ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2004. Вып. 34

УДК 531.38, 531.36

©2004. **Б.И. Коносевич**

УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ АСИНХРОННОГО ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ В СПЕЦИАЛЬНЫХ СЛУЧАЯХ

Рассматривается гироскоп в кардановом подвесе, установленный на неподвижном основании в поле силы тяжести и снабженный электродвигателем асинхронного типа. Предполагается, что наружная ось подвеса вертикальна, а силы трения и управляющие силы относительно осей подвеса не действуют. Уравнения движения этой системы допускают семейство решений, описывающих регулярные прецессии или равномерные вращения ротора. Множество таких стационарных движений изображается на плоскости вертикальными прямыми и двумя кривыми. В статье [1] на этих прямых и кривых выделены открытые интервалы, соответствующие устойчивым стационарным движениям, а именно, таким, устойчивость которых устанавливается путем анализа линеаризованных уравнений движения. В граничных точках этих интервалов характеристическое уравнение приведенной системы имеет корни с нулевыми действительными частями. В данной статье с помощью полученного в [2] необходимого и достаточного критерия изучена устойчивость стационарных движений, соответствующих таким граничным точкам: для каждой из граничных точек указаны условия на параметры, при которых имеет место устойчивость и неустойчивость.

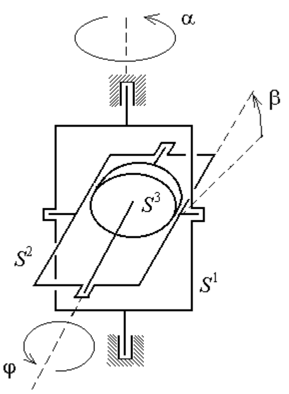

Рис. 1. Гироскоп в кардановом подвесе.

1. Исходные соотношения. Гироскоп в кардановом подвесе представляет собой механическую систему трех твердых тел – наружной рамки S^1, внутренней рамки S^2 и динамически симметричного ротора S^3, – последовательно связанных между собой и с основанием цилиндрическими шарнирами. Для обычно рассматриваемой конструкции гироскопа в кардановом подвесе тела S^1, S^2 обладают определенной симметрией, так что оси подвеса являются для них главными осями инерции; при этом внутренняя ось подвеса ортогональна наружной оси подвеса и оси ротора, и все эти три оси пересекаются в одной точке – центре подвеса (рис. 1).

В статье [3] введена обобщенная модель гироскопа в кардановом подвесе, берущая свое начало от работы [4]. В этом случае тела S^1, S^2 имеют произвольную форму, внутренняя ось подвеса составляет произвольные углы с наружной осью подвеса и осью ротора, и все эти три оси не обязательно пересекаются в одной точке. Положение системы в каждый момент времени t определяют углы α, β, φ, где α – угол поворота S^1 относительно основания, β – угол поворота S^2 относительно S^1, φ – угол поворота ротора S^3 относительно S^2. Система находится в поле силы тяжести.

В [2] для обобщенной модели предполагается, что внутренняя ось подвеса неколлинеарна наружной оси подвеса и оси ротора, а ротор S^3 является динамически симметричным относительно оси своего вращения в S^2. В этом случае обобщенная модель обладает основными свойствами обычного гироскопа в кардановом подвесе. Чтобы обеспечить существование семейства стационарных движений для такой модели, предполагается, что наружная ось подвеса вертикальна (можно также предполагать, что вся система статически уравновешена относительно осей подвеса). Тогда величины G, N, Q в выражении кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2}(G\dot{\alpha}^2 + H\dot{\beta}^2 + C\dot{\varphi}^2 + 2N\dot{\alpha}\dot{\beta} + 2Q\dot{\alpha}\dot{\varphi} + 2R\dot{\beta}\dot{\varphi}) \tag{1}$$

и потенциальная энергия U являются функциями угла β следующего вида

$$\begin{gathered} G(\beta) = g_0 + g_1 \sin\beta + g_2\cos\beta + g_3 \sin 2\beta + g_4\cos 2\beta, \quad N(\beta) = n_0 + n_1 \sin\beta + \\ + n_2\cos\beta, \quad Q(\beta) = q_0 + q_1\sin\beta, \quad U(\beta) = u_0 + u_1\sin\beta + u_2\cos\beta, \end{gathered} \tag{2}$$

причем $q_1 \neq 0$. Здесь постояннаая u_0 является произвольной, а в случае статически уравновешенной системы $U(\beta) \equiv u_0$. Остальные коэффициенты формул (2), а также величины H, R в (1) выражаются через постоянные механические параметры по формулам, которые следуют из формул (6)-(15) статьи [3]. Через C обозначен осевой момент инерции ротора.

На практике тело S^2 является статором, а S^3 – ротором электродвигателя. В случае электродвигателя асинхронного типа алгебраическая сумма L вращающего момента двигателя и момента сил трения относительно оси ротора зависит только от $\dot{\varphi}$, причем $(\dot{\varphi} - \omega)L(\dot{\varphi}) < 0$ при $\dot{\varphi} \neq \omega$ и $L(\dot{\varphi}) = 0$ при $\dot{\varphi} = \omega$. В линейном приближении по $\dot{\varphi} - \omega$ имеем $L = -\lambda(\dot{\varphi} - \omega)$, где $\lambda > 0, \omega \neq 0$ – постоянные. Момент L является обобщенной силой для угла φ. Так как моменты сил трения и управляющих сил относительно осей подвеса предполагаются отсутствующими, то обощенные силы для углов α, β равны 0 и $-dU/d\beta$.

Записав теперь лагранжевы уравнения движения рассматриваемой системы, устанавливаем, что эти уравнения допускают решение вида

$$\dot{\alpha} = \Omega, \quad \beta = \beta_0, \quad \dot{\varphi} = \omega, \tag{3}$$

если постоянные Ω, β_0 связаны соотношением

$$-\Omega[\frac{\Omega}{2}G'(\beta_0) + \omega Q'(\beta_0)] + U'(\beta_0) = 0. \tag{4}$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по β.

Циклической координате α соответствует интеграл лагранжевых уравнений:

$$G(\beta)\dot{\alpha} + N(\beta)\dot{\beta} + Q(\beta)\dot{\varphi} = p \quad (p = \text{const}). \tag{5}$$

Рассматривая формулу (5) как определение величины p, примем p в качестве новой переменной вместо $\dot{\alpha}$. Полагая при этом $\dot{\gamma} = \dot{\varphi} - \omega$, получим вместо исходных лагранжевых уравнений следующую преобразованную систему уравнений движения

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{(p-\omega Q)N + \dot{\beta}(GH - N^2) + \dot{\gamma}(GR - QN)}{G} + \frac{\partial}{\partial\beta}\Big[\frac{(p - \omega Q - \dot{\beta}N - \dot{\gamma}Q)^2}{2G} + U\Big] = 0, \\ &\frac{d}{dt}\frac{(p-\omega Q)Q + \dot{\beta}(GR - QN) + \dot{\gamma}(GC - Q^2)}{G} = L, \quad \frac{dp}{dt} = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Аргумент β у функций G, N, Q, U здесь для краткости не написан. Так как $G(\beta) > 0$ в силу критерия Сильвестра для определенно положительной квадратичной формы (1), то устойчивость любого решения исходной лагранжевой системы относительно $\dot\alpha$, $\dot\beta$, $\dot\varphi$, β эквивалентна устойчивости соответствующего решения системы (6) относительно p, $\dot\beta$, $\dot\gamma$, β. Система двух первых уравнений (6), где величина p фиксирована, называется приведенной системой.

Решению (3) лагранжевых уравнений соответствует решение

$$p = p_0, \quad \beta = \beta_0, \quad \dot\gamma = 0 \tag{7}$$

преобразованной системы (6). Это решение существует, если выполнено условие

$$-\frac{p_0 - \omega Q(\beta_0)}{G(\beta_0)}\left[\frac{G'(\beta_0)}{2G(\beta_0)}(p_0 - \omega Q(\beta_0)) + \omega Q_0'(\beta_0)\right] + U'(\beta_0) = 0, \tag{8}$$

эквивалентное (4). Постоянные Ω, p_0 в решениях (3), (7) связаны вытекающим из (5) соотношением

$$p_0 - \omega Q(\beta_0) = \Omega G(\beta_0). \tag{9}$$

2. Критерий устойчивости. Введем следующую функцию (потенциальную энергию приведенной системы)

$$f(p,\beta) = \frac{[p - \omega Q(\beta)]^2}{2G(\beta)} + U(\beta). \tag{10}$$

Тогда, как легко проверить, условие (8) существования решения (7) выражается равенством $f'(p_0,\beta_0) = 0$. Следовательно, при данном значении p_0 для функции $f(p_0,\beta)$ переменной β имеются только четыре возможности: эта функция в точке $\beta = \beta_0$ имеет A) изолированный минимум, B) изолированный максимум, C) перегиб, D) $f(p_0,\beta) \equiv$ const.

В статье [2] показано, что в случае A решение (7) устойчиво, а в случаях B, C оно неустойчиво. В случае D существует значение p_* постоянной p такое, что $f'(p_*,\beta) = 0$ при всех β. Тогда при $p_0 = p_*$ решение вида (7) существует при любом β_0. Там же установлено, что случай D возможен только для систем специальной конструкции, а именно, удовлетворяющих одной из двух групп соотношений:

$$D_1) \quad g_2 = g_3 = 0, \quad u_1 = u_2 = 0, \quad g_1^2 + 8g_4(g_0 + g_4) = 0 \quad (g_1, g_4 \neq 0);$$

$$D_2) \quad g_2 = g_3 = g_4 = 0, \quad u_2 = 0, \quad 2u_1 g_1 + \omega^2 q_1^2 = 0 \quad (g_1, u_1 \neq 0).$$

При этом в подслучае D_1 при $p_0 = p_*$ и любом β_0 решение (7) неустойчиво, а в подслучае D_2 неустойчивость стационарного решения (7) при $p_0 = p_*$ удалось доказать для всех значений β_0, отличных от точки минимума $U(\beta)$.

Таким образом, условие A наличия изолированного минимума $f(p_0,\beta)$ при $\beta = \beta_0$ является необходимым и достаточным условием устойчивости любого решения вида (7) для любого гироскопа в кардановом подвесе, конструкция которого не удовлетворяет соотношениям D_2.

Следуя [2], запишем условие устойчивости A в форме, удобной для его проверки. Так как $f(p_0,\beta)$ – аналитическая функция β, то изолированный минимум в точке $\beta = \beta_0$ она может иметь только в случае, когда среди ее производных по β в точке $\beta = \beta_0$ имеются отличные от нуля, причем первая из отличных от нуля производных имеет четный порядок n и положительна:

$$f'(p_0,\beta_0) = 0,\ f''(p_0,\beta_0) = 0,\ \dots,\ f^{(n-1)}(p_0,\beta_0) = 0, \quad f^{(n)}(p_0,\beta_0) > 0. \tag{11}$$

В формулу (10) для $f(p,\beta)$ входит $G(\beta)$ в знаменателе, что усложняет вычисление производных высоких порядков от $f(p_0,\beta)$. Поэтому введем вместо $f(p_0,\beta)$ функцию

$$Y(\beta) = 4G(\beta)F(\beta) \quad \big(F(\beta) = f(p_0,\beta) - f(p_0,\beta_0)\big). \tag{12}$$

Соотношения (11) эквивалентны следующим

$$F'(\beta_0) = 0,\ F''(\beta_0) = 0,\ \ \ldots\ \ , F^{(n-1)}(\beta_0) = 0, \quad F^{(n)}(\beta_0) > 0. \tag{13}$$

Учитывая это, с помощью известной формулы для производной любого порядка от произведения двух функций нетрудно показать, что соотношения (13) эквивалентны аналогичным соотношениям для $Y(\beta)$:

$$Y'(\beta_0) = 0,\ Y''(\beta_0) = 0,\ \ \ldots\ \ , Y^{(n-1)}(\beta_0) = 0, \quad Y^{(n)}(\beta_0) > 0. \tag{14}$$

Здесь $n \le 6$. Действительно, подставив в (12) выражение (10) для $f(p,\beta)$, будем иметь

$$Y(\beta) = 2\big[p_0 - \omega Q(\beta)\big]^2 + 4G(\beta)\big[U(\beta) - f(p_0,\beta_0)\big]. \tag{15}$$

Заменив здесь G, Q, U в соответствии с (2), получаем для $Y(\beta)$ выражение вида

$$Y(\beta) = Y_0 + \sum_{k=1}^{3} Y_k^{(1)} \cos k\beta + Y_k^{(2)} \sin k\beta.$$

Если $n > 6$ в (14), то $Y_0 = 0, Y_k^{(1)} = 0, Y_k^{(2)} = 0$ $(k = 1,2,3)$, откуда следует, что $Y(\beta) \equiv 0$. Таким образом, при $n > 6$ соотношения (14) выполняться не могут.

Итак, для асинхронного гироскопа в кардановом подвесе, конструкция которого не удовлетворяет соотношениям D_2, необходимый и достаточный критерий устойчивости стационарного решения (7) выражается соотношениями (14), где n равно 2, 4 или 6. При этом первое из соотношений (14) является условием существования данного решения.

3. Случай гироскопа обычной конструкции. Расмотрим обычную модель гироскопа в кардановом подвесе (рис. 1) и введем следующие обозначения. Пусть C, A – осевой и экваториальный моменты инерции ротора относительно центра подвеса, A_1, B_1, C_1 – моменты инерции внутренней рамки относительно внутренней оси подвеса, нормали к плоскости внутренней рамки в ее центре и относительно оси ротора, C_2 – момент инерции наружной рамки относительно наружной оси подвеса. Пусть, далее, m – масса ротора, g – ускорение свободного падения, $s \ge 0$ – смещение центра масс ротора от центра подвеса вдоль оси ротора. Угол β отсчитывается таким образом, что $\beta = 0$ в положении, когда ось ротора ортогональна наружной оси подвеса.

Полагая для краткости $I_0 = C_2 + B_1 + C$, $I = C_1 + A - B_1 - C$, имеем следующие выражения для величин, входящих в формулу для кинетической энергии (1)

$$\begin{aligned} &G(\beta) = I_0 + I\cos^2\beta, \quad H = A_1 + A, \quad N(\beta) = 0,\\ &Q(\beta) = C\sin\beta, \quad R = 0, \quad U(\beta) = mgs\sin\beta. \end{aligned} \tag{16}$$

Эти выражения можно получить из формул (6)-(15) статьи [3] или же воспользоваться готовыми формулами (см., например, [5, с. 83]). В дальнейшем будем рассматривать нетривиальный случай, когда $I \ne 0$.

Найдем выражения производных $Y^{(k)}(\beta_0)$, $k = \overline{1,6}$, входящих в соотношения (14). Они принимают достаточно простую форму, если с помощью формулы (9) вместо постояннной p_0 ввести угловую скорость прецесии $\Omega = [p_0 - \omega Q(\beta_0)]/G(\beta_0)$ и воспользоваться безразмерными параметрами

$$y = 2\Omega I/\omega C, \quad \varepsilon = 4mgsI/\omega^2 C^2, \quad \lambda = I_0/I. \tag{17}$$

Величина y характеризует угловую скорость прецесии Ω, параметры ε и λ характеризуют смещение центра масс ротора s и распределение масс в системе. Из (17) следует, что при $s \neq 0$ знак ε равен знаку I. А так как $I_0 > 0$, то при $\varepsilon > 0$ будет $\lambda > 0$. Представив λ в виде $\lambda = -1 + (C_2 + C_1 + A)/I$, заключаем, что при $\varepsilon < 0$ будет $\lambda < -1$. В случае $\varepsilon = 0$, то есть при $s = 0$, величина I может иметь любой знак, и поэтому для λ допустимы как значения $\lambda > 0$, так и значения $\lambda < -1$. Итак, множество P допустимых значений параметров ε, λ определено неравенствами

$$\lambda > 0 \quad (\varepsilon \geq 0), \qquad \lambda < -1 \quad (\varepsilon \leq 0). \tag{18}$$

С учетом обозначений (17) из формул (10),(15),(16) находим для $Y(\beta)$ выражение

$$Y(\beta) = 2F_1^2(\beta) + F_2(\beta)F_3(\beta), \tag{19}$$

где

$$\begin{gathered} F_1(\beta) = \sin\beta - \sin\beta_0 - \frac{y}{2}(\lambda + \cos^2\beta_0), \\ F_2(\beta) = \lambda + \cos^2\beta, \quad F_3(\beta) = \varepsilon(\sin\beta - \sin\beta_0) - \frac{y^2}{2}(\lambda + \cos^2\beta_0). \end{gathered} \tag{20}$$

Согласно известной формуле, производная порядка k от функции (19) равна

$$Y^{(k)}(\beta) = 2\sum_{m=0}^{k} C_k^m F_1^{(m)}(\beta) F_1^{(k-m)}(\beta) + \sum_{m=0}^{k} C_k^m F_2^{(m)}(\beta) F_3^{(k-m)}(\beta). \tag{21}$$

Здесь C_k^m – биномиальные коэффициенты: $C_k^m = k(k-1)\dots(k-m+1)/m!$ $(m > 0)$, $C_k^0 = 1$. Чтобы определить $Y^{(k)}(\beta_0)$, $k = \overline{1,6}$, найдем для функций (20) производные $F_1^{(m)}, F_2^{(m)}, F_3^{(m)}(\beta)$, $m = \overline{1,6}$, и воспользуемся формулой (21) при $\beta = \beta_0$. Получим

$$Y'(\beta_0, y, \varepsilon, \lambda) = \cos\beta_0(\lambda + \cos^2\beta_0)[y^2\sin\beta_0 - 2y + \varepsilon], \tag{22}$$

$$\begin{aligned} Y''(\beta_0, y, \varepsilon, \lambda) = {} & y^2(\cos^2\beta_0 - \sin^2\beta_0)(\lambda + \cos^2\beta_0) + 2y\sin\beta_0(\lambda + \cos^2\beta_0) + \\ & + 4\cos^2\beta_0 - \varepsilon\sin\beta_0(\lambda + 5\cos^2\beta_0), \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} Y'''(\beta_0, y, \varepsilon, \lambda) = {} & \cos\beta_0[-4y^2\sin\beta_0(\lambda + \cos^2\beta_0) + 2y(\lambda + \cos^2\beta_0) - \\ & - 12\sin\beta_0 + \varepsilon(12\sin^2\beta_0 - 7\cos^2\beta_0 - \lambda)], \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} Y^{(4)}(\beta_0, y, \varepsilon, \lambda) = {} & 4y^2(\sin^2\beta_0 - \cos^2\beta_0)(\lambda + \cos^2\beta_0) - 2y\sin\beta_0(\lambda + \cos^2\beta_0) - \\ & - 16\cos^2\beta_0 + 12\sin^2\beta_0 + \varepsilon\sin\beta_0(\lambda + 53\cos^2\beta_0 - 12\sin^2\beta_0), \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} Y^{(5)}(\beta_0, y, \varepsilon, \lambda) = {} & \cos\beta_0[16y^2\sin\beta_0(\lambda + \cos^2\beta_0) - 2y(\lambda + \cos^2\beta_0) + \\ & + 30\sin\beta_0 + \varepsilon(61\cos^2\beta_0 - 150\sin^2\beta_0 + \lambda)], \end{aligned} \tag{26}$$

$$Y^{(6)}(\beta_0, y, \varepsilon, \lambda) = 16y^2(\cos^2\beta_0 - \sin^2\beta_0)(\lambda + \cos^2\beta_0) + 2y\sin\beta_0(\lambda + \cos^2\beta_0) + \\ +64\cos^2\beta_0 - 60\sin^2\beta_0 + \varepsilon\sin\beta_0(150\sin^2\beta_0 - 515\cos^2\beta_0 - \lambda). \tag{27}$$

Выше учитывалась зависимость функции Y только от β. Как видно из (19),(20), эта функция зависит также от $\beta_0, y, \varepsilon, \lambda$. Поэтому ее производные по β, взятые при $\beta = \beta_0$, фактически зависят от $\beta_0, y, \varepsilon, \lambda$. Эта зависимость учтена в обозначениях производных в левых частях формул (22)-(27).

Из формулы (16) для $G(\beta)$ следует, что для обычной модели гироскопа в кардановом подвесе не выполнено одно из соотношений D_2, а именно, неравенство $g_1 \neq 0$. Поэтому для такого гироскопа критерий устойчивости стационарного решения может быть сформулирован следующим образом.

Пусть при некоторых допустимых значениях параметров ε, λ величины β_0, y связаны условием $Y'(\beta_0, y, \varepsilon, \lambda) = 0$. Тогда уравнения движения асинхронного гироскопа в кардановом подвесе допускают решение вида (3), где $\Omega = y\omega C/2I$ $(I = C_1 + A - B_1 - C)$. Это решение устойчиво тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих трех условий:

$$Y''(\beta_0, y, \varepsilon, \lambda) > 0; \tag{28}$$

$$Y''(\beta_0, y, \varepsilon, \lambda) = 0,\ Y'''(\beta_0, y, \varepsilon, \lambda) = 0, \quad Y^{(4)}(\beta_0, y, \varepsilon, \lambda) > 0; \tag{29}$$

$$Y''(\beta_0, y, \varepsilon, \lambda) = 0,\ \ldots\ , Y^{(5)}(\beta_0, y, \varepsilon, \lambda) = 0, \quad Y^{(6)}(\beta_0, y, \varepsilon, \lambda) > 0. \tag{30}$$

При заданных значениях ε, λ множество стационарных движениий определяется равенством $Y'(\beta_0, y, \varepsilon, \lambda) = 0$, которое с учетом (22) и вытекающего из (18) неравенства $\lambda + \cos^2\beta_0 \neq 0$ принимает вид

$$\cos\beta_0(y^2\sin\beta_0 - 2y + \varepsilon) = 0.$$

На плоскости β_0, y оно определяет два семейства стационарных движений: одно из них соответствует вертикальным прямым $\beta_0 = \pm\pi/2 \pmod{2\pi}$, а другое – двум кривым

$$y_1(\beta_0, \varepsilon) = \frac{1 + \sqrt{1 - \varepsilon\sin\beta_0}}{\sin\beta_0}, \quad y_2(\beta_0, \varepsilon) = \frac{1 - \sqrt{1 - \varepsilon\sin\beta_0}}{\sin\beta_0}. \tag{31}$$

Построение множества стационарных движений на плоскости β_0, y при различных допустимых значениях ε, λ дано в [1]. В случае $\varepsilon > 0$ такое построение сделано на отрезке $[-3\pi/2; \pi/2]$, а при $\varepsilon \leq 0$ – на отрезке $[-\pi/2; 3\pi/2]$. При этом на плоскости β_0, y точки

$$\begin{aligned} &X_1 = (-\pi/2, -1 - \sqrt{1+\varepsilon}), \quad X_2 = (-\pi/2, -1 + \sqrt{1+\varepsilon}) \qquad (\varepsilon \geq -1); \\ &X_3 = (\pi/2, 1 - \sqrt{1-\varepsilon}), \qquad X_4 = (\pi/2, 1 + \sqrt{1-\varepsilon}) \qquad (\varepsilon \leq 1), \end{aligned} \tag{32}$$

где пересекаются прямые $\beta_0 = \pm\pi/2$ и кривые $y_j(\beta_0, \varepsilon)$, $j = 1, 2$, соответствуют точкам бифуркации в фазовом пространстве уравнений движения гироскопа.

4. Условия устойчивости на кривых $\boldsymbol{y_j(\beta_0, \varepsilon)}$, $\boldsymbol{j = 1, 2}$. Чтобы проанализировать устойчивость стационарных движений, которые соответствуют точкам кривых (31): $y = y_j(\beta_0, \varepsilon)$, $j = 1, 2$, следует рассмотреть функции $Y^{(k)}(\beta_0, y, \varepsilon, \lambda)$, $k = \overline{2, 6}$, на этих кривых и выделить значения $\beta_0, \varepsilon, \lambda$, при которых выполняется одно из соотношений (28)-(30). Подстановку выражений (31) для $y_j(\beta_0, \varepsilon)$, $j = 1, 2$, в формулы (23)-(27)

для $Y^{(k)}$ удобно выполнить в два этапа: сначала заменить в этих формулах линейно входящую величину y выражением

$$y = \frac{1}{2}(y^2 \sin\beta_0 + \varepsilon), \tag{33}$$

следующим из определения y_j, $j = 1, 2$, а затем заменить y по формулам $y_j(\beta_0, \varepsilon) = \varepsilon/(1 \mp \sqrt{1 - \varepsilon \sin\beta_0})$, эквивалентным (31).

Заменим в равенствах (23), (24) для Y'', Y''' линейно входящую величину y выражением (33). Получим функции

$$Y''_*(\beta_0, y, \varepsilon, \lambda) = \cos^2\beta_0 \big[y^2(\lambda + \cos^2\beta_0) + 4(1 - \varepsilon \sin\beta_0)\big], \tag{34}$$

$$Y'''_*(\beta_0, y, \varepsilon, \lambda) = -3\cos\beta_0 \sin\beta_0 \big[y^2(\lambda + \cos^2\beta_0) + 4(1 - \varepsilon \sin\beta_0)\big] - 6\cos^3\beta_0, \tag{35}$$

где под y понимается одна из функций $y_j(\beta_0, \varepsilon)$, $j = 1, 2$.

В точках (β_0, y) кривых (31), отличных от точек бифуркации при $\beta_0 = \pm\pi/2$, знак Y''_* равен знаку выражения в квадратных скобках в формуле (34). Знак этого выражения на данных кривых проанализирован в [1] и найдены допустимые значения параметров ε, λ, при которых существуют интервалы устойчивости на этих кривых, то есть интервалы, где рассматриваемое выражение положительно. Согласно (34), при значениях β_0, y из таких интервалов в соответствующих точках кривых (31) выполняется условие устойчивости (28).

В точках (β_0, y) этих кривых, соответствующих граничным точкам указанных интервалов, выражение в квадратных скобках в (34) обращается в ноль. Поскольку то же самое выражение имеется в формуле (35), то в таких точках рассматриваемых кривых будет $Y'''_* = -6\cos^3\beta_0$. Поэтому в тех граничных точках интервалов устойчивости на кривых (31), которые отличны от точек бифуркации, условия (29), (30) выполняться не могут, так как в этих точках $Y'''_* \neq 0$. Следовательно, всем таким точкам соответствуют неустойчивые стационарные движения.

Полученный результат можно проиллюстрировать геометрически. В [1] показано, что граничные точки интервалов устойчивости на кривых (31), отличные от точек бифуркации, существуют при $\varepsilon < 0$ и некоторых значениях $\lambda < -1$. Для кривой (31) с номером $j = 1, 2$ абсциссы граничных точек обозначены через $\beta_1^{(j)}, \beta_2^{(j)}(\varepsilon, \lambda)$. Они расположены следующим образом:

$$\begin{array}{lll} \beta_1^{(1)}(\varepsilon,\lambda) \in (0; \pi/2), & \beta_2^{(1)}(\varepsilon,\lambda) \in (\pi/2; \pi) & \big(\beta_2^{(1)}(\varepsilon,\lambda) = \pi - \beta_1^{(1)}(\varepsilon,\lambda)\big); \\ \beta_1^{(2)}(\varepsilon,\lambda) \in [-\pi/2; \pi/2), & \beta_2^{(2)}(\varepsilon,\lambda) \in (\pi/2; 3\pi/2] & \big(\beta_2^{(2)}(\varepsilon,\lambda) = \pi - \beta_1^{(2)}(\varepsilon,\lambda)\big). \end{array}$$

При этом для кривой $y = y_j(\beta_0, \varepsilon)$, $j = 1, 2$, условие устойчивости (28) выполнено во всех ее точках, соответствующих значениям β_0 из интервалов

$$\big(\beta_1^{(j)}(\varepsilon,\lambda); \pi/2\big), \quad \big(\pi/2; \beta_2^{(j)}(\varepsilon,\lambda)\big), \qquad j = 1, 2.$$

В [1] на рис. 9 изображены граничные поверхности $\beta_0 = \beta_1^{(j)}(\varepsilon, \lambda)$, $\beta_0 = \beta_2^{(j)}(\varepsilon, \lambda)$ для каждой из кривых $y = y_j(\beta_0, \varepsilon)$. Полученный выше результат означает, что всем точкам этих поверхностей, не лежащим на плоскостях, где $\cos\beta_0 = 0$, соответствуют неустойчивые стационарные движения. Теперь на кривых $y = y_j(\beta_0, \varepsilon)$, $j = 1, 2$, остается изучить только устойчивость для бифуркационных точек (32).

На вертикальных прямых $\beta_0 = \pm\pi/2$ условие устойчивости (28) рассмотрено в [1]. Показано, что при $\varepsilon \geq 0$, когда $\lambda > 0$, условие (28) выполняется на открытых вертикальных интервалах, лежащих на каждой из прямых $\beta_0 = \pm\pi/2$ между двумя точками бифуркации, существующими на данной прямой. При $\varepsilon \leq 0$, когда $\lambda < -1$, условие (28) выполняется на вертикальных лучах, которые лежат на прямых $\beta_0 = \pm\pi/2$ вне замкнутых отрезков с концами в точках бифуркации.

Таким образом, чтобы полностью исследовать устойчивость стационарных движений для обычной модели гироскопа в кардановом подвесе остается изучить устойчивость точек бифуркации (32).

5. Условия устойчивости точек бифуркации. Пусть $Y^{(n)}_{X_k}(\varepsilon,\lambda)$ $(n = \overline{2,6}$; $k = \overline{1,4})$ – значения функций $Y^{(n)}(\beta_0, y, \varepsilon, \lambda)$ в точках бифуркации X_k. Координаты β_0, y этих точек указаны в (32). Подставив в формулу (23) значения β_0, y, равные координатам точек X_k, получим $Y''_{X_k}(\varepsilon,\lambda) = 0,\ k = \overline{1,4}$. Так как в этих точках $\cos\beta_0 = 0$, то из (24), (26) следует, что $Y'''_{X_k}, Y^{(5)}_{X_k}(\varepsilon,\lambda) = 0,\ k = \overline{1,4}$. Таким образом, соотношения (28)-(30), выражающие необходимое и достаточное условие устойчивости стационарных движений, в случае точек бифуркации сводятся к следующим:

$$Y^{(4)}_{X_k}(\varepsilon,\lambda) > 0; \tag{36}$$

$$Y^{(4)}_{X_k}(\varepsilon,\lambda) = 0, \quad Y^{(6)}_{X_k}(\varepsilon,\lambda) > 0. \tag{37}$$

Из соотношений (25), (32) находим выражения функций $Y^{(4)}_{X_k}(\varepsilon,\lambda)$:

$$\begin{aligned}
&Y^{(4)}_{X_1}(\varepsilon,\lambda) = 3\big[\lambda(\sqrt{1+\varepsilon}+1)^2 + 4(1+\varepsilon)\big] \qquad (\varepsilon \geq -1),\\
&Y^{(4)}_{X_2}(\varepsilon,\lambda) = 3\big[\lambda(\sqrt{1+\varepsilon}-1)^2 + 4(1+\varepsilon)\big] \qquad (\varepsilon \geq -1),\\
&Y^{(4)}_{X_3}(\varepsilon,\lambda) = 3\big[\lambda(\sqrt{1-\varepsilon}-1)^2 + 4(1-\varepsilon)\big] \qquad (\varepsilon \leq 1),\\
&Y^{(4)}_{X_4}(\varepsilon,\lambda) = 3\big[\lambda(\sqrt{1-\varepsilon}+1)^2 + 4(1-\varepsilon)\big] \qquad (\varepsilon \leq 1).
\end{aligned} \tag{38}$$

Из формул (27), (32) следуют формулы для функций $Y^{(6)}_{X_k}(\varepsilon,\lambda)$, которые запишем, выделяя в них выражения (38):

$$\begin{aligned}
&Y^{(6)}_{X_1}(\varepsilon,\lambda) = -5Y^{(4)}_{X_1}(\varepsilon,\lambda) - 90\varepsilon, \quad Y^{(6)}_{X_2}(\varepsilon,\lambda) = -5Y^{(4)}_{X_2}(\varepsilon,\lambda) - 90\varepsilon \qquad (\varepsilon \geq -1);\\
&Y^{(6)}_{X_3}(\varepsilon,\lambda) = -5Y^{(4)}_{X_3}(\varepsilon,\lambda) + 90\varepsilon, \quad Y^{(6)}_{X_4}(\varepsilon,\lambda) = -5Y^{(4)}_{X_4}(\varepsilon,\lambda) + 90\varepsilon \qquad (\varepsilon \leq 1).
\end{aligned} \tag{39}$$

В соответствии с (18), множество P всех допустимых значений параметров ε, λ состоит из двух связных подмножеств $P^+ = \{(\varepsilon,\lambda) : \varepsilon \geq 0, \lambda > 0\}$, $P^- = \{(\varepsilon,\lambda) : \varepsilon \leq 0, \lambda < -1\}$. Пусть P_k $(k = \overline{1,4})$ – множество тех допустимых значений ε, λ, при которых существует точка бифуркации X_k. Из формул (32) следует, что $P_1 = P_2$ есть часть $P = P^+ \cup P^-$, лежащая в полуплоскости $\varepsilon \geq -1$, а $P_3 = P_4$ есть часть P, лежащая в полуплоскости $\varepsilon \leq 1$.

Обозначим через $\lambda = \lambda_k(\varepsilon),\ k = \overline{1,4}$, кривую на плоскости ε, λ, определяемую условием $Y^{(4)}_{X_k}(\varepsilon,\lambda) = 0$. Из (38) находим

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(\varepsilon) = -\frac{4(1+\varepsilon)}{(\sqrt{1+\varepsilon}+1)^2}, \quad \lambda_2(\varepsilon) = -\frac{4(1+\varepsilon)}{(\sqrt{1+\varepsilon}-1)^2} \qquad (\varepsilon \geq -1);\\
&\lambda_3(\varepsilon) = -\frac{4(1-\varepsilon)}{(\sqrt{1-\varepsilon}-1)^2}, \quad \lambda_4(\varepsilon) = -\frac{4(1-\varepsilon)}{(\sqrt{1-\varepsilon}+1)^2} \qquad (\varepsilon \leq 1).
\end{aligned}$$

Тогда условию (36) для X_k удовлетворяют те точки плоскости ε, λ, которые принадлежат допустимому множеству P_k и лежат выше графика кривой $\lambda = \lambda_k(\varepsilon)$.

В условии (37) равенство $Y^{(4)}_{X_k}(\varepsilon, \lambda) = 0$ выделяет часть графика кривой $\lambda = \lambda_k(\varepsilon)$, которая лежит в P_k. Неравенство $Y^{(6)}_{X_k}(\varepsilon, \lambda) > 0$ в условии (37) выделяет на этой части графика $\lambda = \lambda_k(\varepsilon)$ точки ε, λ, которым соответствуют устойчивые стационарные движения для X_k. Как показывают формулы (39), для точек X_1, X_2 устойчивые стационарные движения соответствуют той части графика кривой $\lambda = \lambda_k(\varepsilon)$, которая лежит в допустимом множестве P_k при $\varepsilon < 0$, а для точек X_3, X_4 – при $\varepsilon > 0$.

Множество всех допустимых значений ε, λ, при которых стационарные движения, соответствующие бифуркационной точке X_k, удовлетворяют условиям устойчивости (36), (37), обозначим через S_k. Тогда остальным допустимым значениям ε, λ, то есть значениям из множества $U_k = P_k \backslash S_k$, соответствуют неустойчивые стационарные движения.

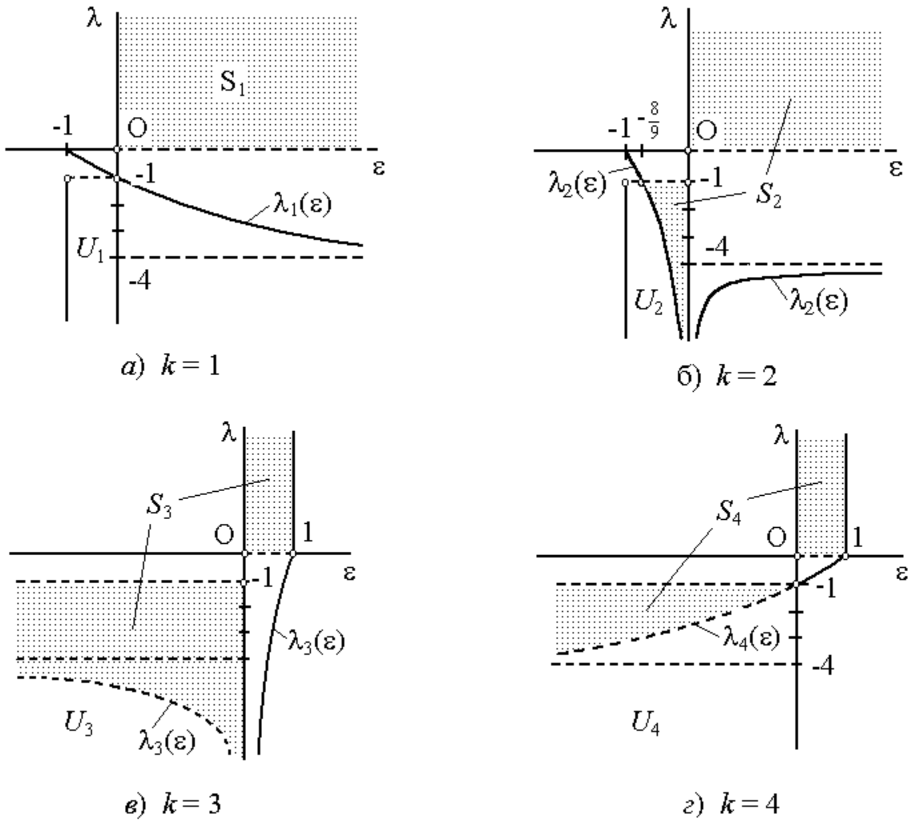

Рис. 2. Множества S_k, U_k устойчивости и неустойчивости для бифуркационных точек X_k.

Множества устойчивости и неустойчивости S_k, U_k $(k = \overline{1,4})$ для бифуркационных точек X_k $(k = \overline{1,4})$ изображены на рис. 2, *а, б, в, г*. Каждое из множеств S_k выделено фоном. Часть границы S_k, изображенная сплошной линией, принадлежит этому множеству, а показанная пунктиром – не принадлежит. Не принадлежат S_k также угловые точки, выделенные кружочками.

Таким образом, с учетом результатов работы [1], для всех стационарных движений асинхронного гироскопа в кардановом подвесе указаны все значения параметров, при которых эти движения устойчивы или неустойчивы.

1. *Коносевич Б.И.* Исследование основного условия устойчивости стационарных движений гироскопа в кардановом подвесе, снабженного электродвигателем // Механика твердого тела. – 2003. – Вып. 33. – С. 80-89.
2. *Коносевич Б.И.* Об устойчивости стационарных движений асинхронного гироскопа в кардановом подвесе // Там же. – 1977. – Вып. 9. – С. 61-72.
3. *Коносевич Б.И.* Скорость ухода оси ротора в обобщенной задаче о гироскопе в кардановом подвесе // Там же. – 1972. – Вып. 4. – С. 82-92.
4. *Харламов П.В.* Составной пространственный маятник // Там же. – С. 73-82.
5. *Лунц Я.Л.* Введение в теорию гироскопов. – М.: Наука, 1972. – 296 с.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`konos@iamm.ac.donetsk.ua`

Получено 21.05.04