ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2004. Вып. 34

УДК 531.36:531.38

©2004. **Ю.Н. Кононов, Т.В. Хомяк**

ОБ ЭФФЕКТЕ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕУСТОЙЧИВОГО ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЖИДКОСТЬЮ ВРАЩАЮЩИМСЯ ТВЕРДЫМ ТЕЛОМ

В рамках необходимых условий устойчивости показана возможность стабилизации неустойчивого вращения несвободного и свободного твердого тела с жидкостью вторым вращающимся твердым телом. Проведены численные исследования влияния основных параметров второго твердого тела на эффект стабилизации.

В известной работе С.Л. Соболева [1] установлено, что волчок Лагранжа с полостью, содержащей идеальную жидкость ведет себя довольно неустойчиво. Так, например, волчок с эллиптической полостью по мере уменьшения своей угловой скорости либо сразу окончательно выйдет из устойчивого состояния, либо только один раз перед этим пройдет состояние неустойчивости, вернувшись вслед за этим к спокойному движению. Волчок же с цилиндрической полостью будет вести себя беспокойно. По мере уменьшения угловой скорости он не один раз будет терять устойчивость и вновь ее восстанавливать.

В работах [2, 3] показана возможность стабилизации неустойчивого вращения волчка Лагранжа с цилиндрической полостью при помощи поперечных и цилиндрических перегородок. Однако на практике это не всегда конструктивно может быть выполнено. Другая возможность стабилизации неустойчивого вращения тела с жидкостью состоит во введении второго вращающегося твердого тела, связанного с первым общей точкой и упругим восстанавливающим моментом. Эффект стабилизации неуравновешенного гироскопа Лагранжа вторым вращающимся был обнаружен А. Я. Савченко [4].

В работе А. М. Ковалева [5] показана возможность стабилизации неуравновешенного гироскопа с помощью вращающегося маховика. В дальнейшем эффект стабилизации был подробно исследован в работах учеников А.Я. Савченко [6–9].

1. Стабилизация неустойчивого вращения несвободного твердого тела, содержащего жидкость.

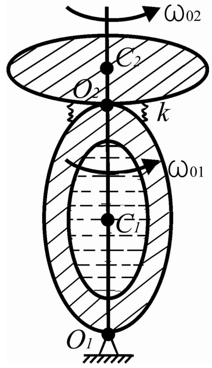

Рис. 1.

Рассмотрим вращение вокруг неподвижной точки O_1 волчка Лагранжа, имеющего полость, целиком заполненную идеальной однородной несжимаемой жидкостью. Пусть рассматриваемый волчок (тело S_1) имеет общую точку O_2 со вторым вращающимся твердым телом S_2^0. Тело S_1 состоит из твердого тела S_1^0 и идеальной жидкости, целиком заполняющей осесимметричную полость внутри этого твердого тела (рис.1).

Твердые тела S_1^0 и S_2^0 связаны в точке O_2 сферическим шарниром с упругим восстанавливающим моментом с коэффициентом упругости k ($k > 0$). Поставим задачу о возможности стабилизации неустойчивого вращения тела S_1 с помощью вращения тела S_2^0.

Пусть в невозмущенном движении первое твердое тело S_1^0 и жидкость вращаются как одно целое с угловой скоростью ω_{01} вокруг оси геометрической и динамической симметрии O_1O_2, а второе твердое тело S_2^0 – с угловой скоростью ω_{02} вокруг оси O_2C_2. В невозмущенном движении общая точка O_2 лежит на прямой O_1C_2, где C_1 и C_2 – соответственно центры масс тел S_1 и S_2^0.

Рассматриваемая нами механическая система является частным случаем системы связанных твердых тел с полостями, содержащими жидкость, исследованной в работах [10, 11]. Следовательно, характеристическое уравнение возмущенного движения имеет вид

$$\begin{vmatrix} F_1 & \mu + k/\lambda^2 \\ \mu + k/\lambda^2 & F_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{1}$$

Здесь

$$F_1 = A_1' + \frac{C_1'}{\lambda} + \frac{a_1^* g - k}{\lambda^2} - (\lambda + \omega_{01}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{\lambda + \lambda_n'}, \quad F_2 = A_2 + \frac{C_2'}{\lambda} + \frac{a_2^* g - k}{\lambda^2},$$

$$A_1' = A_1 + m_2 s_1^2, \quad \mu = s_1 a_2^*, \quad \lambda_n' = \widetilde{\lambda}_n \omega_{0i}, \quad \widetilde{\lambda}_n = 1 - \lambda_n/\omega_{01},$$
$$a_1^* = m_1 c_1 + s_1 m_2, \quad a_2^* = m_2 c_2, \quad s_1 = O_1O_2, \quad c_i = O_iC_i, \quad C_i' = C_i \omega_{0i} \quad i = (1, 2);$$

m_1 и m_2 – соответственно масса тела S_1 и твердого тела S_2^0; A_i и C_i – соответственно экваториальный и осевой моменты инерции тел S_1 и S_2^0 относительно точки O_i $(i = 1, 2)$.

Коэффициент инерционной связи E_n и собственные числа λ_n находятся из решения соответствующей краевой задачи и определяются только геометрией полости. Значение этих величин для эллипсоидальной и цилиндрической полостей приведены в [12].

Необходимым условием стабилизации является условие действительности корней характеристического уравнения (1).

Уравнение (1) в случае отсутствия относительного движения жидкости ($E_n \equiv 0$, "замерзшая"жидкость) совпадает с уравнением, полученным и исследованным в работах [7–9].

При $k = \infty$ (цилиндрический шарнир) уравнение (1) сводится к уравнению

$$\widetilde{F}_1 + \widetilde{F}_2 + 2\mu = 0, \tag{2}$$

где

$$\widetilde{F}_1 = A_1' + \frac{C_1'}{\lambda} + \frac{a_1^* g}{\lambda^2} - (\lambda + \omega_{01}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{\lambda + \lambda_n'}, \quad \widetilde{F}_2 = A_2 + \frac{C_2'}{\lambda} + \frac{a_2^* g}{\lambda^2}.$$

Если отсутствует упругий восстанавливающий момент ($k = 0$) и центр масс второго твердого тела S_2^0 совпадает с общей точкой O_2 ($c_2 = 0$, $\mu = 0$), то характеристическое уравнение (1) распадается на два независимых уравнения, и в этом случае отсутствует возможность стабилизации неустойчивого вращения твердого тела с жидкостью вторым вращающимся твердым телом.

Как известно [12], в большинстве практически важных случаев в уравнении (1) достаточно учитывать только основной тон колебания жидкости ($n = 1$). Это всегда справедливо для эллипсоидальной и софокусно эллипсоидальных полостей, так как из бесконечного спектра собственных частот λ_n возбуждается гармоника, соответствующая единственному значению λ_1 [12].

Если учитывать в уравнении (1) только первую гармонику ($n = 1$), то это уравнение запишется в виде полинома пятой степени

$$a_0\lambda^5 + a_1\lambda^4 + a_2\lambda^3 + a_3\lambda^2 + a_4\lambda + a_5 = 0, \tag{3}$$

где

$$
\begin{aligned}
&a_0 = A_1^* A_2 - \mu^2 > 0, \quad a_1 = (A_1' A_2 - \mu^2)\lambda_1' + A_2 C_1^* + A_1^* \omega_0,\\
&a_2 = A_2 C_1' \lambda_1' + g(A_1^* a_2^* + A_2 a_1^*) - (A_1^* + A_2 + 2\mu)k + (A_1'\lambda_1' + C_1^*)\omega_0,\\
&a_3 = [g(A_1' a_2^* + A_2 a_1^*) - (A_1' + A_2 + 2\mu)k]\lambda_1' - C_1^* k + g(a_2^* C_1^* + a_1^* \omega_0) +\\
&\quad + (C_1'\lambda_1' - k)\omega_0,\\
&a_4 = (a_2^* g - k)C_1'\lambda_1' + [a_1^* a_2^* g - k(a_1^* + a_2^*)]g + (a_1^* g - k)\lambda_1' \omega_0,\\
&a_5 = g[a_1^* a_2^* g - k(a_1^* + a_2^*)]\lambda_1',\\
&A_1^* = A_1' - E_1, \quad C_1^* = C_1' - E_1', \quad C_1' = C_1 \omega_{01}, \quad E_1' = E_1 \omega_{01}, \quad \omega_0 = C_2 \omega_{02}.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Условия действительности корней уравнения пятой степени имеют вид [13]

$$
\begin{aligned}
&d_1 = M_2^2 - M_1 M_3 > 0,\\
&d_2 = 4 d_1 d_{10} - 9 d_{11}^2 > 0,\\
&d_3 = d_2 h_2 - 2 h_1^2 > 0,\\
&d_4 = d_3(4 h_1 h_3 - h_2 h_4) - 2(2 d_2 h_3 - h_1 h_4)^2 > 0.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
&M_1 = a_0 > 0, \quad 5M_2 = a_1, \quad 10M_3 = a_2, \quad 10M_4 = a_3, \quad 5M_5 = a_4, \quad M_6 = a_5;\\
&d_{10} = 6M_3^2 - 5M_2M_4 - M_1M_5, \quad d_{11} = M_2M_3 - M_1M_4, \quad h_1 = d_1(16\widetilde{h}_1 - 15h_{25}) - 6h_{23}h_{24},\\
&h_2 = 8d_1h_{35} + 48h_{23}\widetilde{h}_2 - 8h_{24}d_{10}, \quad h_3 = 6h_{35}h_{23} - h_{25}d_{10}, \quad h_4 = 8d_1h_{35} - 3h_{23}h_{25},\\
&\widetilde{h}_1 = M_3M_4 - M_1M_6, \quad \widetilde{h}_2 = M_3M_4 - M_2M_5, \quad h_{23} = M_2M_3 - M_1M_4,\\
&h_{24} = M_2M_4 - M_1M_5, \quad h_{25} = M_2M_5 - M_1M_6, \quad h_{35} = M_3M_5 - M_2M_6.
\end{aligned}
$$

После несложных преобразований можно показать, что система неравенств (5) эквивалентна неравенствам

$$
\widetilde{d}_i > 0, \tag{6}
$$

где

$$
\widetilde{d}_1 = d_1, \quad \widetilde{d}_2 = d_2, \quad \widetilde{d}_3 = d_3/(2d_1), \quad \widetilde{d}_4 = d_4/(2d_1^2 d_2),
$$

$\widetilde{d}_3$ и $\widetilde{d}_4$ – однородные многочлены соответственно 6 и 8 степени относительно a_i $(i = \overline{0,5})$.

Стабилизировать вращение твердого тела с жидкостью можно следующими параметрами: ω_0, k, A_2, m_2, c_2.

Исследуем влияние основного параметра ω_0 на возможность стабилизации. Для этого представим

$$
a_1 = 5(\widetilde{a}_1\omega_0 + b_1), \quad a_2 = 10(\widetilde{a}_2\omega_0 + b_2), \quad a_3 = 10(\widetilde{a}_3\omega_0 + b_3), \quad a_4 = 5(\widetilde{a}_4\omega_0 + b_4). \tag{7}
$$

Подставив соотношения (7) в неравенства (6), получим

$$
\begin{cases}
d_{12}\omega_0^2 + d_{11}\omega_0 + d_{10} > 0,\\
d_{24}\omega_0^4 + d_{23}\omega_0^3 + \cdots + d_{21}\omega_0 + d_{20} > 0,\\
d_{36}\omega_0^6 + d_{35}\omega_0^5 + \cdots + d_{31}\omega_0 + d_{30} > 0,\\
d_{48}\omega_0^8 + d_{47}\omega_0^7 + \cdots + d_{41}\omega_0 + d_{40} > 0,
\end{cases}
\tag{8}
$$

где

$$d_{12} = \widetilde{a}_1^2 > 0, \quad d_{24} = 5\widetilde{a}_1^2(3\widetilde{a}_2^2 - 4\widetilde{a}_1\widetilde{a}_3),$$
$$d_{36} = 28\widetilde{a}_1\widetilde{a}_2\widetilde{a}_3\widetilde{a}_4 - 9\widetilde{a}_1^2\widetilde{a}_4^2 - 16\widetilde{a}_1\widetilde{a}_3^3 - 12\widetilde{a}_2^3\widetilde{a}_4 + 8\widetilde{a}_3^2\widetilde{a}_2^2,$$
$$d_{48} = 72\widetilde{a}_1\widetilde{a}_2\widetilde{a}_3\widetilde{a}_4 - 27\widetilde{a}_1^2\widetilde{a}_4 - 32\widetilde{a}_1\widetilde{a}_3^3 - 32\widetilde{a}_2^3\widetilde{a}_4 + 16\widetilde{a}_3^2\widetilde{a}_2^2,$$
$$\widetilde{a}_1 = A_1^* > 0, \quad 10\widetilde{a}_2 = A_1'\lambda_1' + C_1^* > 0, \quad 10\widetilde{a}_3 = a_1^* g - k, \quad 5\widetilde{a}_4 = (a_1^* g - k)\lambda_1'.$$

При $k > g a_1^*$ будем иметь $\widetilde{a}_3 < 0$, $\widetilde{a}_4 < 0$ и $d_{24} > 0$. Коэффициенты d_{36} и d_{48} являются кубическими многочленами относительно параметра k с положительными коэффициентами при старших степенях. Таким образом, при достаточно большом упругом восстанавливающем моменте $d_{24} > 0$, $d_{36} > 0$ и $d_{48} > 0$ и существует такое значение ω_0, при котором неравенства (8) будут выполнены. Следовательно, при достаточно больших ω_0 и k возможна стабилизация неустойчивого вращения твердого тела с жидкостью.

Рассмотрим теперь влияние упругого восстанавливающего момента на возможность стабилизации неустойчивого вращения твердого тела с жидкостью. Для этого представим

$$a_2 = 10(\widetilde{a}_2 k + b_2), \quad a_3 = 10(\widetilde{a}_3 k + b_3), \quad a_4 = 5(\widetilde{a}_4 k + b_4), \quad a_5 = \widetilde{a}_5 k + b_5. \tag{9}$$

Подставив (9) в неравенства (6), получим

$$\begin{cases} d_{11}k + d_{10} > 0, \\ d_{23}k^3 + d_{22}k^2 + d_{21}k + d_{20} > 0, \\ d_{35}k^5 + d_{34}k^4 + \cdots + d_{31}k + d_{30} > 0, \\ d_{47}k^7 + d_{46}k^6 \cdots + d_{41}k + d_{40} > 0. \end{cases} \tag{10}$$

Здесь

$$\begin{gathered} d_{11} = -a_0\widetilde{a}_2, \quad d_{23} = -24a_0\widetilde{a}_2^3, \quad d_{35} = 160a_0\widetilde{a}_2^3(3\widetilde{a}_2\widetilde{a}_4 - 2\widetilde{a}_3^2), \\ d_{47} = 128a_0\widetilde{a}_2^3(40\widetilde{a}_3^3\widetilde{a}_5 - 25\widetilde{a}_3^2\widetilde{a}_4^2 + 27\widetilde{a}_2^2\widetilde{a}_5^2 + 50\widetilde{a}_2\widetilde{a}_4^3 - 90\widetilde{a}_2\widetilde{a}_3\widetilde{a}_4\widetilde{a}_5), \\ 10\widetilde{a}_2 = -(A_1^* + A_2 + 2\mu) < 0, \quad 10\widetilde{a}_3 = -[(A_1' + A_2 + 2\mu)\lambda_1' + C_1^* + \omega_0] < 0, \\ 5\widetilde{a}_4 = -[(C_1' + \omega_0)\lambda_1' + (a_1^* + a_2^*)g] < 0, \quad \widetilde{a}_5 = -(a_1^* + a_2^*)g\lambda_1' < 0. \end{gathered} \tag{11}$$

Из соотношений (11) следует, что $d_{11} > 0$, $d_{23} > 0$, а коэффициенты d_{35} и d_{47} являются полиномами соответственно 2-ой и 4-ой степени относительно ω_0 с положительными коэффициентами при старших степенях. При достаточно больших ω_0 и k неравенства (10) будут выполнены и, как ранее отмечалось, будет возможна стабилизация неустойчивого вращения твердого тела с жидкостью.

В случае цилиндрического шарнира ($k = \infty$) система неравенств (10) эквивалентна неравенству

$$d_4\omega_0^4 + d_3\omega_0^3 + d_2\omega_0^2 + d_1\omega_0 + d_0 > 0, \tag{12}$$

где

$$d_4 = 3\widetilde{a}_2^2 > 0.$$

Таким образом, при достаточно большом упругом восстанавливающем моменте и большой угловой скорости вращения второго твердого тела возможна стабилизация неустойчивого вращения несвободного твердого тела с жидкостью.

2. Стабилизация неустойчивого вращения свободного твердого тела, содержащего жидкость. Рассмотрим свободное движение (движение по инерции) вращающего гироскопа Лагранжа с идеальной жидкостью. Пусть точка O_1 будет не закрепленная, т. е. свободная. Вновь поставим задачу о возможности стабилизации неустойчивого вращения свободного гироскопа Лагранжа с жидкостью вторым вращающимся твердым телом.

Характеристическое уравнение возмущенного движения будет иметь вид (1), где

$$
\begin{gathered}
F_1 = A_1' + \frac{C_1'}{\lambda} - \frac{k}{\lambda^2} - (\lambda + \omega_{01}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{\lambda + \lambda_n'}, \quad F_2 = A_2' + \frac{C_2'}{\lambda} - \frac{k}{\lambda^2}, \\
A_i' = A_i + \nu c_i^2, \quad \nu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \mu = \nu c_1 c_2, \quad c_1 = C_1 O_2, \quad c_2 = C_2 O_2, \quad i = (1,2),
\end{gathered} \tag{13}
$$

A_i и C_i – соответственно главный экваториальный и осевой момент инерции тел S_1 и S_2^0 относительно их центра масс.

Если отсутствует упругий восстанавливающий момент ($k = 0$) и центр масс второго тела S_2^0 совпадает с общей точкой O_2 ($c_2 = 0$, $\mu = 0$), то отсутствует возможность стабилизации.

При $n = 1$ (учет основного тона колебания жидкости) уравнение (1) представляется в виде полинома четвертой степени

$$
a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0, \tag{14}
$$

коэффициенты которого определяются по формулам (4), в которых следует положить $a_1^* = a_2^* = 0$ и вычислять A_i' согласно (13).

Условия действительности корней уравнения четвертой степени имеют вид [7]

$$
\begin{aligned}
& d_1 = N_2^2 - N_1 N_3 > 0, \\
& d_2 = 12 d_1^2 - N_1^2(N_1 N_5 - 4N_2 N_4 + 3N_3^2) > 0, \\
& d_3 = (N_1 N_5 - 4N_2 N_4 + 3N_3^2)^3 - 27(N_1 N_3 N_5 + 2N_2 N_3 N_4 - N_1 N_4^2 - \\
& - N_2^2 N_5 - N_3^3)^2 > 0.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
& N_1 = a_0, \quad 4N_2 = a_1 = 4(\widetilde{a}_1\omega_0 + b_1), \quad 6N_3 = a_2 = 6(\widetilde{a}_2\omega_0 + b_2), \\
& 4N_4 = a_3 = 4(\widetilde{a}_3\omega_0 + b_3), \quad N_5 = a_4 = \widetilde{a}_4\omega_0 + b_4.
\end{aligned} \tag{16}
$$

С учетом соотношений (16) неравенства (15) запишутся в виде

$$
\begin{cases}
d_{12}\omega_0^2 + d_{11}\omega_0 + d_{10} > 0, \\
d_{24}\omega_0^4 + d_{23}\omega_0^3 + \cdots + d_{21}\omega_0 + d_{20} > 0, \\
d_{36}\omega_0^6 + d_{35}\omega_0^5 + \cdots + d_{31}\omega_0 + d_{30} > 0.
\end{cases} \tag{17}
$$

где

$$
\begin{aligned}
& d_{12} = \widetilde{a}_1^2 > 0, \quad d_{24} = 12\widetilde{a}_1^4 > 0, \\
& d_{36} = \widetilde{d}_{21}^3 - 27\widetilde{d}_{30}^2 = \widetilde{a}_1^2[54(2\widetilde{a}_1\widetilde{a}_3 - \widetilde{a}_2^2)\widetilde{a}_2\widetilde{a}_4 + 4\widetilde{a}_3^2(9\widetilde{a}_2^2 - 16\widetilde{a}_1\widetilde{a}_3) - 27\widetilde{a}_1^2\widetilde{a}_4^2], \\
& \widetilde{d}_{21} = 3\widetilde{a}_2^2 - 4\widetilde{a}_1\widetilde{a}_3, \quad \widetilde{d}_{30} = 2\widetilde{a}_1\widetilde{a}_2\widetilde{a}_3 - \widetilde{a}_1^2\widetilde{a}_4 - \widetilde{a}_2^3, \quad \widetilde{a}_1 = A_1^*/4 > 0, \\
& \widetilde{a}_2 = (A_1'\lambda_1' + \widetilde{C}_1^*)/6 > 0, \quad \widetilde{a}_3 = -(k - C_1'\lambda_1')/4, \quad \widetilde{a}_4 = -k\lambda_1'.
\end{aligned}
$$

Так как $d_{12} > 0$, $d_{24} > 0$, а коэффициент d_{36} является кубическим многочленом относительно параметра k с положительным коэффициентом при старшей степени и при достаточно большом k будет положительным. Следовательно, при достаточно больших k и ω_0 возможна стабилизация неустойчивого вращения свободного твердого тела, содержащего жидкость.

Рассмотрим теперь влияние упругого восстанавливающего момента на стабилизацию неустойчивого свободного вращения твердого тела с жидкостью. Для этого положим

$$a_2 = 6N_3 = 6(\widetilde{a}_2 k + b_2), \quad a_3 = 4N_4 = 4(\widetilde{a}_3 k + b_3), \quad a_4 = N_5 = \widetilde{a}_4 k + b_4. \tag{18}$$

Подставив соотношения (18) в неравенства (15), получим

$$\begin{cases} d_1 = d_{11}k + d_{10} > 0, \\ d_2 = d_{22}k^2 + d_{21}k + d_{20} > 0, \\ d_3 = d_{35}k^5 + d_{34}k^4 + \cdots + d_{31}k + d_{30} > 0. \end{cases} \tag{19}$$

где

$$\begin{gathered} d_{11} = -a_0\widetilde{a}_2 > 0, \quad d_{22} = 9a_0^2\widetilde{a}_2^2 > 0, \quad 6\widetilde{a}_2 = -(A_1^* + A_2' + 2\mu) < 0, \\ d_{35} = 27a_0\widetilde{a}_2^3(3\widetilde{a}_2\widetilde{a}_4 - 2\widetilde{a}_3^2) = d_{32}^*\omega_0^2 + d_{31}^*\omega_0 + d_{30}^*, \quad d_{32}^* = -3a_0\widetilde{a}_2^3/2 > 0, \\ 4\widetilde{a}_3 = -[(A_1' + A_2' + 2\mu)\lambda_1' + \widetilde{C}_1^* + \omega_0] < 0, \quad \widetilde{a}_4 = -(C_1' + \omega_0)\lambda_1' < 0. \end{gathered}$$

Так как $d_{11} > 0$, $d_{22} > 0$ и $d_{32}^* > 0$, то при достаточно больших ω_0 и k неравенства (19) будут выполнены.

При $k = \infty$ (цилиндрический шарнир) из системы неравенств (19) следует условие действительности корней $d_{35} > 0$ или

$$[(A_1' + A_2' + 2\mu)\lambda_1' + \widetilde{C}_1^* + \omega_0]^2 > 4(A_1^* + A_2' + 2\mu)(C_1' + \omega_0)\lambda_1'. \tag{20}$$

Следует отметить, что условие устойчивости, полученное из (19) совпадает с условием устойчивости, полученным из уравнения (2) для свободной системы ($a_1^* = a_2^* = 0$) при $n = 1$.

В заключение рассмотрим второй предельный случай – отсутствия упругого восстанавливающего момента ($k = 0$). В отличии от несвободной системы характеристическое уравнение (14) существенно упрощается и вырождается в кубическое уравнение ($a_4 = 0$). Условие действительности корней которого имеют вид

$$d_4\omega_0^4 + d_3\omega_0^3 + d_2\omega_0^2 + d_1\omega_0 + d_0 > 0. \tag{21}$$

Здесь

$$\begin{gathered} d_4 = 4\widetilde{d}_{40}\widetilde{a}_1^2 - \widetilde{a}_1^2\widetilde{a}_2^2 = \widetilde{a}_1^2(3\widetilde{a}_2^2 - 4\widetilde{a}_1\widetilde{a}_3), \quad \widetilde{d}_{40} = \widetilde{a}_2^2 - \widetilde{a}_1\widetilde{a}_3, \\ a_1 = 3(\widetilde{a}_1\omega_0 + b_1), \quad a_2 = 3(\widetilde{a}_2\omega_0 + b_2), \quad a_3 = \widetilde{a}_3\omega_0, \\ 3\widetilde{a}_1 = A_1^*, \quad 3\widetilde{a}_2 = A_1'\lambda_1' + \widetilde{C}_1^*, \quad \widetilde{a}_3 = C_1'\lambda_1'. \end{gathered}$$

Таким образом, при отсутствии упругого момента стабилизация неустойчивого вращения свободного твердого тела с жидкостью определяется условием (21), а возможность стабилизации условием

$$3\widetilde{a}_2 - 4\widetilde{a}_1\widetilde{a}_3 > 0$$

или

$$(C_1^* + A_1'\lambda_1)^2 > 4A_1^*C_1\lambda_1. \tag{22}$$

Известно, что в случае пренебрежимо малой массы эллисоидальной оболочки свободное равномерное вращение этой оболочки, содержащей идеальную жидкость, неустойчиво при $1 < \beta < 3$ ($\beta = c/a$, a и c – полуоси эллипсоидальной оболочки, причем c – величина полуоси, направленной вдоль оси вращения) [12].

Возможно ли уменьшить этот интервал неустойчивости вращающимся вторым твердым телом? Для этого достаточно выполнения неравенства (22). Проведя необходимые вычисления получим, что при

$$\begin{aligned}
&\widetilde{m}_2 = 0, && 1 < \beta < 3,\\
&\widetilde{m}_2 = 0.01, && 1 < \beta < 2.981,\\
&\widetilde{m}_2 = 0.1, && 1 < \beta < 2.830,\\
&\widetilde{m}_2 = 0.5, && 1 < \beta < 2.400,
\end{aligned} \tag{23}$$

где $\widetilde{m}_2 = 3m_2/(4\pi\rho a^3)$.

Таким образом, показано уменьшение интервала неустойчивости, что говорит о стабилизации неустойчивого вращения твердого тела с жидкостью вращающимся вторым твердым телом. Из соотношений (23) следует, что эффект стабилизации возрастает при увеличении массы второго тела.

Для подтверждения результатов аналитических исследований по формулам (8), (10), (17) и (19) были проведены численные расчеты для эллипсоидальной полости при следующих значениях параметров: $\omega_{02} = 0, 10, 10^2, 10^3$; $k = 0, 1, 10, 10^2, 10^3$; $\omega_{01} = 1 \div 100$; $\beta = 0,02 \div 4$ ($\beta = c/a$); $m_{01} = 0$; $A_{01} = C_{01} = 0$; $c_2 = -0,2 \div 0,2$. Второе вращающееся твердое тело полагалось слегка вогнутым, выпуклым или плоским тонким круговым диском (рис. 2, кривые 1, 2 и 3 соответственно) с моментами инерции A_2 и C_2.

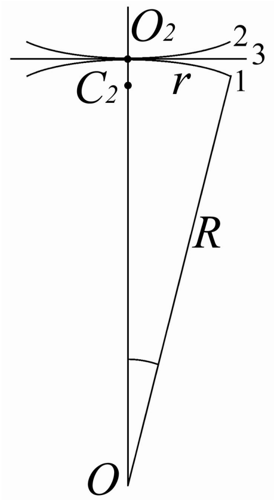

Рис. 2.

Здесь

$$\begin{aligned}
&A_2 = [1 - \cos^4\frac{\theta_0}{2} - \frac{1}{2}f(\theta_0)]m_2R^2,\\
&C_2 = f(\theta_0)m_2R^2,\\
&f(\theta_0) = \frac{\frac{1}{3}\cos^3\theta_0 - \cos\theta_0 + \frac{2}{3}}{1 - \cos\theta_0},\\
&c_2 = O_2C_2 = R\sin^2\frac{\theta_0}{2} \quad (\text{выпуклый диск}),\\
&c_2 = -O_2C_2 = -R\sin^2\frac{\theta_0}{2} \quad (\text{вогнутый диск}),\\
&R\theta_0 = r - \text{радиус кругового диска массы } m_2.\\
&\text{При } \theta_0 \ll 1 \quad A_2 = \frac{m_2r_2}{4}, \quad C_2 = \frac{m_2r^2}{2}, \quad c_2 = \frac{r}{4}\theta_0,
\end{aligned}$$

то есть в первом приближении экваториальный и осевой моменты инерции совпадают с плоским диском ($R = \infty$). В случае плоского кругового диска его центр масс совпадает с точкой O_2, а для слегка выпуклого или выгнутого он незначительно изменяется.

Результаты численных расчетов для несвободной системы представлены на рис. 3-6, а для свободной – на рис. 7–10 ($c_2 = 0$, $m_1 = \mathrm{const}$, $E_1 \neq 0$). Области устойчивости заштрихованы.

$k = 1$, $\omega_{02} = 0$

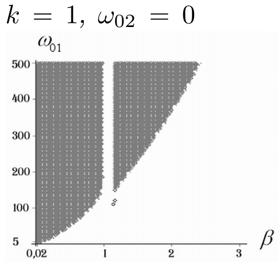

Рис.3.

$k = 100$, $\omega_{02} = 0$

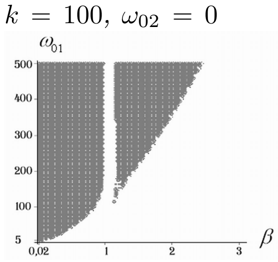

Рис.4.

$k = 100$, $\omega_{02} = 1000$

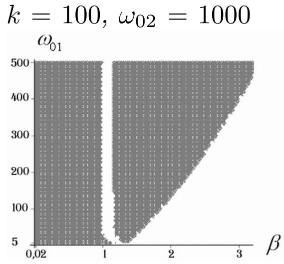

Рис.5.

$k = 1000$, $\omega_{02} = 1000$

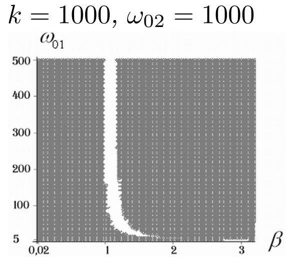

Рис.6.

$k = 1$, $\omega_{02} = 0$

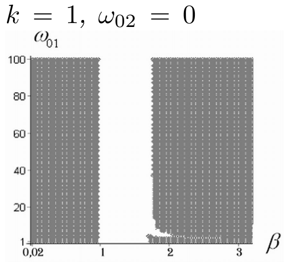

Рис.7.

$k = 1$, $\omega_{02} = 1000$

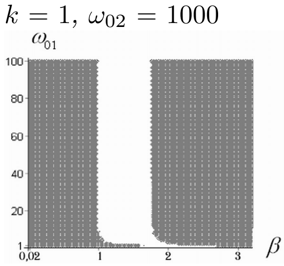

Рис.8.

$k = 100$, $\omega_{02} = 1000$

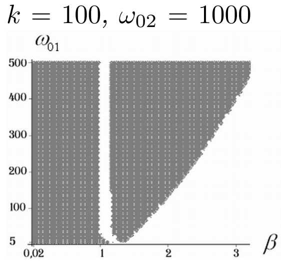

Рис.9.

$k = 1000$, $\omega_{02} = 1000$

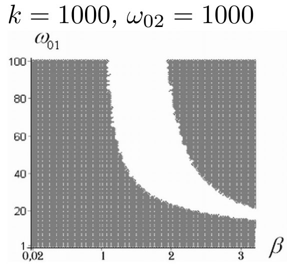

Рис.10.

На основании проведенных аналитических и численных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Неустойчивое вращение твердого тела с жидкостью возможно стабилизировать вторым вращающимся твердым телом.

2. Стабилизация становится невозможной, если отсутствует упругий восстанавливающий момент и центр масс второго твердого тела совпадает с общей точкой двух твердых тел.

3. С увеличением упругого восстанавливающего момента область неустойчивости уменьшается с образованием небольшой дополнительной области неустойчивости, которая исчезает при дальнейшем увеличении угловой скорости вращения второго твердого тела.

4. При больших угловых скоростях вращения второго твердого тела ($\omega_{02} > 100$) и большом упругом восстанавливающем моменте ($k > 100$) наблюдается эффект, аналогичный действию восстанавливающего момента на рассматриваемую систему связанных твердых тел с жидкостью.

5. Для уравновешенного второго твердого тела ($c_2 < 0$) эффект стабилизации возрастает по сравнению с неуравновешенным вторым твердым телом ($c_2 \geqslant 0$).

1. *Соболев С. Л.* О движении симметричного волчка с полостью, наполненной жидкостью // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1960. – № 3. – С 20–25.

2. *Кононов Ю. Н.* О влиянии перегородок в цилиндрической полости на устойчивость равномерного вращения волчка Лагранжа // Мат. физика и нелин. механика. – 1992. – Вып. 7 (51). – С. 33–37.
3. *Кононов Ю. Н., Дрынь С. В.* Об устойчивости вращения волчка Лагранжа с многослойной жидкостью, разделенной цилиндрическими перегородками // Вісн. Донецького ун-та. Сер. А: Природничі науки. – 2001. – № 1 . – С. 34–39.
4. *Савченко А. Я.* Устойчивость стационарных движений механических систем. – Киев: Наук. думка, 1977. – 159 с.
5. *Ковалев А. М.* Устойчивость равномерных вращений тяжелого гиростата вокруг главной оси // Прикл. математика и механика. – 1980. – **44**, вып. 6. – С. 994-998.
6. *Лесина М.Е.* О стабилизации покоящегося уравновешенного гироскопа Лагранжа // Механика твердого тела. – 1979. – Вып. 11. – С. 88–92.
7. *Вархалев Ю.Н., Савченко А.Я., Светличная Н.В.* К вопросу стабилизации покоящегося неуравновешенного гироскопа Лагранжа // Там же. – 1982. – Вып. 14. – С. 105–109.
8. *Светличная Н.В.* Об эффекте стабилизации покоящегося неуравновешенного гироскопа вторым вращающимся // Там же. – 1989. – Вып. 21. – С. 74–76.
9. *Коваленко Н.В., Шепеленко О.В.* Эффект стабилизации в системе гироскопов Лагранжа // Тр. Междунар. конф. "Математика в индустрии". – Таганрог: Таганрог. гос. пед. ин-т, 1998. – С. 84–86.
10. *Кононов Ю. Н.* О движении системы двух твердых тел с полостями, содержащими жидкость // Механика твердого тела. – 1997. – Вып. 29. – С. 76–85.
11. *Кононов Ю. Н.* О движении системы связанных твердых тел с полостями, содержащими жидкость // Там же. – 2000. – Вып. 30. – С. 207–216.
12. *Докучаев Л. В., Рвалов Р. В.* Об устойчивости стационарного вращения твердого тела с полостью, содержащей жидкость // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – № 2. – С. 6–14.
13. *Ручкин К. А.* Устойчивость равномерных вращений и стабилизация движений системы двух твердых тел. – Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Донецк, 1999. – 14 с.
14. *Kononov Yu. N., Khomyak T. V.* Stabilization by rotating rigid bodies for unstable rotation of a rigid body with cavities containing a fluid // ICTAM04: Abstr. and CD-ROM Proc. – Warszawa, Poland: IPPT PAN, 2004. – P. 320.

Донецкий национальный ун-т
Получено 11.06.04