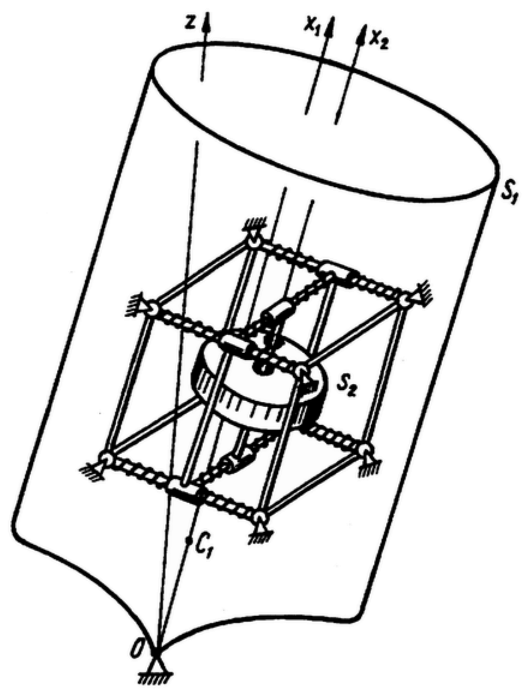
УДК 531.38, 531.36

©2004. **В.Е. Пузырев**

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОМЕРНЫХ ВРАЩЕНИЙ СИММЕТРИЧНОГО ГИРОСКОПА, НЕСУЩЕГО УПРУГО ЗАКРЕПЛЕННЫЙ РОТОР

Рассмотрена следующая механическая система: тяжелый симметричный гироскоп-носитель, в него помещен вращающийся ротор, который может совершать к тому же свободные относительные колебания в плоскости, перпендикулярной оси симметрии носителя. Условия устойчивости равномерных вращений такой системы вокруг главной оси, совпадающей с вертикалью, были получены ранее [1, 2]. В настоящей работе предполагается, что на ротор, наряду с упругой силой, действует сила вязкого трения и изучается вопрос о влиянии этой силы на устойчивость движения всей системы. Получены условия асимптотической устойчивости на основе анализа характеристического уравнения линеаризованной системы, а также другим способом – с использованием авторской методики исследования устойчивости систем с частичной диссипацией энергии.



Гироскоп с упруго закрепленным ротором.

1. Постановка задачи. В работах [1, 2] рассматривалась задача об устойчивости равномерных вращений механической системы гироскоп-маховик, причем маховик может совершать плоско-параллельное движение относительно носителя (см. рисунок). Были получены и проанализированы достаточные условия устойчивости – условия знакоопределенности функции Рауса, а также необходимые условия устойчивости – отсутствие у уравнений первого приближения собственных значений с положительной вещественной частью. Устойчивость при этом была неасимптотической, поскольку механическая система являлась консервативной.

В настоящей работе целью исследования является оценка влияния трения в шарнире (шарнирах), посредством которого ротор крепится в теле-носителе, на устойчивость движения всей системы. Добавляя в уравнения движения механической системы силу вязкого трения и используя обозначения работы [1], уравнения в вариациях запишем в виде

$$\begin{gathered} bz'' + w'' - i(2b-a)z' - 2iw' + (a-b-\mu_1)z - (\mu_2+1)w = 0, \\ z'' + w'' - 2iz' - 2iw' - (\mu_2+1)z + (k-1)w = -hw'. \end{gathered} \tag{1}$$

Переменные z, w являются комплексными, все остальные величины (за исключением мнимой единицы) – вещественными, причем $0 < a < 2b$, $b > 1$, $h > 0$. Нулевому решению системы (1) соответствуют равномерные вращения системы (как гиростата) вокруг оси Ox_1, совпадающей с вертикалью. Это решение будет асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда все корни характеристического уравнения

$$\det\begin{pmatrix} b\lambda^2 - i(2b-a)\lambda + a - b - \mu_1 & \lambda^2 - 2i\lambda - \mu_2 - 1 \\ \lambda^2 - 2i\lambda - \mu_2 - 1 & \lambda^2 + (h-2i)\lambda + k - 1 \end{pmatrix} = 0$$

имеют отрицательные вещественные части. Для нахождения соответствующих условий воспользуемся критерием Гурвица (для комплексных многочленов) [3].

Критерий Гурвица: Пусть полином

$$f(iz) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n + i\,(b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n).$$

Число корней полинома $f(z)$ с отрицательными вещественными частями равно числу перемен знака в ряду $1,\ |B_2|,\ |B_4|,\ \cdots\ |B_{2n}|$, где

$$B_{2s} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_0 & b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Заметим, что в ряду $n+1$ числовых величин n перемен знака возможно только при условии чередования знаков, то есть $|B_2| < 0$, $|B_4| > 0$ и так далее.

2. Условия асимптотической устойчивости и их анализ. Поскольку в рассматриваемой задаче характеристический многочлен имеет вид

$$(b-1)\lambda^4 + [bh + i(a-4b+4)]\lambda^3 + [bk - \mu_1 + 2\mu_2 + 3a - 6b + 6 - i(2b-a)h]\lambda^2 +$$

$$+[(a-b-\mu_1)h - i((2b-a)k - 2\mu_1 + 4\mu_2 + 3a - 4b + 4)]\lambda + (a-b-\mu_1)k - a + b + \mu_1 - (\mu_2+1)^2,$$

то для коэффициентов $a_m,\ b_m\ (m = \overline{0,4})$ получаем

$$a_0 = b-1, \quad a_1 = a - 4b + 4, \quad a_2 = -bk + \mu_1 - 2\mu_2 - 3a + 6b - 6,$$

$$a_3 = (2b-a)k - 2\mu_1 + 4\mu_2 + 3a - 4b + 4, \quad a_4 = (a-b-\mu_1)k - a + b + \mu_1 - (\mu_2+1)^2,$$

$$b_0 = 0, \quad b_1 = -bh, \quad b_2 = (2b-a)h, \quad b_3 = (a-b-\mu_1)h, \quad b_4 = 0.$$

Вычисляя соответствующие определители, находим

$$|B_2| = a_0 b_1, \quad |B_4| = a_0 h^2 \delta_1, \quad |B_6| = -a_0 h^3 \delta_2, \quad |B_8| = a_0 a_4 h^4 \delta_3,$$

где

$$\delta_1 = b^3 k + a^2 + ab - b^3 + 2b^2\mu_2 + b^2 - b\mu_1,$$

$$\delta_2 = (a^4 - a^3 b + 2a^2b^2\mu_2 - 3a^2b\mu_1 - 2ab^3\mu_2 + 2ab^2\mu_1 + b^4\mu_2^2 -$$

$$-2b^3\mu_1\mu_2 + b^2\mu_1^2)k - a^4 + a^3b - 2a^3\mu_2 - a^3 - 2a^2b^2\mu_2 + 2a^2b^2 +$$

$$+3a^2b\mu_1 + a^2b\mu_2^2 - 2a^2\mu_1\mu_2 - a^2\mu_1 + 2ab^3\mu_2 - 2ab^2\mu_1 - 3ab^2\mu_2^2 -$$

$$-2ab^2\mu_2+4ab\mu_1\mu_2+2ab\mu_1-a\mu_1^2-b^4\mu_2^2+2b^3\mu_1\mu_2+2b^3\mu_2^3+b^3\mu_2^2-$$
$$-b^2\mu_1^2-5b^2\mu_1\mu_2^2-2b^2\mu_1\mu_2+4b\mu_1^2\mu_2+b\mu_1^2-\mu_1^3,$$
$$\delta_3=a^4\mu_2^2+2a^2b^2\mu_2^3-4a^2b\mu_1\mu_2^2+2a^2\mu_1^2\mu_2+$$
$$+b^4\mu_2^4-4b^3\mu_1\mu_2^3+6b^2\mu_1^2\mu_2^2-4b\mu_1^3\mu_2+\mu_1^4.$$

Нетрудно заметить, что δ_3 представляет собой квадрат выражения

$$\sigma=a^2\mu_2+b^2\mu_2^2-2b\mu_1\mu_2+\mu_1^2,$$

поэтому для положительности $|B_8|$ необходима положительность a_4, а также неравенство нулю σ, то есть выполнение условия

$$a^2\neq-\frac{(b\mu_2-\mu_1)^2}{\mu_2}. \tag{4}$$

Очевидно, (4) может иметь место только при условии $\mu_2<0$, что соответствует [1] отрицательному значению абсциссы точки C_1 в системе $Oxyz$.

Если применить критерий Гурвица по отношению к полиному $f(1/\lambda)$, то нумерация коэффициентов изменится на "обратную", при этом в матрице (3) каждый индекс l следует заменить на $n-l$, добавляя перед величинами a, b с нечетными номерами знак минус. Тогда $|\widetilde{B}_2|=-a_4b_3$, значит, необходима положительность b_3. Таким образом условие (4), а также

$$a-b-\mu_1>0, \tag{5}$$

$$(a-b-\mu_1)(k-1)-(\mu_2+1)^2>0 \tag{6}$$

являются необходимыми для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1). Покажем, что эти же условия являются и достаточными, то есть обеспечивают положительность выражений δ_1, δ_2.

Обозначим

$$k=1+\frac{(\mu_2+1)^2}{a-b-\mu_1}+\Delta k$$

и подставим в выражение для δ_1. С точностью до положительного множителя $a-b-\mu_1$ получим

$$b^3\Delta k+a^3-a^2\mu_1+2ab^2\mu_2-2ab\mu_1+b^3\mu_2^2-2b^2\mu_1\mu_2+b\mu_1^2$$

или, выполняя тождественные преобразования,

$$b^3\Delta k+b(a-\mu_1+b\mu_2)^2+a^2(a-b-\mu_1).$$

Последнее, очевидно, положительно, поскольку согласно (6) $\Delta k>0$.

Для δ_2 имеем следующее представление: $\delta_2=\delta_{21}\Delta k+\delta_{20}$, где

$$\delta_{21}=a^5-2a^4b-a^4\mu_1+2a^3b^2\mu_2+a^3b^2-2a^3b\mu_1-4a^2b^3\mu_2-$$
$$-2a^2b^2\mu_1\mu_2+5a^2b^2\mu_1+3a^2b\mu_1^2+ab^4\mu_2^2-2ab^3\mu_1-ab^2\mu_1^2-$$
$$-b^5\mu_2^2-b^4\mu_1\mu_2^2+2b^4\mu_1\mu_2+2b^3\mu_1^2\mu_2-b^3\mu_1^2-b^2\mu_1^3,$$

$$\delta_{20} = (a^2\mu_2 + b^2\mu_2^2 - 2b\mu_1\mu_2 + \mu_1^2)^2.$$

Таким образом, осталось показать положительность выражения δ_{21}. Рассматривая его как многочлен относительно μ_2 и выделяя полный квадрат, получаем

$$\delta_{21} = (a - b - \mu_1)[(b^2\mu_2 + a^2 - ab - b\mu_1)^2 + a^2b(a - b - \mu_1)].$$

Ввиду (5), легко видеть, что δ_{21}, а, следовательно, и δ_2, положительно.

Учитывая вышесказанное, приходим к заключению, что условия (4) - (6) являются необходимыми и достаточными для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2). Последний факт означает устойчивость нулевого решения в исходных [1] вещественных переменных, а, согласно теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению [4], асимптотическую устойчивость равномерных вращений системы вокруг первой главной оси, совпадающей с вертикалью.

Заметим, что условия (5), (6) совпадают с достаточными условиями устойчивости этого движения при отсутствии диссипации энергии, полученными в [1]. Условие (4) можно рассматривать как запрет своего рода резонансного соотношения между угловыми скоростями носителя и ротора.

3. Асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (2). Редуцированный подход.

Найдем условия асимптотической устойчивости изучаемого движения, используя результаты работ [5, 6]. Дополним (2) сопряженными уравнениями и изменим в целях удобства порядок следования переменных (и уравнений) на $w,\ \overline{w},\ z,\ \overline{z}$ (в указанных работах вначале следуют переменные, по которым происходит диссипация энергии). Запишем матрицы коэффициентов $\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = i\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & a-2b & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2b-a \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} k-1 & 0 & -\mu_2-1 & 0 \\ 0 & k-1 & 0 & -\mu_2-1 \\ -\mu_2-1 & 0 & a-b-\mu_1 & 0 \\ 0 & -\mu_2-1 & 0 & a-b-\mu_1 \end{pmatrix}.$$

Разбивая $\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C}$ на матрицы-блоки второго порядка, имеем

$$\boldsymbol{A}_{11} = \boldsymbol{A}_{12} = \boldsymbol{A}_{21} = \boldsymbol{E},\ \boldsymbol{A}_{22} = b\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{B}_{11} = \boldsymbol{B}_{12} = \boldsymbol{B}_{21} = 2i\,\mathrm{diag}(1, -1),$$

$$\boldsymbol{B}_{22} = (b - \frac{a}{2})\boldsymbol{B}_{11},\ \boldsymbol{C}_{11} = (k-1)\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{C}_{12} = \boldsymbol{C}_{21} = -(\mu_2 + 1)\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{C}_{22} = (a - b - \mu_1)\boldsymbol{E},$$

где $\boldsymbol{E}$ – единичная матрица второго порядка. Для асимптотической устойчивости нулевого решения собственные значения матрицы $\boldsymbol{C}$ должны быть положительны. Нетрудно убедиться в том, что это требование приводит к неравенствам (5), (6). Кроме того [5, 6], необходимо выполнение следующего требования:

$$\boldsymbol{D}_{21}(\lambda_0)\boldsymbol{\gamma_0} \neq 0 \tag{7}$$

ни для какого собственного числа λ_0 линейного дифференциального оператора $\boldsymbol{d}_{22}$.

Здесь

$$\boldsymbol{d}_{2j} = \boldsymbol{A}_{2j}\frac{d^2}{dt^2} + \boldsymbol{B}_{2j}\frac{d}{dt} + \boldsymbol{C}_{2j} \quad (j = 1; 2),$$

$\boldsymbol{D}_{2j}$ – соответствующая λ-матрица, $\boldsymbol{\gamma}_0$ – собственный вектор оператора $\boldsymbol{d}_{22}$, который соответсвует значению λ_0.

Поскольку $\boldsymbol{D}_{2j} = \mathrm{diag}(f_j(\lambda), \overline{f_j}(\lambda))$ $(j = 1; 2)$, где

$$f_1(\lambda) = \lambda^2 - 2i\lambda - \mu_2, \quad f_2(\lambda) = \lambda^2 - (2b - a)i\lambda + a - b - \mu_1,$$

то собственные числа каждой из этих матриц являются попарно комплексно сопряженными, при этом собственный вектор $\boldsymbol{\gamma}(\lambda_0)$ коллинеарен вектору $\mathrm{col}(1, 0)$, а $\boldsymbol{\gamma}(\overline{\lambda_0})$ – вектору $\mathrm{col}(0, 1)$. Это означает, что равенство (7) возможно тогда и только тогда, когда многочлены f_1 и f_2 имеют общий корень. Вычисляя их результант, имеем

$$R(f_1, f_2) = a^2(\mu_2 - 1) + b^2(\mu_2 - 1)^2 - 2b\mu_1(\mu_2 - 1) + \mu_1^2 = \sigma.$$

Таким образом, условие (7) приводит к неравенству (4) (и наоборот), а найденные условия устойчивости совпадают с полученными в п. 2. Отметим, что данный способ представляется более простым (как минимум, менее громоздким), хотя, в отличие от "прямой"процедуры, не позволяет оценивать величину характеристических показателей, то есть делать вывод о скорости затухания возмущенного решения.

1. *Пузырев В.Е.* Об устойчивости движения одной механической системы с упругой связью // Механика твердого тела. – 1996. – Вып. 26(I). – С. 49–54.
2. *Пузырев В.Е.* Анализ необходимых условий устойчивости равномерных вращений гироскопа Лагранжа с колеблющимся ротором // Там же. – 1995. – Вып. 27. – С. 83–87.
3. *Н.Г. Чеботарев, Н.Н. Мейман* Проблема Рауса-Гурвица для полиномов и целых функций // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1949. – XXVI. – 332 с.
4. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 530 с.
5. *Puzyrev V.E.* Stability of non-stationary motions of mechanical systems with partial energy dissipation // 7-th Conf. on dynamical systems – theory and applications (Lodz, Poland. December 8 – 10, 2003): Proc. – 2003. – V. 1. – P. 375 - 382.
6. *Пузырёв В.Е.* Об устойчивости решения линейной автономной системы, находящейся под действием сил сопротивления с неполной диссипацией энергии // Тр. ИПММ НАНУ. – 2003. – Вып. 8. – С. 111-115.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`techmech@iamm.ac.donetsk.ua`

Получено 10.06.04