ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2004. Вып. 34

УДК 517.929 : 531.36

©2004. **А.С. Андреев, С.В. Павликов**

НЕЗНАКООПРЕДЕЛЕННЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОНЕЧНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В работе предложено развитие метода функционалов Ляпунова в направлении использования знакопостоянных и немонотонных функционалов. Полученные результаты применяются в решении задач о стабилизации положения равновесия математического маятника и стационарных вращательных движений твердого тела с неподвижной точкой управляющими моментами с запаздыванием.

1. Предельные уравнения. Пусть R^p – линейное действительное пространство p – векторов $\mathbf{x}$; $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_p)'$ с нормой $|\mathbf{x}|$ ($(\cdot)'$ – операция транспонирования); $h > 0$ – действительное число, C – банахово пространство непрерывных функций $\boldsymbol{\varphi} : [-h, 0] \to R^p$ с нормой $\|\boldsymbol{\varphi}\| = \sup(|\boldsymbol{\varphi}(s)|, -h \le s \le 0)$; для $H > 0$ пространство $C_H = \{\boldsymbol{\varphi} \in C : \|\boldsymbol{\varphi}\| < H\}$; если $\mathbf{x} : R \to R^p$ есть непрерывная функция, то для $t \in R$ функция $\mathbf{x}_t \in C$ определяется равенством $\mathbf{x}_t(s) = \mathbf{x}(t+s)$, $-h \le s \le 0$; под $\dot{\mathbf{x}}(t)$ понимается правосторонняя производная.

Рассматривается функционально-дифференциальное уравнение с конечным запаздыванием

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_t), \qquad \mathbf{f}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}, \tag{1}$$

где $\mathbf{f} : R^+ \times C_H \to R^p$ есть непрерывная функция, удовлетворяющая условиям [1, 2]:

a) ограничена на каждом множестве $R^+ \times \bar{C}_L$, $\bar{C}_L = \{\boldsymbol{\varphi} : \|\boldsymbol{\varphi}\| \le L < H\}$, то есть для всех $(t, \boldsymbol{\varphi}) \in R^+ \times \bar{C}_L$ справедливо неравенство

$$|\mathbf{f}(t, \boldsymbol{\varphi})| \le m(L);$$

b) удовлетворяет условию Липшица по $\boldsymbol{\varphi}$ на каждом компактном множестве $K \subset C_H$, то есть для любых $t \in R^+$ и $\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2 \in K$ справедливо неравенство

$$|\mathbf{f}(t, \boldsymbol{\varphi}_2) - \mathbf{f}(t, \boldsymbol{\varphi}_1)| \le l(K)\|\boldsymbol{\varphi}_2 - \boldsymbol{\varphi}_1\|;$$

c) равномерно непрерывна на каждом множестве $R^+ \times K$, где K – произвольное компактное множество из C_H, то есть для любого числа $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, такое, что для всех $(t_1, \boldsymbol{\varphi}_1), (t_2, \boldsymbol{\varphi}_2) \in R^+ \times K$, удовлетворяющих условиям $|t_2 - t_1| \le \delta$, $\|\boldsymbol{\varphi}_2 - \boldsymbol{\varphi}_1\| \le \delta$, выполняется неравенство

$$|\mathbf{f}(t_2, \boldsymbol{\varphi}_2) - \mathbf{f}(t_1, \boldsymbol{\varphi}_1)| \le \varepsilon.$$

Из первого условия следует сглаживание решений уравнения (1) при возрастании t, в частности, если $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \alpha, \boldsymbol{\varphi})$ есть решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию $\mathbf{x}_\alpha = \boldsymbol{\varphi}$, то для значений $t \ge \alpha + h$ функция $\mathbf{x}_t \in \Gamma$, где $\Gamma \subset C_H$ есть объединение семейства вложенных компактных множеств, $\Gamma = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$, $K_1 \subset K_2 \subset ... \subset K_n \subset ...$ [2].

Из второго условия следует единственность решения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \alpha, \boldsymbol{\varphi})$ уравнения (1), удовлетворяющего начальному условию $\mathbf{x}_\alpha = \boldsymbol{\varphi}$, при этом это решение определено на максимальном интервале $[\alpha - h, \beta)$, и если $\beta < \infty$, то $\|\mathbf{x}_t(\alpha, \boldsymbol{\varphi})\| \to H$ при $t \to \beta$, где $\mathbf{x}_t(\alpha, \boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{x}(t + s, \alpha, \boldsymbol{\varphi})$, $-h \le s \le 0$ [2].

Из третьего условия следует предкомпактность семейства сдвигов $\Phi = \{\mathbf{f}_\tau : \mathbf{f}_\tau(t, \boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{f}(\tau + t, \boldsymbol{\varphi}), \tau \in R^+\}$ в некотором пространстве F непрерывных функций, определенных на множестве $R \times \Gamma$ [2].

Таким образом, для каждой последовательности $t_n \to \infty$ существуют подпоследовательность $\{t_{nk}\}$ и функция $\mathbf{f}^* \in F$ такие, что последовательность функций $\mathbf{f}_k(t, \boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{f}(t_{nk} + t, \boldsymbol{\varphi})$ сходится в F к функции $\mathbf{f}^*$. Обозначив семейство предельных функций как Φ^*, отметим, что если $\mathbf{f}^* \in \Phi^*$, тогда $\mathbf{f}^*(\tau + t, \boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{f}^*_\tau \in \Phi^*$ для каждого $\tau \in R$.

Уравнение

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}^*(t, \mathbf{x}_t), \qquad \mathbf{f}^* \in \Phi^*, \tag{2}$$

где функция $\mathbf{f}^*$ определена на множестве $R \times \Gamma$, называется предельным к уравнению (1) [2].

Заметим, что условие вида b) для функции $\mathbf{f}^*$ также выполняется. Поэтому для каждой начальной точки $(\alpha, \boldsymbol{\varphi}) \in R \times \Gamma$ решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t, \alpha, \boldsymbol{\varphi})$ уравнения (2) является единственным. Так как $\mathbf{f}^*_\alpha \in \Phi^*$ для каждого $\alpha \in R$, то будем для каждого уравнения (2) его решения определять при $\alpha = 0 : \mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t, \boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{x}^*(t, 0, \boldsymbol{\varphi})$.

При определении взаимосвязи решений уравнения (1) и решений уравнения (2) будем пользоваться результатами работы [1].

Пусть $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \alpha, \boldsymbol{\varphi})$ – решение, определенное для всех $t \ge \alpha - h$, и $\omega^+(\alpha, \boldsymbol{\varphi})$ – его положительное предельное множество в пространстве C: точка $\mathbf{p} \in \omega^+(\alpha, \boldsymbol{\varphi})$, если существует последовательность $t_n \to \infty$ такая, что $\mathbf{x}^{(n)}_t(\alpha, \boldsymbol{\varphi}) \to \mathbf{p}$ при $n \to \infty$, где $\mathbf{x}^{(n)}_t(\alpha, \boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{x}(t_n + s, \alpha, \boldsymbol{\varphi})$, $-h \le s \le 0$.

Посредством предельных уравнений (2) определяется следующее свойство квазиинвариантности множества $\omega^+(\alpha, \boldsymbol{\varphi})$ [2].

Теорема 1. Если $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \alpha, \boldsymbol{\varphi})$ есть решение уравнения (1), определенное и ограниченное, $|\mathbf{x}(t, \alpha, \boldsymbol{\varphi})| \le H_0 < H$ для всех $t \ge \alpha - h$, то для каждой предельной точки $\mathbf{p} \in \omega^+(\alpha, \boldsymbol{\varphi})$ существует предельное уравнение (2) такое, что для его решения $\mathbf{x}^*(t, 0, \mathbf{p})$ выполняется соотношение $\mathbf{x}^*_t(0, \mathbf{p}) \in \omega^+(\alpha, \boldsymbol{\varphi})$ для всех $t \in R$.

Это свойство, аналогичное свойству инвариантности положительного предельного множества решения автономного уравнения [1], позволило обосновать применение функционалов Ляпунова со знакопостоянной производной в задачах о предельном поведении решении неавтономного уравнения (1) [3, 4].

2. Знакопостоянные функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости нулевого решения уравнения (1). Предположим, что правая часть уравнения (1) такова, что $\mathbf{f}(t, \boldsymbol{\varphi}) \to \mathbf{f}^*(\boldsymbol{\varphi})$ при $t \to +\infty$ равномерно по $\boldsymbol{\varphi} \in K \subset C_H$, где $\mathbf{f}^* : C_H \to R^p$ есть некоторая непрерывная функция, то есть для любого компакта $K \subset C_H$ и произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдется число $T = T(\varepsilon, K) > 0$ такое, что для всех $t \ge T$ и $\boldsymbol{\varphi} \in K$ выполняется неравенство

$$|\mathbf{f}(t, \boldsymbol{\varphi}) - \mathbf{f}^*(\boldsymbol{\varphi})| < \varepsilon.$$

В этом случае уравнение (1) называется асимптотически автономным, и семейство всех предельных уравнений (2) состоит из одного уравнения

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}^*(\mathbf{x}_t). \tag{3}$$

Соответственно теорема 1 принимает следующую форму.

Теорема 2. Если $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \alpha, \boldsymbol{\varphi})$ есть решение уравнения (1), определенное и ограниченное, $|\mathbf{x}(t, \alpha, \boldsymbol{\varphi})| \leq H_0 < H$ для всех $t \geq \alpha - h$, то для каждой предельной точки $\mathbf{p} \in \omega^+(\alpha, \boldsymbol{\varphi})$ решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t, \mathbf{p})$, $\mathbf{x}_0^* = \mathbf{p}$ уравнения (3), исходящее из этой точки, будет определено для всех $t \in R$ и таково, что $\mathbf{x}_t^*(\mathbf{p}) \in \omega^+(\alpha, \boldsymbol{\varphi})$ для $t \in R$.

Из этого свойства на основании теорем 2.1 и 2.3 работы [2] выводится следующее условие устойчивости нулевого решения уравнения (1).

Теорема 3. Для равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы нулевое решение предельного уравнения (3) было асимптотически устойчиво.

Непосредственно из свойства непрерывной зависимости решений уравнения (1) от возмущения его правой части имеем следующий результат.

Теорема 4. Если нулевое решение уравнения (3) неустойчиво, то и нулевое решение уравнения (1) неустойчиво.

Пусть $V : R^+ \times C_H \to R$ есть некоторый непрерывный функционал, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \alpha, \boldsymbol{\varphi})$ – некоторое решение уравнения (1). Посредством равенства

$$\dot{V}_{(1)}(\alpha, \boldsymbol{\varphi}) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{1}{2}(V(\alpha + h, \mathbf{x}_{\alpha+h}(\alpha, \boldsymbol{\varphi})) - V(\alpha, \boldsymbol{\varphi}))$$

можно определить верхнюю правостороннюю производную функционала V в точке $(\alpha, \boldsymbol{\varphi})$. Аналогично для функционала $V : C_H \to R$ определяется его производная $\dot{V}_{(3)}(\boldsymbol{\varphi})$ относительно уравнения (3) в точке $\boldsymbol{\varphi} \in C_H$.

Определение 1. Решение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ уравнения (3) устойчиво относительно множества $N \subset C_0 = \{\boldsymbol{\varphi} \in C : \|\boldsymbol{\varphi}\| < H_0, 0 < H_0 < H\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\varphi})$ этого уравнения будет удовлетворять неравенству $|\mathbf{x}(t, \boldsymbol{\varphi})| < \varepsilon$ для всех $t \geq -h$ и $\boldsymbol{\varphi} \in \{\|\boldsymbol{\varphi}\| < \delta\} \bigcap N$.

Определение 2. Решение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ уравнения (3) асимптотически устойчиво относительно множества $N \subset C_0$, если оно устойчиво относительно N и существует $\delta_0 > 0$ такое, что для любого $\boldsymbol{\varphi} \in \{\|\boldsymbol{\varphi}\| < \delta_0\} \bigcap N$ решение $x(t, \boldsymbol{\varphi}) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Теорема 5. Пусть для уравнения (3) в области C_0 можно найти функционал $V^*(\boldsymbol{\varphi}) \geq 0$, $V^*(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, имеющий производную $\dot{V}^*_{(3)}(\boldsymbol{\varphi}) \leq 0$, при этом:

1) решение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ уравнения (3) асимптотически устойчиво относительно множества $\{V^*(\boldsymbol{\varphi}) = 0\}$;

2) множество $\{V^*(\boldsymbol{\varphi}) > 0\} \bigcap \{\dot{V}^*_{(3)}(\boldsymbol{\varphi}) = 0\}$ не содержит решений уравнения (3).

Тогда решение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ исходного уравнения (1) равномерно асимптотически устойчиво.

Доказательство теоремы проводится следующим образом. Из ее условий следует, что нулевое решение уравнения (3) асимптотически устойчиво. Но тогда по теореме 3 имеем искомый результат.

Некоторым видоизменением доказываются следующие две теоремы, в которых $a : R^+ \to R^+$ есть функция типа Хана [5].

Теорема 6. Пусть для уравнения (1) в области C_0 можно найти функционал $V = V(t, \boldsymbol{\varphi}) \geq 0$, $V(t, \boldsymbol{\varphi}) \leq a(\|\boldsymbol{\varphi}\|)$, имеющий производную $\dot{V}_{(1)}(t, \boldsymbol{\varphi}) \leq 0$, и такой, что

$V(t,\boldsymbol{\varphi}) \to V^*(\boldsymbol{\varphi})$ при $t \to +\infty$ равномерно по $\boldsymbol{\varphi} \in K$ для каждого компакта $K \subset C_0$, при этом для уравнения (3) выполнено условие 1) теоремы 5 относительно функционала $V^*(\boldsymbol{\varphi})$.

Тогда решение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ исходного уравнения (1) равномерно устойчиво.

Теорема 7. Если в условиях теоремы 6 для уравнения (3) выполнено также условие 2) теоремы 5, то решение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ исходного уравнения (1) равномерно асимптотически устойчиво.

3. Немонотонные функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости. Для каждого $t \in R^+$ обозначим через $\{\boldsymbol{\varphi} \in C_0 : V(t,\boldsymbol{\varphi}) > 0\}$ множество точек $\boldsymbol{\varphi} \in C_0$, для которых функционал $V(t,\boldsymbol{\varphi})$ удовлетворяет неравенству $V(t,\boldsymbol{\varphi}) > 0$.

Допустим, что производная $\dot{V}_{(1)}(t,\boldsymbol{\varphi})$ функционала $V(t,\boldsymbol{\varphi})$ в силу уравнения (1) для значений $(t,\boldsymbol{\varphi}) \in R^+ \times \{\boldsymbol{\varphi} \in C_0 : V(t,\boldsymbol{\varphi}) > 0\}$ удовлетворяет неравенству

$$\dot{V}_{(1)}(t,\boldsymbol{\varphi}) \le -W(t,\boldsymbol{\varphi}) \le 0,$$

где $W : R^+ \times C_0 \to R^+$ есть непрерывный функционал, являющийся ограниченным и равномерно непрерывным на множестве $R^+ \times K$ при каждом компактном множестве $K \subset C_0$.

Семейство сдвигов $\Phi_W = \{W_\tau(t,\boldsymbol{\varphi}) = W(\tau + t,\boldsymbol{\varphi})\}$, также как и семейство Φ, будет предкомпактно в некотором пространстве F_W функционалов $W : R \times \Gamma_0 \to R^+$, $\Gamma_0 = C_0 \bigcap \Gamma$. И, таким образом, можно определить семейство предельных к W функционалов $\{W^* \in F_W : R \times \Gamma_0 \to R^+\}$ и семейство предельных пар $(\mathbf{f}^*, W^*)$ [2].

Определение 3. Пусть $(\mathbf{f}^*, W^*)$ есть предельная пара, определяемая последовательностью $t_n \to +\infty$. Задаваемое функционалом V для любых $t \in R$ и $c \in R$ множество $V_\infty^{-1}(t,c)$ определим как множество точек $\boldsymbol{\varphi} \in \Gamma_0$, для каждой из которых существует последовательность $\{\boldsymbol{\varphi}_n \in C_0 : \boldsymbol{\varphi}_n \to \boldsymbol{\varphi}\}$ такая, что при $n \to \infty$ имеет место соотношение $V(t_n + t, \boldsymbol{\varphi}_n) \to c$. В частности, $V_\infty^{-1}(t,0) = \{\boldsymbol{\varphi} \in \Gamma_0 : \exists \boldsymbol{\varphi}_n \to \boldsymbol{\varphi}, V(t_n + t, \boldsymbol{\varphi}_n) \to 0$ при $n \to \infty\}$.

Теорема 8. Предположим, что для уравнения (1) в области $R^+ \times C_0$ можно найти непрерывный функционал $V = V(t,\boldsymbol{\varphi})$, $V(t,\mathbf{0}) = 0$ такой, что:

1) $V(t,\boldsymbol{\varphi}) \ge a(|\boldsymbol{\varphi}(0)|)$ для каждой функции $\boldsymbol{\varphi} \in C_0$ такой, что $\|\boldsymbol{\varphi}\| = |\boldsymbol{\varphi}(0)|$;

2) $\dot{V}_{(1)}(t,\boldsymbol{\varphi}) \le -W(t,\boldsymbol{\varphi}) \le 0$ для $(t,\boldsymbol{\varphi}) \in R^+ \times \{\boldsymbol{\varphi} \in C_0 : V(t,\boldsymbol{\varphi}) > 0\}$;

3) для каждой предельной пары $(\mathbf{f}^*, \mathbf{W}^*)$ множество $\{V_\infty^{-1}(t,c) : c = \text{const} \ge 0\} \bigcap [\{W^*(t,\boldsymbol{\varphi}) = 0\}$ не содержат решений уравнения (2), кроме нулевого $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;

4) множество $\{V_\infty^{-1}(t,c) :\ c \le 0\}$ не содержит решений $\mathbf{x}^*(t,\boldsymbol{\varphi})$ с начальной точкой $\boldsymbol{\varphi} \in \{V_\infty^{-1}(t,c) :\ c \le 0,\ ||\boldsymbol{\varphi}|| = |\boldsymbol{\varphi}(0)| > 0\}$.

Тогда решение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ уравнения (1) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Устойчивость нулевого решения уравнения (1) в силу условий 1) и 2) теоремы доказана в работе [5]. При этом, как там указано, область $N^-(t) = \{\boldsymbol{\varphi} \in C_0 : V(t,\boldsymbol{\varphi}) \le 0\}$ полуинвариантна, то есть если решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t,\alpha,\boldsymbol{\varphi})$ уравнения (1) при $t = \beta \ge \alpha$ окажется в этой области, $\mathbf{x}_\beta(\alpha,\boldsymbol{\varphi}) \in N^-(\beta)$, тогда $\mathbf{x}_t(\alpha,\boldsymbol{\varphi}) \in N^-(t)$ для всех $t \ge \beta$.

Пусть для произвольного $\alpha \ge 0$ и некоторого $\varepsilon_0 > 0$ число $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon_0,\alpha) > 0$ определяется из свойства устойчивости. Таким образом, решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t,\alpha,\boldsymbol{\varphi})$, $\boldsymbol{\varphi} \in \{\|\boldsymbol{\varphi}\| < \delta_0\}$ ограничено, $|\mathbf{x}(t,\alpha,\boldsymbol{\varphi})| < \varepsilon_0$ для всех $t \ge \alpha$.

Если это решение остается в области $\{V(t,\boldsymbol{\varphi}) > 0\}$ для всех $t \ge \alpha$, то, согласно теореме 2.1 из [3], свойство $\mathbf{x}(t,\alpha,\boldsymbol{\varphi}) \to \mathbf{0}$ при $t \to +\infty$ следует из условия 3) теоремы.

Исследуем предельное поведение решения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \alpha, \boldsymbol{\varphi})$ такого, что $\mathbf{x}_t(\alpha, \boldsymbol{\varphi}) \in \in N^-(t)$ для всех $t \geq \beta \geq \alpha$. Для этого положим $\mu(\gamma) = \sup(|\mathbf{x}(t, \alpha, \boldsymbol{\varphi})|, t \geq \gamma \geq \beta)$. Эта функция невозрастающая, $\mu(\gamma) \searrow \mu_0 \leq \mu(\beta) < \varepsilon_0$ при $\gamma \to +\infty$. Если $\mu_0 = 0$, то свойство $\mathbf{x}(t, \alpha, \boldsymbol{\varphi}) \to \mathbf{0}$ при $t \to +\infty$ опять выполнено.

Допустим, что $\mu_0 > 0$. Тогда существует последовательность $t_k \to +\infty$ такая, что

$$\lim_{k \to \infty} |\mathbf{x}(t_k, \alpha, \boldsymbol{\varphi})| = \mu_0. \tag{4}$$

Из последовательности $t_k \to +\infty$ выберем подпоследовательность $t_{k_j} \to +\infty$, для которой можно определить предельное уравнение (2) и соответствующее множество $\{V_\infty^{-1}(t, c), c \leq 0\}$. В соответствии с теоремой 1 (см. также [2]) последовательность $\{\mathbf{x}_{k_j}(t) = \mathbf{x}(t_{k_j} + t, \alpha, \boldsymbol{\varphi})\}$ будет сходиться равномерно по $t \in [-T, T]$ для каждого числа $T > 0$ к решению $\mathbf{x}^*(t, \boldsymbol{\varphi}^*)$ уравнения (2), где $\boldsymbol{\varphi}^* = \lim_{j \to \infty} \mathbf{x}_{t_{kj}}(\alpha, \boldsymbol{\varphi})$.

Очевидно, что $\boldsymbol{\varphi}^* \in N^-(0)$, $\mathbf{x}_t^* \in N^-(t)$ для всех $t \in R$. При этом из предположения (4) следует, что $\|\boldsymbol{\varphi}^*\| = |\boldsymbol{\varphi}(0)| > 0$. Но это противоречит условию 4) теоремы.

Таким образом, для решения $\mathbf{x}(t, \alpha, \boldsymbol{\varphi})$ уравнения (1) такого, что $\mathbf{x}_t \in N^-(t)$ для $t \geq \beta \geq \alpha$, возможно только $\mu_0 = 0$, что и доказывает теорему.

На основе расширения определений 1 и 2 устойчивости решения $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ относительно решений семейства предельных уравнений и соответствующих им предельных множеств доказана следующая теорема.

Теорема 9. Предположим, что для уравнения (1) в области $R^+ \times C_0$ можно найти непрерывный функционал $V = V(t, \boldsymbol{\varphi})$, $V(t, \mathbf{0}) = 0$, $|V(t, \boldsymbol{\varphi})| \leq a_1(\|\boldsymbol{\varphi}\|)$ для $(t, \boldsymbol{\varphi}) \in \in R^+ \times C_0$ такой, что:

1) $V(t, \boldsymbol{\varphi}) \geq a_2(|\boldsymbol{\varphi}(0)|)$ для каждой функции $\boldsymbol{\varphi} \in C_0$ такой, что $\|\boldsymbol{\varphi}\| = |\boldsymbol{\varphi}(0)|$;

2) $\dot{V}_{(1)}(t, \boldsymbol{\varphi}) \leq -W(t, \boldsymbol{\varphi}) \leq 0$ для $(t, \boldsymbol{\varphi}) \in R^+ \times \{\boldsymbol{\varphi} \in C_0 : V(t, \boldsymbol{\varphi}) > 0\}$;

3) для каждой предельной пары $(\mathbf{f}^*, W^*)$ множество $\{V_\infty^{-1}(t, c) : c = \text{const} > 0\} \bigcap \bigcap \{W^*(t, \boldsymbol{\varphi}) = 0\}$ не содержит решений $\mathbf{x}^*(t, \boldsymbol{\varphi})$ уравнения (2);

4) решение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ асимптотически устойчиво относительно множества $\{V_\infty^{-1}(t, c) : c \leq 0\}$ равномерно по совокупности предельных уравнений (2).

Тогда решение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ уравнения (1) равномерно асимптотически устойчиво.

Теоремы 8 и 9 дополняют и развивают результаты работ [4-6].

4. Задачи. *Задача о стабилизации маятника в верхнем неустойчивом положении.* Рассмотрим в линейной постановке задачу о стабилизации математического маятника в верхнем, неустойчивом положении равновесия моментом, приложенным к нему на оси подвеса.

Согласно [7], уравнения линейного приближения можно привести к виду

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_3, \quad \frac{dx_3}{dt} = u, \tag{5}$$

где $x_1 = \varphi$ – угол отклонения маятника от вертикали, $x_2 = \dot{\varphi}$, u – управляющий момент, приложенный к маятнику.

Допустим, что в системе управления маятником координаты x_1, x_2, x_3 определяются с запаздыванием $\tau = \tau(t)$, $0 \leq \tau(t) \leq h$; $\tau(t)$ есть равномерно непрерывная по $t \in R^+$ функция, $\tau(t) \to \tau_0$ при $t \to +\infty$.

Определим управляющий момент u посредством равенства

$$u = -4x_1(t - \tau(t)) + x_2(t - \tau(t)) - 3x_3(t - \tau(t)). \tag{6}$$

Если функционал $V(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ определить равенством

$$V = 4(\varphi_1(0) + \varphi_2(0))^2 + 4(\varphi_1(0) + \varphi_2(0))\varphi_3(0) + \frac{3}{2}\varphi_3^2(0) +$$
$$+ \frac{1}{16h} \int\limits_{-2h}^{0} \left(\int\limits_{s}^{0} (4(\varphi_1(u) + \varphi_2(u))^2 + \varphi_3^2(u)) du \right) ds,$$

то можно найти, что этот функционал, являясь неотрицательным, имеет производную $\dot{V}(t, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, в силу (5), (6) удовлетворяющую при $h < 1/64$ неравенству

$$\dot{V}(t, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \leq -W(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \leq 0,$$

при этом множество $\{W = 0\} = \{V = 0\} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \ \varphi_1(s) + \varphi_2(s) = 0, \varphi_3(s) = 0, -h \leq s \leq 0\}$. Можно показать, что решение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ предельного уравнения, совпадающего по форме с (5), (6) для $\tau(t) = \tau_0$, асимптотически устойчиво относительно множества $\{V = 0\}$. На основании теоремы 7 можно утверждать, что нулевое положение системы (5) при управляющем моменте (6) будет глобально равномерно асимптотически устойчиво.

Задача о стабилизации вращательного движения твердого тела. Пусть для тела с неподвижной точкой O моменты инерции относительно главных осей Ox, Oy и Oz есть A, B и C, а p, q, r есть проекции угловой скорости на эти оси. При отсутствии внешних сил тело может совершать стационарное вращательное движение вида

$$p = q = 0, \qquad r = r_0 = \text{const} > 0. \tag{7}$$

Для решения задачи о стабилизации этого движения управляющими моментами M_1, M_2, M_3 составим уравнения возмущенного движения

$$\begin{cases} A\dot{x}_1 = (B - C)x_2(r_0 + x_3) + M_1, \\ B\dot{x}_2 = (C - A)(r_0 + x_3)x_1 + M_2, \\ C\dot{x}_3 = (A - B)x_1 x_2 + M_3, \end{cases} \tag{8}$$

где $x_1 = p, x_2 = q, x_3 = r - r_0$.

Допустим, что в системе управления телом координаты x_1, x_2 и x_3 определяются с запаздываниями $\tau_1(t), \tau_2(t)$ и $\tau_3(t)$, $0 \leq \tau_k(t) \leq h > 0$.

Применение теорем 8 и 9 для решения задачи о стабилизации движения (7) моментами

$$M_1 = -b_1 x_1(t - \tau_1(t)), \quad M_2 = -b_1 x_2(t - \tau_2(t)), \quad M_3 = -b_2 x_3(t - \tau_3(t)) \tag{9}$$

позволяет ее разделить на две задачи: о стабилизации по x_1 и x_2 на основе первых двух уравнений системы (8); об асимптотической устойчивости по x_3 на основе третьего уравнения при $x_1 = x_2 = 0$.

Рассмотренные задачи могут быть решены при условии $A \geq B > C$ (или $A \leq B < C$) с применением знакопостоянных функционалов

$$V_1(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2}A(C - A)\varphi_1^2(0) + \frac{1}{2}B(B - C)\varphi_2^2(0) +$$
$$+ \mu_1 \int\limits_{-2h}^{-h} \left(\int\limits_{s}^{0} \varphi_1^2(\nu) d\nu \right) ds + \mu_2 \int\limits_{-2h}^{-h} \left(\int\limits_{s}^{0} \varphi_2^2(\nu) d\nu \right) ds,$$

$$\mu_1 = \frac{b_1 r_0 (B-C)(C-A)}{2A} + \frac{b_1^2 (C-A)}{2A}, \quad \mu_2 = \frac{b_1 r_0 (B-C)(C-A)}{2B} + \frac{b_1^2 (B-C)}{2B};$$

$$V_2(\varphi_3) = \frac{1}{2} C \varphi_3^2(0) + \frac{b_2^2}{2C} \int\limits_{-2h}^{-h} \left(\int\limits_{s}^{0} \varphi_3^2(\nu) d\nu \right) ds,$$

имеющих знакопостоянные производные противоположного знака при значениях коэффициентов усиления b_1 и b_2 таких, что

$$0 < hb_1 < B - (C-A) r_0 h, \quad 0 < hb_2 < C. \tag{10}$$

По теореме 9 выводим, что вращение (7) вокруг наибольшей и наименьшей осей инерции под действием моментов (9) с коэффициентами усиления, удовлетворяющими условиям (10), равномерно асимптотически устойчиво.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 02-01-00877), программы "Университеты России"(проект УР-04.01.053) и в рамках программы "Государственная поддержка ведущих научных школ"(НШ-2000.2003.1).

1. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с.
2. *Андреев А.С., Хусанов Д.Х.* Предельные уравнения в задаче об устойчивости функционально-дифференциального уравнения // Диф. уравнения. – 1998. – **34**, № 4. – С.435-440.
3. *Андреев А.С., Хусанов Д.Х.* К методу функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости и неустойчивости // Там же. – 1998. – **34**, № 7. – С.876-885.
4. *Andreev A., Khusanov D.* On asymptotic stability and nonstability functional-differential equations with periodic right side // Nonlinear oscillations. – 2001. – **4**, № 3. – P.290-298.
5. *Гайшун И.В., Княжище Л.Б.* Немонотонные функционалы Ляпунова. Условия устойчивости уравнений с запаздыванием // Диф. уравнения. – 1994. – **38**, № 3. – С.5-8.
6. *Княжище Л.Б., Щавель Н.А.* Немонотонные функционалы Ляпунова и оценки решений дифференциальных уравнений с запаздыванием // Там же. – 1997. – **33**, № 2. – С.205-211.
7. *Красовский Н.Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений // В кн.: Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. Дополнение 4. – М.: Наука, 1966. – С.475-515.

Ульяновский гос. ун-т, Россия
AndreevAS@ulsu.ru

Получено 19.06.04