уравнения движения твердого тела с вихревым заполнением // Механика твердого тела. – 1979. – Вып. 11.– С. 67 – 71.
9. *Новожилов В.В.* Теория упругости.– М.: Судпромгиз, 1958.– 372с.
10. *Куликов К.А.* Изменяемость широт и долгот.– М.: Физматгиз, 1962.– 400 с.

Ин-т прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк
techmech@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 01.11.03