

УДК 531.38, 531.36

©2004. Ю.Б. Коносевиц

ИССЛЕДОВАНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ СИНХРОННОГО ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ

Рассматривается гироскоп в кардановом подвесе, установленный на неподвижном основании в поле силы тяжести и снабженный электродвигателем, приводящим ротор во вращение. Если наружная ось подвеса вертикальна, то уравнения движения этой системы допускают семейство решений, описывающих регулярные прецессии ротора вокруг наружной оси подвеса или равномерные вращения ротора вокруг неподвижной оси.

Исследование устойчивости таких стационарных движений, основанное на линеаризованных уравнениях движения, в случае электродвигателя асинхронного типа приводит к одному неравенству, являющемуся достаточным условием устойчивости. Оно изучено Б.И. Коносевицем. В случае синхронного двигателя достаточными условиями устойчивости стационарных движений являются два неравенства. Одно из них совпадает с упомянутым выше, а второе характерно только для случая синхронного двигателя. В данной работе проанализировано это второе (дополнительное) условие устойчивости.

1. Постановка задачи. Пусть α, β, φ – углы поворота кардановых "рамок" и ротора; $G(\beta), N(\beta), Q(\beta), H, R$ – коэффициенты в выражении кинетической энергии системы; $U(\beta)$ – ее потенциальная энергия. В статье [1] показано, что уравнения движения *обобщенной* модели синхронного гироскопа в кардановом подвесе допускают решения вида

$$\dot{\alpha} = \Omega, \quad \beta = \beta_0, \quad \varphi = \omega t + \gamma_0, \quad (1)$$

если постоянные Ω и β_0 связаны соотношением

$$-\Omega \left[\frac{\Omega}{2} G'(\beta_0) + \omega Q'(\beta_0) \right] + U'(\beta_0) = 0, \quad (2)$$

и для устойчивости такого решения достаточно выполнения двух условий

$$\Omega^2 \left[G'^2(\beta_0) - \frac{1}{2} G(\beta_0) G'''(\beta_0) \right] + \omega \Omega \left[2G'(\beta_0) Q'(\beta_0) - G(\beta_0) Q''(\beta_0) \right] + \omega^2 Q'^2(\beta_0) + G(\beta_0) U''(\beta_0) > 0, \quad (3)$$

$$|G(\beta_0)R - N(\beta_0)Q(\beta_0)| + |\Omega(G'(\beta_0)Q(\beta_0) - G(\beta_0)Q'(\beta_0)) + \omega Q'(\beta_0)Q(\beta_0)| \neq 0. \quad (4)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по β . Условие (3) достаточно для устойчивости решения (1) и в случае асинхронного электродвигателя.

Рассмотрим *обычную* модель гироскопа в кардановом подвесе. В этом случае (см. [2])

$$\begin{aligned} G(\beta) &= C_2 + B_1 + C + (C_1 + A - B_1 - C) \cos^2 \beta, & H &= A_1 + A, & N(\beta) &= 0, \\ Q(\beta) &= C \sin \beta, & R &= 0, & U(\beta) &= mgs \sin \beta. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь C, A – осевой и экваториальный моменты инерции ротора относительно центра подвеса; A_1, B_1, C_1 – моменты инерции внутренней рамки относительно внутренней оси

подвеса, относительно оси ротора и относительно перпендикуляра к плоскости внутренней рамки, проведенного через центр подвеса; C_2 – момент инерции наружной рамки относительно наружной оси подвеса; m – масса ротора; s – расстояние от центра подвеса до центра масс ротора. Угол β есть угол между осью ротора и перпендикуляром к плоскости наружной рамки в ее центре.

Полагая для краткости $I_0 = C_2 + B_1 + C$, $I = C_1 + A - B_1 - C$, рассмотрим нетривиальный случай, когда $I \neq 0$. Следуя [2], введем безразмерные параметры

$$y = 2\Omega I/\omega C, \quad \varepsilon = 4mgsI/\omega^2 C^2, \quad \lambda = I_0/I,$$

характеризующие угловую скорость прецессии Ω , смещение s центра масс ротора и распределение масс в системе. Множество допустимых значений ε , λ определено соотношениями

$$\lambda > 0 \quad (\varepsilon \geq 0), \quad \lambda < -1 \quad (\varepsilon \leq 0). \quad (6)$$

Тогда условие (2) существования стационарного решения (1) принимает вид

$$\cos \beta_0 (y^2 \sin \beta_0 - 2y + \varepsilon) = 0, \quad (7)$$

а условия (3), (4) устойчивости этого решения записываются следующим образом

$$y^2[-2 \cos^4 \beta_0 + (3 + 2\lambda) \cos^2 \beta_0 - \lambda] + 2y \sin \beta_0 (\lambda - 3 \cos^2 \beta_0) + 4 \cos^2 \beta_0 - \varepsilon (\lambda + \cos^2 \beta_0) \sin \beta_0 > 0, \quad (8)$$

$$\cos \beta_0 [(1 + \lambda + \sin^2 \beta_0)y - 2 \sin \beta_0] \neq 0. \quad (9)$$

Из (7) следует, что при фиксированном ε множество стационарных решений изображается на плоскости (β_0, y) вертикальными прямыми $\beta_0 = \pm\pi/2 \pmod{2\pi}$ и двумя кривыми $y = y_1(\beta_0, \varepsilon)$, $y = y_2(\beta_0, \varepsilon)$, где

$$y_1(\beta_0, \varepsilon) = \frac{1 + \sqrt{1 - \varepsilon \sin \beta_0}}{\sin \beta_0}, \quad y_2(\beta_0, \varepsilon) = \frac{1 - \sqrt{1 - \varepsilon \sin \beta_0}}{\sin \beta_0}. \quad (10)$$

Так как все функции в соотношениях (7)-(9) 2π -периодические по β_0 , то достаточно изучить эти соотношения для значений β_0 , принадлежащих какому-либо отрезку длины 2π . При $\varepsilon > 0$ в качестве такого основного отрезка примем $[-3\pi/2; \pi/2]$, а при $\varepsilon \leq 0$ возьмем $[-\pi/2; 3\pi/2]$. Через $[a(\varepsilon); b(\varepsilon)]$ обозначим ту часть основного отрезка, на которой $1 - \varepsilon \sin \beta_0 \geq 0$, то есть определены кривые (10). Тогда при $\varepsilon > 0$ имеем

$$b(\varepsilon) = \begin{cases} \pi/2 \\ \arcsin 1/\varepsilon \end{cases}, \quad a(\varepsilon) = \begin{cases} -3\pi/2, & \varepsilon \in (0; 1] \\ -\pi - b(\varepsilon), & \varepsilon > 1 \end{cases}, \quad (11)$$

а при $\varepsilon \leq 0$ будет

$$a(\varepsilon) = \begin{cases} -\pi/2 \\ \arcsin 1/\varepsilon \end{cases}, \quad b(\varepsilon) = \begin{cases} 3\pi/2, & \varepsilon \in [-1; 0] \\ \pi - a(\varepsilon), & \varepsilon < -1 \end{cases}. \quad (12)$$

Построение множества стационарных решений на плоскости (β_0, y) при различных значениях ε дано в статье [2]. Два семейства стационарных движений, соответствующих прямым $\beta_0 = \pm\pi/2$ и кривым (10), пересекаются в точках бифуркации

$$X_1 = (-\pi/2, -1 - \sqrt{1 + \varepsilon}), \quad X_2 = (-\pi/2, -1 + \sqrt{1 + \varepsilon}), \quad \varepsilon \geq -1; \\ X_3 = (\pi/2, 1 - \sqrt{1 - \varepsilon}), \quad X_4 = (\pi/2, 1 + \sqrt{1 - \varepsilon}), \quad \varepsilon \leq 1.$$

Главной задачей в [2] являлось исследование *основного* условия устойчивости (8). Показано, что на прямых $\beta_0 = \pm\pi/2$ при $\varepsilon \geq 0$ ($\lambda > 0$) это условие выполнено на открытых интервалах между точками бифуркации, а при $\varepsilon \leq 0$ ($\lambda < -1$) оно выполнено на лучах, лежащих вне отрезков с концами в точках бифуркации. Далее, на кривых $y = y_j(\beta_0, \varepsilon)$, $j = 1, 2$, условие (8) выполнено при $\varepsilon \geq 0$ ($\lambda > 0$) во всех точках с абсциссами $\beta_0 \neq \pm\pi/2$. В случае $\varepsilon \leq 0$ ($\lambda < -1$) найдены области допустимых значений ε, λ , при которых на этих кривых имеются интервалы устойчивости $(\beta_1^{(j)}(\varepsilon, \lambda); \pi/2)$, $(\pi/2; \beta_2^{(j)}(\varepsilon, \lambda))$, $j = 1, 2$, то есть интервалы, где выполнено условие (8).

В настоящей работе изучается *дополнительное* условие устойчивости (9) для обычной модели синхронного гироскопа в кардановом подвесе. Очевидно, что это условие не выполняется в тех точках множества стационарных решений, где имеет место одно из равенств $\cos \beta_0 = 0$,

$$(1 + \lambda + \sin^2 \beta_0)y - 2 \sin \beta_0 = 0. \quad (13)$$

Таким образом, условие (9) заведомо не выполняется на вертикальных прямых $\beta_0 = \pm\pi/2 \pmod{2\pi}$, целиком принадлежащих множеству стационарных решений. Следовательно, остальные точки множества стационарных решений, где не выполнено условие (9) – это точки (β_0, y) кривых $y = y_j(\beta_0, \varepsilon)$, $j = 1, 2$, имеющие абсциссы $\beta_0 \neq \pm\pi/2 \pmod{2\pi}$ и удовлетворяющие равенству (13). Цель дальнейшего исследования состоит в том, чтобы определить допустимые значения параметров ε, λ , при которых на кривых (10) существуют такие критические точки, указать их число и расположение.

2. Критерии существования критических точек на кривых $y_1, y_2(\beta_0, \varepsilon)$. Формула (10) для $y_1(\beta_0, \varepsilon)$ при $\varepsilon \neq 0$ эквивалентна выражению $y_1(\beta_0, \varepsilon) = \varepsilon / (1 - \sqrt{1 - \varepsilon \sin \beta_0})$, а для $y_2(\beta_0, \varepsilon)$ при всех ε имеем эквивалентное выражение $y_2(\beta_0, \varepsilon) = \varepsilon / (1 + \sqrt{1 - \varepsilon \sin \beta_0})$. Подставив эти выражения в (13), получаем уравнения

$$\varphi_1(\beta_0, \varepsilon) = (1 + \lambda)\varepsilon \quad (\varepsilon \neq 0), \quad \varphi_2(\beta_0, \varepsilon) = (1 + \lambda)\varepsilon, \quad (14)$$

которые при данных ε, λ определяют абсциссы β_0 тех точек кривых $y_j(\beta_0, \varepsilon)$, $j = 1, 2$, где нарушается дополнительное условие устойчивости (9). Здесь

$$\varphi_1(\beta_0, \varepsilon) = (1 - \sqrt{1 - \varepsilon \sin \beta_0})^2 \sin \beta_0, \quad \varphi_2(\beta_0, \varepsilon) = (1 + \sqrt{1 - \varepsilon \sin \beta_0})^2 \sin \beta_0. \quad (15)$$

При данном $j = 1, 2$ и данных ε, λ решения соответствующего уравнения (14) определяются на плоскости (β_0, y) как абсциссы общих точек графика функции $y = \varphi_j(\beta_0, \varepsilon)$ и прямой $y = c(\varepsilon, \lambda) = \text{const}$, где $c(\varepsilon, \lambda) = (1 + \lambda)\varepsilon$. Допустимыми здесь являются только значения $c(\varepsilon, \lambda)$, соответствующие допустимым значениям ε, λ . Из определения (6) множества допустимых значений ε, λ вытекает следующее утверждение.

Утверждение 1. При заданном ε для постоянной $c(\varepsilon, \lambda) = (1 + \lambda)\varepsilon$ допустимы только следующие значения: а) $c > \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), б) $c > 0$ ($\varepsilon < 0$), в) $c = 0$ ($\varepsilon = 0$).

Очевидно, что при данных j, ε допустимые решения уравнения (14) существуют только при тех допустимых значениях $c(\varepsilon, \lambda)$, которые принадлежат области значений $\varphi_j(\beta_0, \varepsilon)$ как функции β_0 . Так как функция $\varphi_j(\beta_0, \varepsilon)$ на отрезке $[a(\varepsilon); b(\varepsilon)]$ непрерывна по β_0 , то областью ее значений является отрезок $[\varphi_{j \text{ Min}}(\varepsilon); \varphi_{j \text{ Max}}(\varepsilon)]$, где $\varphi_{j \text{ Min}}(\varepsilon)$, $\varphi_{j \text{ Max}}(\varepsilon)$ – абсолютные минимум и максимум этой функции на $[a(\varepsilon); b(\varepsilon)]$. Следовательно, при данных j, ε уравнение (14) имеет решение для всех допустимых значений постоянной $c(\varepsilon, \lambda)$, принадлежащих отрезку $[\varphi_{j \text{ Min}}(\varepsilon); \varphi_{j \text{ Max}}(\varepsilon)]$. То есть множество значений величины $c(\varepsilon, \lambda)$, которым соответствуют допустимые решения уравнения (14), – это пересечение отрезка $[\varphi_{j \text{ Min}}(\varepsilon); \varphi_{j \text{ Max}}(\varepsilon)]$ и множества допустимых значений $c(\varepsilon, \lambda)$.

При $\varepsilon > 0$ последнее множество представляет собой полуось $(\varepsilon; +\infty)$ (утверждение 1, а). Как видно из формул (15), определяющих функции $\varphi_j(\beta_0, \varepsilon)$, при $\varepsilon \neq 0$ эти функции принимают на отрезке $[a(\varepsilon); b(\varepsilon)]$ значения обоих знаков. Следовательно,

$$\varphi_{j \text{ Min}}(\varepsilon) < 0, \quad \varphi_{j \text{ Max}}(\varepsilon) > 0 \quad (j = 1, 2; \varepsilon \neq 0). \quad (16)$$

Поэтому при $\varepsilon > 0$ пересечение полуоси $(\varepsilon; +\infty)$ с отрезком $[\varphi_{j \text{ Min}}(\varepsilon); \varphi_{j \text{ Max}}(\varepsilon)]$ непусто лишь в том случае, когда $\varphi_{j \text{ Max}}(\varepsilon) > \varepsilon$. Таким образом, верно

Утверждение 2. При $\varepsilon > 0$ допустимые решения каждого из уравнений (14) существуют только при условии $\varphi_{j \text{ Max}}(\varepsilon) > \varepsilon$. Эти решения соответствуют значениям постоянной $c(\varepsilon, \lambda)$ из промежутка $(\varepsilon; \varphi_{j \text{ Max}}(\varepsilon)]$, то есть значениям λ из промежутка $(0; \lambda^{(j)}(\varepsilon)]$, где

$$\lambda^{(j)}(\varepsilon) = -1 + \varphi_{j \text{ Max}}(\varepsilon)/\varepsilon \quad (j = 1, 2). \quad (17)$$

При $\varepsilon < 0$ множество допустимых значений постоянной $c(\varepsilon, \lambda)$ представляет собой полуось $(0; +\infty)$ (утверждение 1, б). С учетом (16), промежутки $(0; \varphi_{j \text{ Max}}(\varepsilon)]$, являющийся пересечением $(0; +\infty)$ и $[\varphi_{j \text{ Min}}(\varepsilon); \varphi_{j \text{ Max}}(\varepsilon)]$, непуст. Следовательно, верно

Утверждение 3. При $\varepsilon < 0$ уравнения (14) всегда имеют допустимые решения. Все эти решения соответствуют значениям постоянной $c(\varepsilon, \lambda)$ из промежутка $(0; \varphi_{j \text{ Max}}(\varepsilon)]$, то есть значениям λ из промежутка $[\lambda^{(j)}(\varepsilon); -1)$.

Число и расположение решений уравнений (17) на отрезке $[a(\varepsilon); b(\varepsilon)]$ зависит от свойств функций $\varphi_j(\beta_0, \varepsilon)$.

3. Дополнительное условие устойчивости на кривой $y_1(\beta_0, \varepsilon)$. При всех допустимых ε, λ найдем на кривой $y_1(\beta_0, \varepsilon)$ точки, в которых нарушается условие (9).

3.1. Функция $\varphi_1(\beta_0, \varepsilon)$. Рассмотрим $\varphi_1(\beta_0, \varepsilon)$ как функцию β_0 на $[a(\varepsilon); b(\varepsilon)]$. Введем обозначение

$$\xi(\beta_0, \varepsilon) = \sqrt{1 - \varepsilon \sin \beta_0}. \quad (18)$$

В случае $\varepsilon \neq 0$ будет $\xi(\beta_0, \varepsilon) = 1$ только при $\sin \beta_0 = 0$. Тогда, согласно (15), $\varphi_1(\beta_0, \varepsilon) = 0$ только при $\sin \beta_0 = 0$, а при $\sin \beta_0 \neq 0$ знак $\varphi_1(\beta_0, \varepsilon)$ совпадает со знаком $\sin \beta_0$.

Производная функции $\varphi_1(\beta_0, \varepsilon)$ по β_0 равна

$$\varphi_1'(\beta_0, \varepsilon) = \frac{\cos \beta_0 (1 - \sqrt{1 - \varepsilon \sin \beta_0})^2 (2\sqrt{1 - \varepsilon \sin \beta_0} + 1)}{\sqrt{1 - \varepsilon \sin \beta_0}}. \quad (19)$$

Рассмотрим случай $\varepsilon > 0$. Отрезок $[a(\varepsilon); b(\varepsilon)]$ в этом случае определен в (11). Из (19) следует, что знак $\varphi_1'(\beta_0, \varepsilon)$ совпадает со знаком $\cos \beta_0$ на всем отрезке $[a(\varepsilon); b(\varepsilon)]$ за исключением точек $\beta_0 = -\pi, 0$, где $\sin \beta_0 = 0$. Но при переходе через эти точки знак $\varphi_1'(\beta_0, \varepsilon)$ не меняется. Поэтому на отрезке $[a(\varepsilon); -\pi/2]$, где $\cos \beta_0 \leq 0$, функция $\varphi_1(\beta_0, \varepsilon)$ строго монотонно убывает, а на отрезке $[-\pi/2; b(\varepsilon)]$, где $\cos \beta_0 \geq 0$ – строго монотонно возрастает. Отсюда следует, что в точке $\beta_0 = -\pi/2$ она имеет минимум, а в крайних точках $\beta_0 = a(\varepsilon), b(\varepsilon)$ – одинаковые максимумы. Поэтому

$$\begin{aligned} \varphi_{1 \text{ Min}}(\varepsilon) &= \varphi_1(-\pi/2, \varepsilon) = -(1 - \sqrt{1 + \varepsilon})^2, \quad \varepsilon > 0; \\ \varphi_{1 \text{ Max}}(\varepsilon) &= \varphi_1(b(\varepsilon), \varepsilon) = \begin{cases} \varphi_1(\pi/2, \varepsilon) = (1 - \sqrt{1 - \varepsilon})^2, & \varepsilon \in (0; 1]; \\ \varphi_1(\arcsin 1/\varepsilon, \varepsilon) = 1/\varepsilon, & \varepsilon \geq 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

При $\varepsilon \in (0; 1)$ в крайних точках $\beta_0 = -3\pi/2, \pi/2$ отрезка $[a(\varepsilon); b(\varepsilon)]$ имеем $\cos \beta_0 = 0$, $\xi(\beta_0, \varepsilon) \neq 0$, и следовательно, $\varphi_1'(\beta_0, \varepsilon) = 0$.

При $\varepsilon = 1$ в крайних точках $\beta_0 = -3\pi/2, \pi/2$ одновременно $\cos \beta_0 = 0, \xi(\beta_0, 1) = 0$, то есть имеем в (19) неопределенность вида $0/0$. Но, поскольку

$$\sqrt{\cos^2 \beta_0} = \begin{cases} -\cos \beta_0 & \text{в правой полуокрестности точки } \beta_0 = -3\pi/2 \\ \cos \beta_0 & \text{в левой полуокрестности точки } \beta_0 = \pi/2 \end{cases},$$

то

$$\lim_{\beta_0 \rightarrow -3\pi/2+0} \cos \beta_0 / \sqrt{1 - \varepsilon \sin \beta_0} = \lim_{\beta_0 \rightarrow -3\pi/2+0} \cos \beta_0 \sqrt{1 + \varepsilon \sin \beta_0} / \sqrt{\cos^2 \beta_0} = -\sqrt{2},$$

$$\lim_{\beta_0 \rightarrow \pi/2-0} \cos \beta_0 / \sqrt{1 - \varepsilon \sin \beta_0} = \sqrt{2},$$

и следовательно, $\varphi'_1(\beta_0, \varepsilon)$ имеет в крайних точках конечные ненулевые пределы.

При $\varepsilon > 1$ в соответствии с (11) имеем $b(\varepsilon) \in (0; \pi/2), a(\varepsilon) \in (-3\pi/2, \pi/2)$. Поэтому в точках $\beta_0 = a(\varepsilon), \beta_0 = b(\varepsilon)$ будет $\cos \beta_0 \neq 0, \xi(\beta_0, \varepsilon) = 0$, и следовательно, $\varphi'_1(\beta_0, \varepsilon)$ обращается в бесконечность.

Таким же образом анализируется зависимость $\varphi_1(\beta_0, \varepsilon)$ от β_0 при $\varepsilon < 0$. В этом случае

$$\varphi_{1 \text{ Min}}(\varepsilon) = \varphi_1(a(\varepsilon), \varepsilon) = \begin{cases} \varphi_1(-\pi/2, \varepsilon) = -(1 - \sqrt{1 + \varepsilon})^2, & \varepsilon \in [-1; 0); \\ \varphi_1(\arcsin 1/\varepsilon, \varepsilon) = 1/\varepsilon, & \varepsilon \leq -1, \end{cases} \quad (21)$$

$$\varphi_{1 \text{ Max}}(\varepsilon) = \varphi_1(\pi/2, \varepsilon) = (1 - \sqrt{1 - \varepsilon})^2, \quad \varepsilon < 0.$$

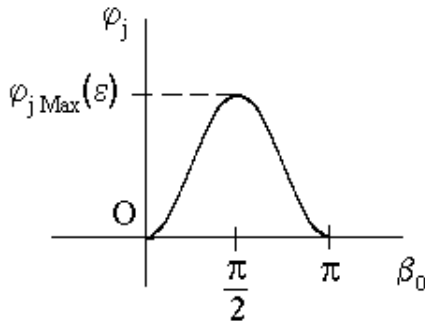


Рис. 1. Положительные части графиков зависимостей $\varphi_j(\beta_0, \varepsilon), j = 1, 2$, от β_0 при $\varepsilon < 0$.

Проведенный анализ позволяет построить графики $\varphi_1(\beta_0, \varepsilon)$ как функции β_0 при различных ε . Так как $c(\varepsilon, \lambda) = (1 + \lambda)\varepsilon > 0$ при $\varepsilon \neq 0$, то допустимые решения первого уравнения (14) относительно β_0 принадлежат той части отрезка $[a(\varepsilon); b(\varepsilon)]$, где $\varphi_1(\beta_0, \varepsilon) > 0$, а поведение $\varphi_1(\beta_0, \varepsilon)$ при всех остальных значениях β_0 несущественно. При $\varepsilon < 0$ такой частью является интервал $(0; \pi)$, на нем график зависимости $\varphi_1(\beta_0, \varepsilon)$ от β_0 имеет вид, изображенный на рис. 1.

3.2. Случай $\varepsilon > 0$. При $\varepsilon \in (0; 1)$ справедливо неравенство $1 - \sqrt{1 - \varepsilon} < 1 + \sqrt{1 - \varepsilon}$. Умножив обе его части на $1 - \sqrt{1 - \varepsilon}$, получим $(1 - \sqrt{1 - \varepsilon})^2 < \varepsilon$, то есть, согласно (20), $\varphi_{1 \text{ Max}}(\varepsilon) < \varepsilon$. При $\varepsilon \geq 1$, в соответствии с (20), имеем $\varphi_{1 \text{ Max}}(\varepsilon) = 1/\varepsilon \leq \varepsilon$. Таким образом, $\varphi_{1 \text{ Max}}(\varepsilon) \leq \varepsilon$ при всех $\varepsilon > 0$. Поэтому, согласно утверждению 2, при $\varepsilon > 0$ первое уравнение (14) не имеет допустимых решений. Это означает, что при $\varepsilon > 0$ дополнительное условие устойчивости выполняется на всей кривой $y_1(\beta_0, \varepsilon)$ за исключением точек бифуркации с абсциссами $\beta_0 = \pm\pi/2$.

3.3. Случай $\varepsilon = 0$. При $\varepsilon = 0$ нельзя пользоваться первым уравнением (14). В этом случае, согласно (10), имеем выражение $y_1(\beta_0, 0) = 2/\sin \beta_0$, подставив которое в (13), получаем уравнение, приводящее к недопустимому равенству $1 + \lambda = 0$ (см.(6)). Следовательно, при $\varepsilon = 0$ дополнительное условие устойчивости также выполняется во всех точках кривой $y_1(\beta_0, \varepsilon)$ за исключением точек бифуркации.

3.4. Случай $\varepsilon < 0$. При $\varepsilon < 0$ в соответствии с (17),(21), имеем

$$\lambda^{(1)}(\varepsilon) = -2 \frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{1+\sqrt{1-\varepsilon}}. \quad (22)$$

Если $\lambda \in (\lambda^{(1)}(\varepsilon); -1)$, то есть $c(\varepsilon, \lambda) \in (0; \varphi_{1\text{Max}}(\varepsilon))$, то (см. рис. 1) первое уравнение (14) имеет два допустимых решения

$$\beta_1^{(1)}(\varepsilon, \lambda) \in (0; \pi/2), \quad \beta_2^{(1)}(\varepsilon, \lambda) = \pi - \beta_1^{(1)}(\varepsilon, \lambda) \in (\pi/2; \pi). \quad (23)$$

При $\lambda = \lambda^{(1)}(\varepsilon)$ они сливаются в одно, соответствующее бифуркационной точке с абсциссой $\pi/2$.

Таким образом, при $\varepsilon < 0$, $\lambda \in (\lambda^{(1)}(\varepsilon); -1)$ дополнительное условие устойчивости не выполняется в двух точках кривой $y_1(\beta_0, \varepsilon)$, имеющих абсциссы (23), а также в точках бифуркации. При $\lambda \leq \lambda^{(1)}(\varepsilon)$ это условие не выполняется только в бифуркационных точках на $y_1(\beta_0, \varepsilon)$.

3.5. Графическое представление результатов для $y_1(\beta_0, \varepsilon)$ при $\varepsilon < 0$. На рис. 2, а изображен график функции $\lambda^{(1)}(\varepsilon)$, определенной формулой (22). Качественный характер зависимостей $\beta_i^{(1)}(\varepsilon, \lambda)$, $i = 1, 2$, от λ следует из рис 1. Граничным значениям $\lambda = \lambda^{(1)}(\varepsilon)$ и $\lambda = -1$ соответствуют значения параметра $c(\varepsilon, \lambda) = (1 + \lambda)\varepsilon$, равные $\varphi_{1\text{Max}}(\varepsilon)$ и 0. Поэтому при возрастании λ от $\lambda^{(1)}(\varepsilon)$ до -1 прямая $y = c(\varepsilon, \lambda)$ на рис. 1 от уровня $y = \varphi_{1\text{Max}}(\varepsilon)$ опускается до уровня $y = 0$. При этом $\beta_1^{(1)}(\varepsilon, \lambda)$ монотонно убывает от $\pi/2$ до 0, а $\beta_2^{(1)}(\varepsilon, \lambda)$ монотонно возрастает от $\pi/2$ до π .

Чтобы строго доказать монотонность этих функций, достаточно из первого уравнения (14) определить $\partial\beta_i^{(1)}(\varepsilon, \lambda)/\partial\lambda$, $i = 1, 2$, как производные неявных функций. В точках $\lambda = \lambda^{(1)}(\varepsilon)$ и $\lambda = -1$ эти производные бесконечны. Следовательно, графики зависимостей $\beta_i^{(1)}(\varepsilon, \lambda)$, $i = 1, 2$, от λ имеют вид, изображенный на рис. 2, б.

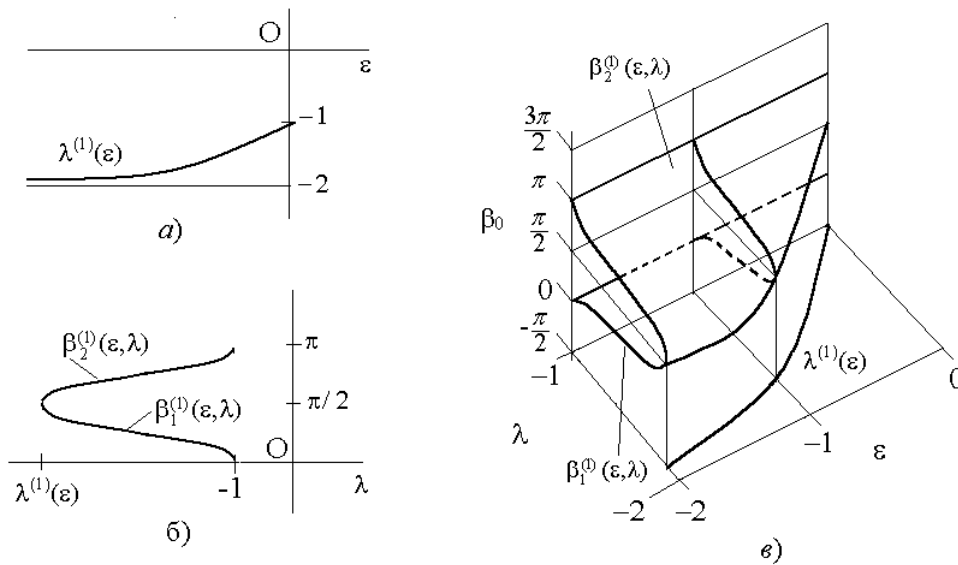


Рис. 2. а) зависимость $\lambda^{(1)}(\varepsilon)$ от ε ; б) зависимости $\beta_i^{(1)}(\varepsilon, \lambda)$, $i = 1, 2$, от λ ; в) поверхности $\beta_0 = \beta_i^{(1)}(\varepsilon, \lambda)$, $i = 1, 2$.

Пользуясь рис. 2, *a*, *b*, нетрудно построить в пространстве $(\varepsilon, \lambda, \beta_0)$ поверхности $\beta_0 = \beta_i^{(1)}(\varepsilon, \lambda)$, $i = 1, 2$, на которых нарушается дополнительное условие устойчивости для кривой $y_1(\beta_0, \varepsilon)$ (см. рис. 2, *в*). Это условие нарушается и на плоскостях $\beta_0 = \pm\pi/2$.

4. Дополнительное условие устойчивости на кривой $y_2(\beta_0, \varepsilon)$. Рассмотрим зависимость $\xi(\beta_0, \varepsilon)$ от β_0 , определенную формулой (18). Имеем

$$\xi'(\beta_0, \varepsilon) = -\frac{\varepsilon \cos \beta_0}{2\sqrt{1 - \varepsilon \sin \beta_0}}. \quad (24)$$

При $\varepsilon > 0$ отрезок $[a(\varepsilon); b(\varepsilon)] \subseteq [-3\pi/2; \pi/2]$ определен в (11). Из (24) следует, что на левой его половине $[a(\varepsilon); -\pi/2]$ функция $\xi(\beta_0, \varepsilon)$ монотонно возрастает, а на правой его половине $[-\pi/2; b(\varepsilon)]$ – монотонно убывает. Следовательно, эта функция имеет максимум в середине данного отрезка при $\beta_0 = -\pi/2$, а своего минимума она достигает на его концах:

$$\begin{aligned} \xi_{\text{Max}}(\varepsilon) &= \xi(-\pi/2, \varepsilon) = \sqrt{1 + \varepsilon}, \quad \varepsilon > 0; \\ \xi_{\text{Min}}(\varepsilon) &= \begin{cases} \xi(\pi/2, \varepsilon) = \sqrt{1 - \varepsilon}, & \varepsilon \in (0; 1); \\ 0, & \varepsilon \geq 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (25)$$

При $\varepsilon < 0$ отрезок $[a(\varepsilon); b(\varepsilon)] \subseteq [-\pi/2; 3\pi/2]$ определен в (12). Из (24) видно, что на $[a(\varepsilon); \pi/2]$ функция $\xi(\beta_0, \varepsilon)$ монотонно возрастает, а на $[\pi/2; b(\varepsilon)]$ – монотонно убывает. Поэтому

$$\begin{aligned} \xi_{\text{Max}}(\varepsilon) &= \xi(\pi/2, \varepsilon) = \sqrt{1 - \varepsilon}, \quad \varepsilon < 0; \\ \xi_{\text{Min}}(\varepsilon) &= \begin{cases} \xi(-\pi/2, \varepsilon) = \sqrt{1 + \varepsilon}, & \varepsilon \in (-1; 0); \\ 0, & \varepsilon \leq -1. \end{cases} \end{aligned} \quad (26)$$

4.1. Функция $\varphi_2(\beta_0, \varepsilon)$. Изучим зависимость $\varphi_2(\beta_0, \varepsilon)$ от β_0 при фиксированном ε . В соответствии с (15), при $\sin \beta_0 \neq 0$ знак функции $\varphi_2(\beta_0, \varepsilon)$ совпадает со знаком $\sin \beta_0$. Производная этой функции по β_0 равна

$$\varphi_2'(\beta_0, \varepsilon) = \frac{\cos \beta_0 (\sqrt{1 - \varepsilon \sin \beta_0} + 1)^2 (2\sqrt{1 - \varepsilon \sin \beta_0} - 1)}{\sqrt{1 - \varepsilon \sin \beta_0}}. \quad (27)$$

Таким образом, поведение данной функции существенно зависит от того, обращается ли выражение $2\xi(\beta_0, \varepsilon) - 1$ в ноль на $[a(\varepsilon); b(\varepsilon)]$.

Рассмотрим случай $\varepsilon > 0$. Из (25) следует, что в этом случае уравнение $\xi_{\text{Min}}(\varepsilon) = 1/2$ может иметь решение только при $\varepsilon \in (0; 3/4)$. Это решение $\varepsilon = 3/4$. Следовательно, $\xi_{\text{Min}}(\varepsilon) \geq 1/2$ при $\varepsilon \in (0; 3/4]$ и $0 \leq \xi_{\text{Min}}(\varepsilon) < 1/2$ при $\varepsilon > 3/4$.

Пусть $\varepsilon \in (0; 3/4]$. Тогда $2\xi(\beta_0, \varepsilon) - 1 \geq 0$ при $\beta_0 \in [a(\varepsilon); b(\varepsilon)] = [-3\pi/2; \pi/2]$ и, согласно (27), знак $\varphi_2'(\beta_0, \varepsilon)$ совпадает со знаком $\cos \beta_0$. Следовательно, функция $\varphi_2(\beta_0, \varepsilon)$ монотонно убывает на $[-3\pi/2; -\pi/2]$ и монотонно возрастает на $[-\pi/2; \pi/2]$. График зависимости $\varphi_2(\beta_0, \varepsilon)$ от β_0 при $\varepsilon \in (0; 3/4]$ изображен на рис. 3, *a*.

Пусть $\varepsilon > 3/4$. Тогда $2\xi(\beta_0, \varepsilon) - 1 = 0$ в двух точках

$$\beta_0 = \bar{\beta}_2^{(2)}(\varepsilon) = \arcsin 3/4\varepsilon, \quad \beta_0 = \bar{\beta}_1^{(2)}(\varepsilon) = -\pi - \bar{\beta}_2^{(2)}(\varepsilon) \quad (\varepsilon > 3/4) \quad (28)$$

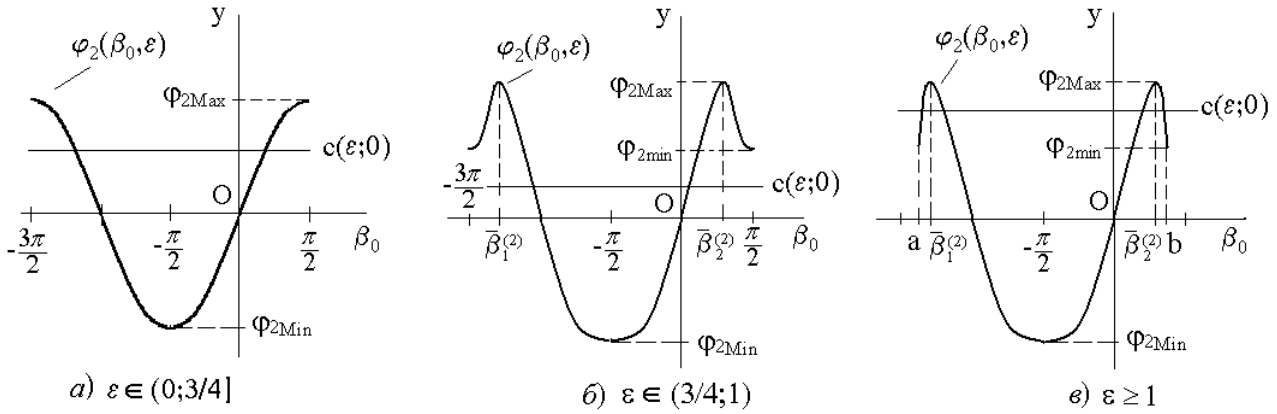


Рис. 3. Графики зависимости $\varphi_2(\beta_0, \varepsilon)$ от β_0 при $\varepsilon > 0$.

отрезка $[a(\varepsilon); b(\varepsilon)]$. Из (27) следует, что в этом случае функция $\varphi_2(\beta_0, \varepsilon)$ монотонно возрастает на отрезках $[a(\varepsilon); \bar{\beta}_1^{(2)}(\varepsilon)]$, $[-\pi/2; \bar{\beta}_2^{(2)}(\varepsilon)]$ и монотонно убывает на отрезках $[\bar{\beta}_2^{(2)}(\varepsilon); -\pi/2]$, $[\bar{\beta}_2^{(2)}(\varepsilon); b(\varepsilon)]$. Так же, как и для $\varphi_1(\beta_0, \varepsilon)$, устанавливаем, что в крайних точках $\beta_0 = a(\varepsilon)$ и $\beta_0 = b(\varepsilon)$ производная $\varphi_2'(\beta_0, \varepsilon)$ обращается в ноль при $\varepsilon \in (3/4; 1)$, конечна при $\varepsilon = 1$ и бесконечна при $\varepsilon > 1$. Следовательно, графики зависимости $\varphi_2(\beta_0, \varepsilon)$ от β_0 при $\varepsilon > 3/4$ имеют вид, изображенный на рис. 3, б, в. При этом, в соответствии с изложенным выше, экстремальные значения функции $\varphi_2(\beta_0, \varepsilon)$ при $\varepsilon > 0$ равны

$$\varphi_{2\text{Max}}(\varepsilon) = \begin{cases} \varphi_2(\pi/2, \varepsilon) = (1 + \sqrt{1 - \varepsilon})^2, & \varepsilon \in (0; 3/4]; \\ \varphi_2(\bar{\beta}_1^{(2)}(\varepsilon), \varepsilon) = 27/16\varepsilon, & \varepsilon \geq 3/4; \end{cases}$$

$$\varphi_{2\text{Min}}(\varepsilon) = \varphi_2(-\pi/2, \varepsilon) = -(1 - \sqrt{1 + \varepsilon})^2, \quad \varepsilon > 0; \quad (29)$$

$$\varphi_{2\text{min}}(\varepsilon) = \varphi_2(b(\varepsilon), \varepsilon) = \begin{cases} \varphi_2(\pi/2, \varepsilon) = (1 + \sqrt{1 - \varepsilon})^2, & \varepsilon \in (3/4; 1); \\ \varphi_2(\arcsin 1/\varepsilon, \varepsilon) = 1/\varepsilon, & \varepsilon \geq 1. \end{cases}$$

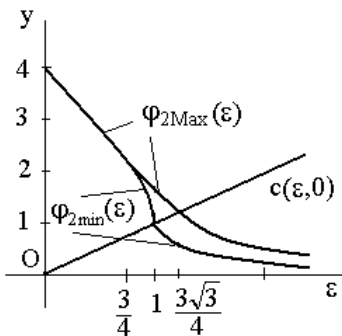


Рис. 4. Графики зависимостей $y = \varphi_{2\text{max}}(\varepsilon)$, $y = \varphi_{2\text{min}}^*(\varepsilon)$, $y = c(\varepsilon, 0)$ при $\varepsilon > 0$.

Обозначения \min , \max используются для локальных, а Min , Max – для абсолютных экстремумов на $[a(\varepsilon); b(\varepsilon)]$.

Рассмотрев аналогичным образом случай $\varepsilon < 0$, заключаем, что в таком случае $\varphi_2(\beta_0, \varepsilon) > 0$ на интервале $(0; \pi)$, и график зависимости $\varphi_2(\beta_0, \varepsilon)$ от β_0 имеет на этом интервале такой же вид, что и для $\varphi_1(\beta_0, \varepsilon)$ (рис. 1).

4.2. Случай $\varepsilon > 0$. Согласно утверждению 2, при $\varepsilon > 0$ второе уравнение (14) имеет решение только тогда, когда

$$\varphi_{2\text{Max}}(\varepsilon) > \varepsilon. \quad (31)$$

Чтобы проанализировать возможные здесь случаи, с помощью формул (29) построим на рис. 4 графики функций $y = \varphi_{2\text{Max}}(\varepsilon)$, $y = \varphi_{2\text{min}}(\varepsilon)$, $y = c(\varepsilon, 0) = \varepsilon$. Отметим, что при значении $\varepsilon = 3/4$, где меняется формула для функции $\varphi_{2\text{Max}}(\varepsilon)$, эта функция непрерывна вместе с производной, а $\varphi_{2\text{min}}(\varepsilon)$

имеет с ней общую касательную. Прямая $y = c(\varepsilon, 0) = \varepsilon$ пересекает график функции $y = \varphi_{2\text{Max}}(\varepsilon)$ при $\varepsilon = 3\sqrt{3}/4$, а при $\varepsilon \in (0; 3\sqrt{3}/4)$ имеем $\varphi_{2\text{Max}}(\varepsilon) > c(\varepsilon, 0)$. Значит, условие разрешимости (31) выполняется только для $\varepsilon \in (0; 3\sqrt{3}/4)$.

Далее, прямая $y = c(\varepsilon, 0) = \varepsilon$ на рис. 4 пересекает график функции $y = \varphi_{2\text{min}}(\varepsilon)$ при $\varepsilon = 1$, так что $c(\varepsilon, 0) < \varphi_{2\text{min}}(\varepsilon)$ для $\varepsilon \in (0; 1)$ и $c(\varepsilon, 0) > \varphi_{2\text{min}}(\varepsilon)$ для $\varepsilon \in (1; 3\sqrt{3}/4)$. Таким образом, на рис. 3, а прямая $y = c(\varepsilon, 0)$ всегда проходит ниже уровня $\varphi_{2\text{Max}}(\varepsilon)$, на рис. 3, б она проходит ниже уровня $\varphi_{2\text{min}}(\varepsilon)$, а на рис. 3, в – выше или на уровне $\varphi_{2\text{min}}(\varepsilon)$. Абсциссы точек пересечения прямой $y = c(\varepsilon, 0)$ с кривой $y = \varphi_2(\beta_0, \varepsilon)$ определяются уравнением $\varphi_2(\beta_0, \varepsilon) = \varepsilon$, или с учетом (15)

$$(1 + \sqrt{1 - \varepsilon \sin \beta_0})^2 \sin \beta_0 = \varepsilon. \quad (32)$$

Следовательно, в случаях, изображенных на рис. 3, а, б, это уравнение имеет два решения:

$$\begin{aligned} a_2(\varepsilon) \in (-3\pi/2; -\pi), \quad b_1(\varepsilon) \in (0; \pi/2), \quad \varepsilon \in (0; 3/4]; \\ a_2(\varepsilon) \in (\bar{\beta}_1^{(2)}(\varepsilon); -\pi), \quad b_1(\varepsilon) \in (0; \bar{\beta}_2^{(2)}(\varepsilon)), \quad \varepsilon \in (3/4; 1), \end{aligned} \quad (33)$$

а в случае, изображенном на рис. 3, в – четыре решения:

$$\begin{aligned} a_1(\varepsilon) \in (a(\varepsilon); \bar{\beta}_1^{(2)}(\varepsilon)), \quad a_2(\varepsilon) \in (\bar{\beta}_1^{(2)}(\varepsilon); -\pi), \\ b_1(\varepsilon) \in (0; \bar{\beta}_2^{(2)}(\varepsilon)), \quad b_2(\varepsilon) \in (\bar{\beta}_1^{(2)}(\varepsilon); b(\varepsilon)), \quad \varepsilon \in [1; 3\sqrt{3}/4]. \end{aligned} \quad (34)$$

Решениями второго уравнения (14) являются значения β_0 , при которых в соответствующих точках кривой $y = y_2(\beta_0, \varepsilon)$ нарушается дополнительное условие устойчивости. Эти значения определяются как абсциссы общих точек прямой $y = c(\varepsilon, \lambda)$ и кривой $y = \varphi_2(\beta_0, \varepsilon)$. Такие точки существуют при условии (31) для значений $c(\varepsilon, \lambda)$ из промежутка $(\varepsilon; \varphi_{2\text{Max}}(\varepsilon)]$, то есть значений λ из промежутка $(0; \lambda^{(2)}(\varepsilon)]$, где $\lambda^{(2)}(\varepsilon)$ – это значение λ , при котором $c(\varepsilon, \lambda) = \varphi_{2\text{Max}}(\varepsilon)$. Обозначим через $\bar{\lambda}^{(2)}(\varepsilon)$ значение λ , при котором $c(\varepsilon, \lambda) = \varphi_{2\text{min}}(\varepsilon)$. Тогда из (29) находим

$$\begin{aligned} \lambda^{(2)}(\varepsilon) = \begin{cases} 2\sqrt{1 - \varepsilon}/(1 - \sqrt{1 - \varepsilon}), & \varepsilon \in (0; 3/4]; \\ -1 + 27/16\varepsilon^2, & \varepsilon \geq 3/4; \end{cases} \\ \bar{\lambda}^{(2)}(\varepsilon) = 2\sqrt{1 - \varepsilon}/(1 - \sqrt{1 - \varepsilon}), \quad \varepsilon \in (3/4; 1]. \end{aligned} \quad (35)$$

При $\varepsilon > 1$ получаем $\bar{\lambda}^{(2)}(\varepsilon) = -1 + 1/\varepsilon^2 < 0$, что недопустимо для λ . Следовательно, функция $\bar{\lambda}^{(2)}(\varepsilon)$ определена только при $\varepsilon \in (3/4; 1]$.

Пользуясь рис. 3, а, б, в, нетрудно установить число и расположение решений второго уравнения (14) при различных ε, λ в случае $\varepsilon > 0$. Соответствующие результаты представлены в таблице. Решения, принадлежащие отрезку $[-3\pi/2; -\pi]$, обозначены через $\beta_{1k}^{(2)}(\varepsilon, \lambda)$, $k = 1, 2$, а лежащие в $[0; \pi/2]$ – через $\beta_{2k}^{(2)}(\varepsilon, \lambda)$. Более точно промежутки, которым принадлежат эти решения, указаны в последнем столбце таблицы.

Чтобы представить полученные результаты в наглядной форме, изобразим в пространстве $(\varepsilon, \lambda, \beta_0)$ поверхности $\beta_{ik}^{(2)}(\varepsilon, \lambda)$, $i, k = 1, 2$, на которых не выполнено дополнительное условие устойчивости для $y = y_2(\beta_0, \varepsilon)$ при $\varepsilon > 0$. Для этого удобно сначала построить графики зависимостей $\beta_{ik}^{(2)}(\varepsilon, \lambda)$ от $\lambda \in (0; \lambda^{(2)}(\varepsilon)]$ при фиксированных $\varepsilon > 0$. Они изображают сечения рассматриваемых поверхностей плоскостями

Значения β_0 , при которых нарушается дополнительное условие устойчивости на кривой $y = y_2(\beta_0, \varepsilon)$ (случай $\varepsilon > 0$).

ε	λ	β_0	Промежуток
$0 < \varepsilon \leq 3/4$	$0 < \lambda \leq \lambda^{(2)}(\varepsilon)$	$\beta_{12}^{(2)}(\varepsilon, \lambda)$	$[-3\pi/2; a_2(\varepsilon))$
		$\beta_{21}^{(2)}(\varepsilon, \lambda)$	$(b_1(\varepsilon); \pi/2]$
$3/4 < \varepsilon < 1$	$0 < \lambda < \bar{\lambda}^{(2)}(\varepsilon)$	$\beta_{12}^{(2)}(\varepsilon, \lambda)$	$(\bar{\beta}_1^{(2)}(\varepsilon); a_2(\varepsilon))$
		$\beta_{21}^{(2)}(\varepsilon, \lambda)$	$(b_1(\varepsilon); \bar{\beta}_2^{(2)}(\varepsilon))$
		$\beta_{11}^{(2)}(\varepsilon, \lambda)$	$(-3\pi/2; \bar{\beta}_1^{(2)}(\varepsilon))$
		$\beta_{12}^{(2)}(\varepsilon, \lambda)$	$(\bar{\beta}_1^{(2)}(\varepsilon); a_2(\varepsilon))$
	$\bar{\lambda}^{(2)}(\varepsilon) \leq \lambda < \lambda^{(2)}(\varepsilon)$	$\beta_{21}^{(2)}(\varepsilon, \lambda)$	$(b_1(\varepsilon); \bar{\beta}_2^{(2)}(\varepsilon))$
$\beta_{22}^{(2)}(\varepsilon, \lambda)$		$(\bar{\beta}_2^{(2)}(\varepsilon); \pi/2)$	
$\lambda = \lambda^{(2)}(\varepsilon)$	$\bar{\beta}_1^{(2)}(\varepsilon)$	$(-3\pi/2; a_2(\varepsilon))$	
	$\bar{\beta}_2^{(2)}(\varepsilon)$	$(b_1(\varepsilon); \pi/2)$	
$1 \leq \varepsilon < 3\sqrt{3}/4$	$0 < \lambda < \lambda^{(2)}(\varepsilon)$	$\beta_{11}^{(2)}(\varepsilon, \lambda)$	$(a_1(\varepsilon); \bar{\beta}_1^{(2)}(\varepsilon))$
		$\beta_{12}^{(2)}(\varepsilon, \lambda)$	$(\bar{\beta}_1^{(2)}(\varepsilon); a_2(\varepsilon))$
		$\beta_{21}^{(2)}(\varepsilon, \lambda)$	$(b_1(\varepsilon); \bar{\beta}_2^{(2)}(\varepsilon))$
		$\beta_{22}^{(2)}(\varepsilon, \lambda)$	$(\bar{\beta}_2^{(2)}(\varepsilon); b_2(\varepsilon))$
	$\lambda = \lambda^{(2)}(\varepsilon)$	$\bar{\beta}_1^{(2)}(\varepsilon, \lambda)$	$(a_1(\varepsilon); a_2(\varepsilon))$
$\bar{\beta}_2^{(2)}(\varepsilon, \lambda)$		$(b_1(\varepsilon); b_2(\varepsilon))$	

$\varepsilon = \text{const}$. Качественный характер таких графиков следует из рис. 3, а, б, в, а для более детального анализа необходимо определить из второго уравнения (14) производные $\partial\beta_{ik}^{(1)}(\varepsilon, \lambda)/\partial\lambda$, как производные неявных функций. Затем следует построить графики функций (35): $\lambda = \lambda^{(2)}(\varepsilon)$ и $\lambda = \bar{\lambda}^{(2)}(\varepsilon)$. Наконец, пользуясь уравнением (32), определяющим $a_i(\varepsilon), b_i(\varepsilon)$, $i = 1, 2$, необходимо построить их графики. Они дадут сечения рассматриваемых поверхностей плоскостью $\lambda = 0$.

Не приводя всех этих построений, изобразим на рис. 5, а окончательный результат. Чтобы ясней показать структуру полученных поверхностей, на рис. 5, а нижняя поверхность, определяемая функциями $\beta_{1k}^{(2)}(\varepsilon, \lambda)$, $k = 1, 2$, изображена также в положении, сдвинутом вдоль оси β_0 вверх на 2π . Тогда вместе с поверхностью, определяемой функциями $\beta_{2k}^{(2)}(\varepsilon, \lambda)$, $k = 1, 2$, она образует односвязную поверхность. В соответствии с отмеченным выше, в пространстве $(\varepsilon, \lambda, \beta_0)$ дополнительное условие устойчивости для $y = y_2(\beta_0, \varepsilon)$ не выполняется и на плоскостях $\beta_0 = \pm\pi/2$.

4.3. Случай $\varepsilon = 0$. При $\varepsilon = 0$ второе уравнение (14) с учетом (15) принимает вид $\sin \beta_0 = 0$. Следовательно, при $\varepsilon = 0$ второе условие устойчивости не выполняется на прямой $y = y_2(\beta_0, 0) \equiv 0$ в двух точках $\beta_0 = 0, \pi$ основного отрезка $[-\pi/2; 3\pi/2]$.

4.4. Случай $\varepsilon < 0$. В соответствии с утверждением 3, в случае $\varepsilon < 0$ второе уравнение (14) имеет решение при $c(\varepsilon, \lambda) \in (0; \varphi_{2\text{Max}}(\varepsilon)]$, то есть при $\lambda \in [\lambda^{(2)}(\varepsilon); -1)$.

Так как $\varphi_{2\text{Max}}(\varepsilon) = \varphi(\pi/2, \varepsilon) = (1 + \sqrt{1 - \varepsilon})^2$ при $\varepsilon < 0$ (см. рис. 1), то по формуле (17) имеем $\lambda^{(2)}(\varepsilon) = 2\sqrt{1 - \varepsilon}/(1 - \sqrt{1 - \varepsilon})$, $\varepsilon < 0$. Как видно из рис. 1, при $\lambda \in (\lambda^{(2)}(\varepsilon); -1)$, то есть при $c(\varepsilon, \lambda) \in (0; \varphi_{2\text{Max}}(\varepsilon))$, на отрезке $[-\pi/2; 3\pi/2]$ существуют два решения $\beta_1^{(2)}(\varepsilon, \lambda) \in (0; \pi/2)$, $\beta_2^{(2)}(\varepsilon, \lambda) \in (\pi/2; \pi)$ второго уравнения (14). При $\lambda = \lambda^{(2)}(\varepsilon)$ они сливаются в одно: $\beta_1^{(2)}(\varepsilon, \lambda^{(2)}(\varepsilon)) = \beta_2^{(2)}(\varepsilon, \lambda^{(2)}(\varepsilon)) = \pi/2$. Поверхности в пространстве $(\varepsilon, \lambda, \beta_0)$, определяемые функциями $\beta_i^{(2)}(\varepsilon, \lambda)$, $i = 1, 2$, изображены на рис. 5, б.

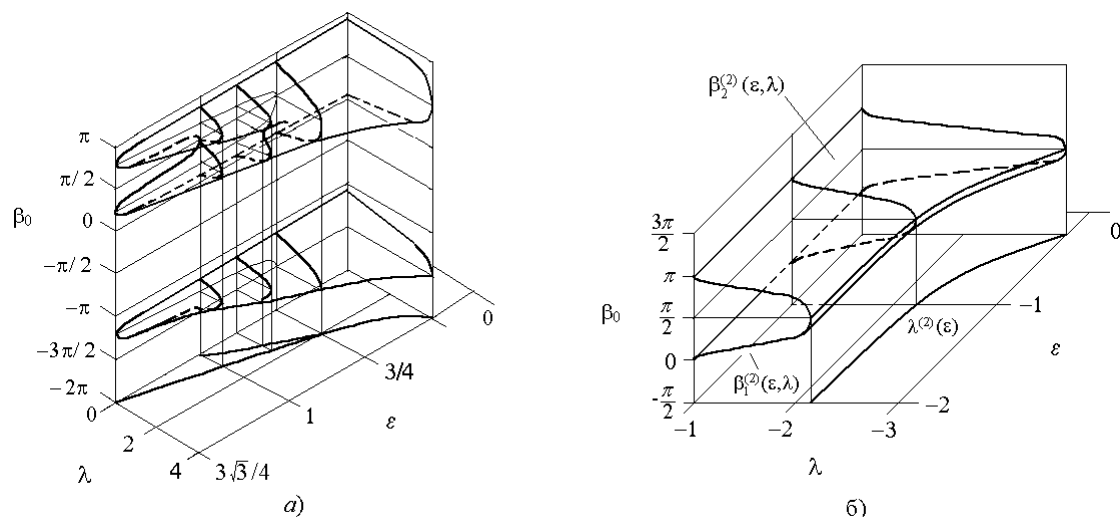


Рис. 5. а) Поверхности $\beta_0 = \beta_{ik}^{(2)}(\varepsilon, \lambda)$, $i, k = 1, 2$ ($\varepsilon > 0$). б) Поверхности $\beta_i^{(2)}(\varepsilon, \lambda)$, $i = 1, 2$ ($\varepsilon < 0$).

Нетрудно показать, что дополнительное условие устойчивости не выполняется только для тех стационарных движений, которые удовлетворяют основному условию. Поэтому дополнительное условие существенно при исследовании устойчивости стационарных движений синхронного гироскопа в кардановом подвесе.

1. Коносевиц Ю.Б. Условия устойчивости стационарных режимов движения синхронного гироскопа в кардановом подвесе // Механика твердого тела. – 2003. – Вып. 33. – С. 90-96.
2. Коносевиц Б.И. Исследование основного условия устойчивости стационарных движений гироскопа в кардановом подвесе, снабженного электродвигателем // Там же. – 2003. – Вып. 33. – С. 80-89.