ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2004. Вып. 34

УДК 531.36 : 62-50

©2004. **А.С. Андреев, Е.Б. Ким**

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ

В работе излагается решение задачи об оптимальной стабилизации невозмущенного движения автономной управляемой системы на основе знакопостоянной функции Ляпунова. Решается задача об оптимальной стабилизации неустойчивого верхнего положения маятника.

С конца 50-х начала 60-х годов прошлого века большое развитие получила теория оптимальных процессов. Среди проблем оптимального управления важное место занимают задачи об оптимальной стабилизации заданного движения. Как указано в [1], такими задачами называются задачи о построении регулирующих воздействий, которые обеспечивают устойчивое осуществление желаемого движения при наилучшем возможном качестве переходного процесса. Методы исследования проблем оптимальной стабилизации тесно переплетаются с классическими методами теории устойчивости. В частности, метод динамического программирования Р.Беллмана [2], один из основных в задачах оптимального управления, является по существу объединением методов вариационного исчисления с методом функций Ляпунова [1]. Глубокое развитие прямого метода Ляпунова в исследовании устойчивости [3, 4] позволило найти эффективные общие способы решения задач об оптимальной стабилизации.

1. Постановка и анализ задачи. Рассмотрим постановку задачи об оптимальной стабилизации в соответствии с [1] и покажем, что в ряде случаев ее решение находится через знакопостоянную оптимальную функцию Ляпунова.

Пусть движение управляемой системы описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \qquad \mathbf{X}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \tag{1}$$

где $\mathbf{x}$ – вектор n-мерного действительного пространства R^n с нормой $\|\mathbf{x}\| = (x_1^2 + ... + x_n^2)^{1/2}$, выражающий собой контролируемые параметры системы; $\mathbf{u}$ – вектор m-мерного действительного пространства R^m с нормой $\|\mathbf{u}\| = (u_1^2 + ... + u_m^2)^{1/2}$, представляющий управляющее воздействие; $\mathbf{X}$ – вектор-функция, определенная и непрерывная по $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in G \times R^m$, $G = \{\mathbf{x} \in R^n : \|\mathbf{x}\| < H, 0 < H \leq +\infty\}$, и такая, что для некоторого класса U непрерывных управляющих воздействий $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}),\ \mathbf{u}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ решения системы (1) определены и единственны для каждого $\mathbf{x}_0 \in G$.

Согласно [1] задача о стабилизации состоит в нахождении управляющего воздействия $\mathbf{u} \in U$, при котором невозмущенное движение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1) асимптотически устойчиво.

Решение задачи о стабилизации может достигаться на некотором множестве $U' \subset U$ управляющих воздействий. Тогда целесообразно поставить задачу о выборе управления $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0(\mathbf{x})$ с точки зрения наилучшего качества переходного процесса, состоящего в достижении минимума функционала

$$I(\mathbf{u}) = \int_0^\infty W(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt, \qquad W(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0,$$

где $W(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ есть некоторая непрерывная неотрицательная скалярная функция переменных $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in G \times R^m$, характеризующая качество переходного процесса.

Изложим постановку задачи об оптимальной стабилизации в соответствии с [1] и проведем анализ некоторых ее решений, используя принятые в [1] обозначения: $\mathbf{x} = \mathbf{x}[t] = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ есть движение, удовлетворяющее начальному условию $\mathbf{x}[0] = \mathbf{x}(0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ и порождаемое управляющим воздействием $\mathbf{u}[t] = \mathbf{u}(\mathbf{x}[t])$,

$$\frac{d\mathbf{x}[t]}{dt} \equiv \mathbf{X}\left(\mathbf{x}[t], \mathbf{u}[t]\right).$$

Определение 1. Задача об оптимальной стабилизации состоит в нахождении управляющего воздействия $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0(\mathbf{x})$, обеспечивающего асимптотическую устойчивость невозмущенного движения $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, и такого, что по сравнению с любыми другими управляющими воздействиями $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$, решающими задачу о стабилизации $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, для всех $\mathbf{x}_0 \in \bar{G}_0$, $\bar{G}_0 = \{\mathbf{x} \in R^n : \|\mathbf{x}\| \leq H_0 < H\}$, выполняется неравенство

$$\int_0^\infty W(\mathbf{x}^0\,[t]\,, \mathbf{u}^0[t])dt \leq \int_0^\infty W(\mathbf{x}[t], \mathbf{u}[t])dt$$

при условиях $\mathbf{x}^0[0] = \mathbf{x}[0] = \mathbf{x}_0$.

Пусть $V : G \to R^+$ есть скалярная, непрерывно дифференцируемая функция Ляпунова со значением $V(\mathbf{0}) = 0$. Следуя [1], введем выражение

$$B[V, \mathbf{x}, \mathbf{u}] = \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\right) + W(\mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

где $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^n a_i b_i$.

Имеет место следующая теорема [1, 5].

Теорема 1. Если для системы (1) существуют функция $V^0(\mathbf{x})$ и управление $\mathbf{u}^0(\mathbf{x})$, удовлетворяющие условиям:

1) для всех $\mathbf{x} \in G$ выполняются соотношения

$$V^0(\mathbf{x}) \geqslant 0, \quad B[V^0, \mathbf{x}, \mathbf{u}^0(\mathbf{x})] \equiv 0,$$

при этом $V^0(\mathbf{x}) = 0$ только при $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;

2) множество $\{W^0[\mathbf{x}] = W(\mathbf{x}, \mathbf{u}^0(\mathbf{x})) = 0\}$ не содержит движений системы (1) с управляющим воздействием $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0(\mathbf{x})$, кроме $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;

3) для всех $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in G \times R^m$ выполнено неравенство

$$B[V^0, \mathbf{x}, \mathbf{u}] \geqslant 0.$$

Тогда управляющее воздействие $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0(\mathbf{x})$ решает задачу об оптимальной стабилизации. При этом выполняется равенство

$$\int_0^\infty W(\mathbf{x}^0[t], \mathbf{u}^0[t])dt = \min \int_0^\infty W(\mathbf{x}[t], \mathbf{u}[t])dt = V(\mathbf{x}_0).$$

Замечание 1. Функция $V^0(\mathbf{x})$ в теореме 1 определяет для начальной точки $\mathbf{x}_0$ оптимальное значение функционала $V(\mathbf{x}_0)$. Поэтому ее называют оптимальной функцией Ляпунова [1], и из этого представления $V^0(\mathbf{x})$ следует, что в решении задачи об оптимальной стабилизации эта функция является если не определенно-положительной, то обязательно неотрицательной.

Рассмотрим управляемую линейную систему, описываемую уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \tag{2}$$

(здесь $\mathbf{x} \in R^n$, $\mathbf{u} \in R^m$, $\mathbf{A} \in R^{n\times n}$ – матрица размерности $n \times n$, $\mathbf{B} \in R^{n\times m}$ – матрица размерности $n \times m$), в задаче об оптимальной стабилизации ее невозмущенного движения $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ с минимизируемым функционалом в виде

$$I(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\mathbf{x}^{'} P\mathbf{x} + \mathbf{u}^{'}\mathbf{Q}\mathbf{u})dt, \tag{3}$$

где $\mathbf{P} \in R^{n\times n}$, $\mathbf{Q} \in R^{m\times m}$ есть, соответственно, неотрицательная и положительно определенная матрицы, $\mathbf{x}^{'}\mathbf{P}\mathbf{x} \geqslant 0$ и $\mathbf{u}^{'}\mathbf{Q}\mathbf{u} \geqslant 0$ ($\mathbf{u}^{'}\mathbf{Q}\mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$) для всех $\mathbf{x} \in R^n$ и $\mathbf{u} \in R^m$.

Если предположить, что решение поставленной задачи существует, функция Ляпунова $V^0(\mathbf{x})$ является неотрицательной квадратичной формой

$$V^0(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^{'}\mathbf{C}\mathbf{x},$$

а оптимальное управляющее воздействие является линейным: $\mathbf{u}^0(\mathbf{x}) = \mathbf{S}\mathbf{x}$, тогда соотношение $B[V^0, \mathbf{x}, \mathbf{u}^0(\mathbf{x})] \equiv 0$ сводится к матричному уравнению

$$\mathbf{CA} + \mathbf{A}'\mathbf{C} + \mathbf{CBS} + \mathbf{S}'\mathbf{B}'\mathbf{C} + \mathbf{P} + \mathbf{S}'\mathbf{QS} = \mathbf{0}.$$

Имеет место следующая теорема об оптимальной стабилизации $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (2) с оптимизируемым функционалом (3).

Теорема 2 [7]. Пусть выполнены условия:

1) система (2) является полностью управляемой, это означает, что ранг матрицы ($\mathbf{B}$, $\mathbf{AB}$, …, $\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}$) равен n,

$$\operatorname{rank}(\mathbf{B},\ \mathbf{AB}, \ldots,\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}) = n; \tag{4}$$

2) матрица $\mathbf{P}$ в выражении (3) является положительно определенной.

Тогда справедливы следующие заключения:

1) Задача об оптимальной стабилизации системы (2) с минимумом функционала (3) имеет решение, при этом оптимальная функция Ляпунова $V^0(\mathbf{x})$ является положительно определенной квадратичной формой

$$V^0(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^{'}\mathbf{C}\mathbf{x};$$

2) управляющее воздействие

$$\mathbf{u}^0(\mathbf{x}) = \mathbf{S}\mathbf{x} \equiv -\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^{'}\mathbf{C}\mathbf{x}$$

является единственным решением задачи об оптимальной стабилизации системы (2) с функционалом (3).

Проанализируем кратко задачу об оптимальной стабилизации $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (2) с функционалом (3) при невыполнении условий теоремы 2.

Если не выполнено условие 1) теоремы 2, то есть если система (2) является неполностью управляемой, то она может быть приведена к виду [6,7]

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{\mathbf{x}}^1 & = & \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}^1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}^2 + \mathbf{B}\mathbf{u}, \\ \dot{\mathbf{x}}^2 & = & \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}^2, \end{array} \right. \tag{5}$$

где $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$ есть составляющие нового вектора переменных $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}^1 \in R^k$, $\mathbf{x}^2 \in R^{n-k}$, а $\mathbf{A}_{11}$, $\mathbf{A}_{12}$, $\mathbf{A}_{22}$ и $\mathbf{B}$ есть преобразованные матрицы соответствующих размерностей. При этом первая подсистема из (5) является полностью управляемой в своем пространстве, а вторая – неуправляемой.

Если вторая подсистема системы (5) является асимптотически устойчивой, то первая подсистема, а с ней и вся система (2) является стабилизируемой. Если же вторая подсистема не является асимптотически устойчивой, то стабилизация (а, значит, и оптимальная стабилизация) невозможна.

Если не выполняется условие 2) теоремы 2, то необязательно оптимальная функция Ляпунова $V(\mathbf{x})$ должна являться положительно определенной квадратичной по $\mathbf{x}$ формой.

Действительно, рассмотрим частный случай, при котором система (2) приводится к виду

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{\mathbf{x}}^1 & = & \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}^1 + \mathbf{B}\mathbf{u}, \\ \dot{\mathbf{x}}^2 & = & \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}^2 \end{array} \right. \tag{6}$$

с асимптотически устойчивой матрицей $\mathbf{A}_{22}$ и с минимизируемым функционалом, приводимым к виду

$$I(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\int_0^\infty ((\mathbf{x}^1)'\mathbf{P}_{11}\mathbf{x}^1 + \mathbf{u}'\mathbf{Q}\mathbf{u})dt, \tag{7}$$

где $\mathbf{P}_{11}$ и $\mathbf{Q}$ – положительно определенные матрицы.

Используя теорему 2, находим, что оптимальное управляющее воздействие в задаче (6)–(7) существует в виде $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}^1)$ и является единственным, но минимизируемый функционал I является положительно определенной квадратичной функцией по части переменных, только по $\mathbf{x}^1$.

Пример 1. Рассмотрим в линейном приближении задачу о стабилизации математического маятника в верхнем, неустойчивом положении равновесия моментом, приложенным к нему на оси подвеса. При соответствующем выборе масштабов времени, координат и усилий, уравнения возмущенного движения запишутся в виде [1]

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + u, \tag{8}$$

где $x_1 = \varphi$ – угол отклонения маятника от вертикали, $x_2 = \dot{\varphi}$, u – управляющий момент, приложенный к маятнику.

Положим, что критерием качества выбора управления является функционал

$$I(u) = \int_0^\infty u^2 dt, \tag{9}$$

выражающий минимизацию затрат ресурсов на управление.

При $u = 0$ для системы (8) существует инвариантное множество $x_1 + x_2 = 0$, относительно которого положение $x_1 = x_2 = 0$ асимптотически устойчиво. Поэтому очевидно, что на множестве $\{x_1 + x_2 = 0\}$ оптимальная функция Ляпунова в силу вида оптимизируемого функционала (9) обращается в нуль, $V^0(x_1, x_2) = 0$ для $(x_1, x_2) \in \{x_1 + x_2 = 0\}$.

Составим для задачи (8), (9) выражение

$$B[V, \mathbf{x}, u] = \frac{\partial V}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial V}{\partial x_2}(x_1 + u) + \frac{1}{2}u^2. \tag{10}$$

Полагая $V^0(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2$, находим значение $u^0(x_1, x_2) = -2(x_1 + x_2)$, при котором выражение (10) имеет для $V = V^0(x_1, x_2)$ строгий минимум, равный нулю. Непосредственно несложно убедиться, что при $u = -2(x_1 + x_2)$, положение равновесия $x_1 = x_2 = 0$ системы (8) асимптотически устойчиво. Тем самым управляющее воздействие $u^0 = -2(x_1 + x_2)$ решает задачу об оптимальной стабилизации (8), (9).

Рассмотренный пример показывает, что решение ряда задач об оптимальной стабилизации сводится к отысканию оптимальной функции Ляпунова, не являющейся положительно определенной функцией.

2. Знакопостоянные функции в задаче об оптимальной стабилизации. Введем согласно [8] следующие определения.

Определение 2. Невозмущенное движение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ устойчиво относительно множества M, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для каждого $\mathbf{x}_0 \in \{\|\mathbf{x}\| < \delta\} \bigcap M$ движение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ удовлетворяет условию $\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant 0$.

Определение 3. Невозмущенное движение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ асимптотически устойчиво относительно множества M, если оно устойчиво и существует число $H_2 \leqslant H_1$, такое, что для каждого $\mathbf{x}_0 \in \{\|\mathbf{x}\| < H_2\} \bigcap M$ движение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ неограниченно приближается к $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ при $t \to +\infty$, то есть если $\mathbf{x}_0 \in \{\|\mathbf{x}\| < H_2\} \bigcap M$, тогда

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}.$$

Теорема 3. Предположим, что существуют функция $V^0(\mathbf{x})$ и управляющее воздействие $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0(\mathbf{x})$, $\mathbf{u} \in U$ такие что:

1) для всех $\mathbf{x} \in G_1 = \{\|\mathbf{x}\| < H_1 > 0\}$ выполняются соотношения

$$V^0(\mathbf{x}) \geqslant 0, \quad B[V^0, \mathbf{x}, \mathbf{u}^0(\mathbf{x})] \equiv 0;$$

2) для любого $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ $(\mathbf{u} \in U)$, в области G_0 справедливо неравенство

$$B[V^0, \mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})] \geqslant 0;$$

3) множество $\{V^0(\mathbf{x}) > 0\} \bigcap \{W^0(\mathbf{x}) = 0\}$ $(W^0(\mathbf{x}) = W(\mathbf{x}, \mathbf{u}^0(\mathbf{x})))$ не содержит движений системы при $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0(\mathbf{x})$;

4) невозмущенное движение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1) при $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0(\mathbf{x})$ асимптотически устойчиво относительно множества $\{V^0(\mathbf{x}) = 0\}$.

Тогда управляющее воздействие $\mathbf{u}^0(\mathbf{x})$ решает задачу об оптимальной стабилизации невозмущенного движения $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Доказательство. Из условий 3) и 4) теоремы следует, что невозмущенное движение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1) при $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0(\mathbf{x})$ асимптотически устойчиво [8] с некоторой областью притяжения Γ_0.

При этом из условия 1) теоремы следует, что для каждого возмущенного движения $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0(t, \mathbf{x}_0)$ при $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0(\mathbf{x})$ с начальной точкой $\mathbf{x}_0 \in \Gamma_0$ имеет место соотношение

$$I(\mathbf{u}^0) = \int\limits_0^\infty W(\mathbf{x}^0[t], \mathbf{u}^0[t])dt = -\int\limits_0^\infty \frac{dV^0[t]}{dt}\Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^0[t]} dt = -(\lim_{t\to+\infty} V^0[t] - V(\mathbf{x}_0)) = V(\mathbf{x}_0).$$

Для любого другого управляющего воздействия $\mathbf{u} = \mathbf{u}^1(\mathbf{x})$, $\mathbf{u}^1 \in U$, обеспечивающего стабилизацию $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, из условия 2) теоремы будем иметь

$$I(\mathbf{u}^1) = \int\limits_0^\infty W(\mathbf{x}^1[t], \mathbf{u}^1[t])dt \geq -\int\limits_0^\infty \frac{dV^0[t]}{dt}\Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^1[t]} dt \geq V(\mathbf{x}_0).$$

Тем самым теорема доказана.

Полученный результат несложно распространить и для задачи с областью притяжения R^n.

Теорема 4. В дополнение к условиям теоремы 3, справедливых для всех $\mathbf{x} \in R^n$, допустим также, что выполнено условие

5) каждое движение системы (1) при $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0(\mathbf{x})$ ограничено, $\|\mathbf{x}^0(t, \mathbf{x}_0)\| \leqslant L = L(\triangle) = \mathrm{const}$ для всех $t \geqslant 0$ и $\mathbf{x}_0 \in \{\|\mathbf{x}\| \leq \triangle\}$.

Тогда управляющее воздействие $\mathbf{u}^0(\mathbf{x})$ решает задачу о глобальной оптимальной стабилизации.

Пример 2. Вновь, как в примере 1, рассмотрим задачу о стабилизации математического маятника в верхнем, неустойчивом положении равновесия моментом, приложенным к нему на оси подвеса. Но, в отличие от предыдущего (примера 1), будем, следуя [1], полагать, что управляющий момент вырабатывается исполнительным механизмом, который является интегрирующим звеном с управляющим воздействием u. Согласно [1], уравнения первого приближения имеют вид

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_3, \quad \frac{dx_3}{dt} = u. \tag{11}$$

В отличие от рассмотренного в [1] функционала

$$I(u) = \int_0^\infty (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + u^2)dt,$$

рассмотрим задачу об оптимальной стабилизации невозмущенного движения системы (11) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ с минимизируемым функционалом в виде

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_0^\infty (x_3^2 + u^2)dt. \tag{12}$$

Для поставленной задачи составляем выражение (10)

$$B[V, \mathbf{x}, u] = \frac{\partial V}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial V}{\partial x_2}(x_1 + x_3) + \frac{\partial V}{\partial x_3}u + \frac{1}{2}(x_3^2 + u^2).$$

Из условия минимума этого выражения по u находим возможное оптимальное управляющее воздействие

$$u^0 = -\frac{\partial V}{\partial x_3}.$$

Из уравнения

$$B[V^0, \mathbf{x}, u^0] = \frac{\partial V^0}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial V^0}{\partial x_2}(x_1 + x_3) + \frac{1}{2}x_3^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V^0}{\partial x_3}\right)^2 = 0$$

находим возможную оптимальную функцию Ляпунова и соответствующее выражение $u^0(\mathbf{x})$

$$V^0(x_1, x_2) = 4(x_1 + x_2)^2 + 4(x_1 + x_2)x_3 + \frac{3}{2}x_3^2,$$
$$u^0(\mathbf{x}) = -4(x_1 + x_2) - 3x_3. \tag{13}$$

Из этого построения следует выполнение условий 1) и 2) теоремы 3. Для производной функции $V^0(\mathbf{x})$ при $u = u^0(\mathbf{x})$ имеем

$$\dot{V}^0(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}\left(4(x_1 + x_2) + 3x_3\right)^2 - \frac{1}{2}x_3^2.$$

Непосредственно несложно убедиться, что невозмущенное движение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ асимптотически устойчиво относительно множества $\{V^0(\mathbf{x}) = 0\} = \{x_3 = 0,\ \ x_1 + x_2 = 0\}$. На основании теоремы 3 находим, что управляющее воздействие (13) является оптимальным в задаче (11), (12). Так как система (11) и $u^0(\mathbf{x})$ являются линейными, $u^0(\mathbf{x})$ является решением об оптимальной глобальной стабилизации.

3. Об оптимальной стабилизации линейных систем. Рассмотрим применение теорем 3 и 4 к задаче об оптимальной стабилизации линейной системы (2) с критерием качества в виде функционала (3), где $\mathbf{P}$ – неотрицательная, а $\mathbf{Q}$ – положительно определенная матрица. Аналогично [1] находим, что решение задачи сводится к матричному управлению относительно $\mathbf{C}$

$$\mathbf{CA} + \mathbf{A}'\mathbf{C} - \mathbf{CBQ}^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{C} + \mathbf{P} = \mathbf{0}. \tag{14}$$

Учитывая, что локальная асимптотическая устойчивость линейных систем влечет за собой глобальную асимптотическую устойчивость, имеем следующий результат.

Теорема 5. Пусть уравнение (14) имеет решение в виде неотрицательной матрицы $\mathbf{C} = \mathbf{C}^0$, причем невозмущенное движение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ неуправляемой системы (2), то есть системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$, асимптотически устойчиво относительно множества $\{\mathbf{x}'\mathbf{C}^0\mathbf{x} = 0\}$. Тогда управляющее воздействие

$$\mathbf{u}^0(\mathbf{x}) = -\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{Cx}$$

решает задачу об оптимальной стабилизации невозмущенного движения $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (2) с критерием качества (3).

Замечание 2. Теорема 5 определяет достаточные условия оптимальной стабилизации линейной системы (2) с критерием качества (3), когда матрица $\mathbf{P}$ не является положительно определенной. Покажем на примере, что существование решения уравнения (14) совместно с условием управляемости пары матриц $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ недостаточно для существования решения задачи (2), (3).

Вновь рассмотрим пример 2 и примем критерием качества функционал

$$I_1(u) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty u^2 dt, \tag{15}$$

то есть считаем, что в общей форме функционала (3) матрица $\mathbf{P} = \mathbf{0}$. Согласно [1], условия управляемости (4) в примере выполнены.

Проводя вычисления, аналогичные случаю функционала (12), находим возможную оптимальную функцию $V^0(\mathbf{x})$ и возможное оптимальное управляющее воздействие:

$$V_*^0 = (x_1 + x_2 + x_3)^2, \quad u_*^0 = -2(x_1 + x_2 + x_3).$$

Непосредственными вычислениями можно найти, что для любой начальной точки (x_{10}, x_{20}, x_{30}) значение $V_*^0(x_{10}, x_{20}, x_{30})$ будет являться значением функционала (15) на движения $(x_1^0(t), x_2^0(t), x_3^0(t))$ системы (11) при $u = u_*^0(x_1, x_2, x_3)$ минимальным по сравнению со значениями на движениях при любых других $u = u^1(x_1, x_2, x_3)$, таких, что

$$V\left(x_1^1(t), x_2^1(t), x_3^1(t)\right) \to 0 \text{ при } t \to +\infty.$$

Однако, невозмущенное движение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ при $u = u_*^0(x_1, x_2, x_3)$ будет являться лишь устойчивым, для любого возмущенного движения будет выполняться свойство

$$\lim_{t\to+\infty} x_k^0(t) = x_k^0 = \text{const} \quad (k = \overline{1,3}), \quad x_1^0 + x_3^0 = 0, \quad x_2^0 = 0.$$

Таким образом, если обратиться к теореме 2, условие положительной определенности матрицы $\mathbf{P}$ в этой теореме является очень существенным.

Заключение. В работе получены результаты, дополняющие классические результаты об оптимальной стабилизации движений стационарных систем [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 02-01-00877), программы "Университеты России"(проект УР-04.01.053) и в рамках программы "Государственная поддержка ведущих научных школ"(НШ-2000.2003.1).

1. *Красовский Н.Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений. – В кн.: Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. Дополнение 4. – М.: Наука, 1966. – С.475-515.
2. *Беллман Р., Гликсберг И., Гросс О.* Некоторые вопросы математической теории процессов управления. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 336 с.
3. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 530 с.
4. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. – М.: Мир, 1980. – 301 с.
5. *Красовский Н.Н.* Обобщение теорем второго метода Ляпунова – В кн.: Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. Доп. 3. – М.: Наука, 1966. – С.463-474.
6. *Воронов А.А.* Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. – М.: Наука, 1979. – 335 с.
7. *Афанасьев В.И., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. – М.: Высшая школа, 1989. – 448 с.
8. *Булгаков Н.Г.* Знакопостоянные функции в теории устойчивости. – Минск, 1984. – 80 с.

Ульяновский гос. ун-т, Россия
AndreevAS@ulsu.ru

Получено 01.10.04