УДК УДК 531.55:521.2

©2004. **Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко, С.Г. Суксова, И.А. Тимошенко**

ДВИЖЕНИЕ СПУТНИКА ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГРАВИТАЦИОННЫХ И СВЕТОВЫХ МОМЕНТОВ

Исследуется эволюция вращений твердого тела (спутника Солнца, движущегося по эллиптической орбите с произвольным эксцентриситетом) под действием моментов сил гравитации и светового давления. Тело предполагается динамически несимметричным, а его поверхность является поверхностью вращения. Углы ρ и σ, определяющие положение вектора кинетического момента относительно его центра масс, найдены во втором приближении по малому параметру ε как функции истинной аномалии ν.

1. Рассмотрим движение спутника или космического аппарата относительно центра масс под действием совместного влияния моментов сил светового давления и гравитационного притяжения. Вращательные движения рассматриваются в рамках моделей динамики твёрдых тел, центры масс которых движутся по эллиптическим орбитам вокруг Солнца. Задачи динамики обобщаются и усложняются учетом различных возмущающих факторов и в настоящее время остаются достаточно актуальными. Исследованию вращательных движений тел относительно центра масс под действием возмущающих моментов сил различной природы (гравитационных, светового давления и др.), близкому к проводимому ниже, посвящено много работ (см. [1–11] и библиографию к этим работам).

Введем три правых декартовых системы координат, начало координат совместим с центром инерции спутника [1, 2]. Система координат $OXYZ$ движется поступательно по орбите Солнца вместе со спутником; ось Y параллельна нормали к плоскости орбиты, ось Z – направлению радиус-вектора орбиты в ее перигелии, ось X – направлению вектора скорости центра масс в перигелии.

Положение вектора кинетического момента тела $\mathbf{L}$ относительно его центра масс в системе координат $OXYZ$ определим углами ρ и σ, как показано в [1–3]. Для построения системы координат OL_1L_2L, связанной с вектором $\mathbf{L}$, в плоскости OYL проведем ось L_1, перпендикулярно к вектору $\mathbf{L}$ и составляющую тупой угол с осью Y. Ось L_2 дополняет оси L_1 и L до правой системы координат. Оси связанной системы координат $Oxyz$ совместим с главными центральными осями инерции. Взаимное положение главных центральных осей инерции и осей L, L_1, L_2 определим углами Эйлера [1-3]. При этом направляющие косинусы α_{ij} осей x, y, z относительно системы OL_1L_2L выражаются через углы Эйлера φ, ψ, θ по известным формулам [1].

Будем пренебрегать моментами всех сил, кроме гравитационных, и сил светового давления. В [1] приведена сравнительная оценка гравитационных моментов и моментов сил светового давления для спутника Солнца. Для общей ситуации показано, что момент сил светового давления на несколько порядков больше гравитационного. В рассматриваемой ниже задаче момент сил светового давления предполагается того же порядка малости ε^2, что и гравитационный момент. Это достигается, например, распределением масс и соответствующей формой тела.

Гравитационный момент, действующий на спутник со стороны Солнца, имеет вид [1, 3]

$$M_g = \frac{3\varkappa}{R^3}\Big((C-B)\gamma'\gamma'', (A-C)\gamma\gamma'', (B-A)\gamma'\gamma\Big).$$

Здесь $\varkappa$ - гравитационный параметр Солнца, $R = |\mathbf{R}|$, γ , γ', γ'' - косинусы углов между радиусом-вектором $\mathbf{R}$ и осями x, y, z.

Допустим, что поверхность аппарата представляет собой поверхность вращения, причем единичный орт оси симметрии $\mathbf{k}$ направлен по оси Oz. Как показано в [1, 4, 5], в этом случае для момента сил светового давления $\mathbf{M}_c$, действующего на спутник, имеет место формула

$$\begin{gathered}\mathbf{M}_c = \big(a_c(\varepsilon_s)R_0^2/R^2\big)\,\mathbf{e}_r \times \mathbf{k}, \\ a_c(\varepsilon_s)\frac{R_0^2}{R^2} = p_c S(\varepsilon_s) Z_0{}'(\varepsilon_s), \quad p_c = \frac{E_0}{c}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{e}_r$ – единичный вектор по направлению радиус-вектора орбиты, ε_s – угол между направлениями $\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{k}$, так что $|\mathbf{e}_r \times \mathbf{k}| = \sin\varepsilon_s$, R – текущее расстояние от центра Солнца до центра масс спутника, R_0 – фиксированное значение R, например, в начальный момент времени, $a_c(\varepsilon_s)$ – коэффициент момента сил светового давления, S – площадь “тени” на плоскости, нормальной к потоку, $Z_0{}'$- расстояние от центра масс до центра давления, p_c – величина светового давления на расстоянии R от центра Солнца, c – скорость света, E_0 – величина потока энергии светового давления на расстоянии R_0 от центра Солнца. Если R_0 – радиус орбиты Земли, тогда $p_{c0} = 4,64 \cdot 10^{-6}$ Н/м^2.

Полагаем [1] $a_c = a_c(\cos\varepsilon_s)$ и аппроксимируем a_c полиномами по степеням $\cos\varepsilon_s$. Момент сил светового давления имеет силовую функцию, зависящую только от положения оси симметрии тела в пространстве [1]. Представим функцию $a_c(\cos\varepsilon_s)$ в виде

$$a_c = a_{0c} + a_{1c}\cos\varepsilon_s + \ldots. \tag{2}$$

Далее рассмотрим отдельно только первые два члена разложения.

Уравнения возмущенного движения спутника при наличии силовой функции в переменных L, ρ, σ, φ, ψ, θ имеют вид [3]

$$\begin{aligned}
&\dot\sigma = (L\sin\rho)^{-1}\frac{\partial U}{\partial\rho},\\
&\dot\rho = -(L\sin\rho)^{-1}\frac{\partial U}{\partial\sigma} + L^{-1}\operatorname{ctg}\rho\frac{\partial U}{\partial\psi}, \quad \dot L = \frac{\partial U}{\partial\psi},\\
&\dot\theta = L\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\left(A^{-1} - B^{-1}\right) - (L\sin\theta)^{-1}\frac{\partial U}{\partial\varphi} + L^{-1}\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial U}{\partial\psi},\\
&\dot\varphi = L\cos\theta\left(C^{-1} - A^{-1}\sin^2\varphi - B^{-1}\cos^2\varphi\right) + (L\sin\theta)^{-1}\frac{\partial U}{\partial\theta},\\
&\dot\psi = L\left(A^{-1}\sin^2\varphi + B^{-1}\cos^2\varphi\right) - L^{-1}\left(\frac{\partial U}{\partial\rho}\operatorname{ctg}\rho + \frac{\partial U}{\partial\theta}\operatorname{ctg}\theta\right).
\end{aligned} \tag{3}$$

Силовая функция U зависит от времени t через истинную аномалию $\nu(t)$ и от направляющих косинусов α_3, β_3, γ_3 оси Oz относительно системы координат $OXYZ$; она имеет вид $U = U\big(\nu(t), \alpha_3, \beta_3, \gamma_3\big)$.

К системе уравнений (3) необходимо присоединить уравнение, описывающее изменение истинной аномалии со временем

$$\frac{d\nu}{dt} = \omega_0\left(1-e^2\right)^{-3/2}(1+e\cos\nu)^2, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{Q_0} = \left[\varkappa\left(1-e^2\right)^3 P^{-3}\right]^{1/2}. \tag{4}$$

Здесь ω_0 – средняя угловая скорость движения центра масс по эллиптической орбите, Q_0 – период обращения спутника, e и P – эксцентриситет и фокальный параметр орбиты соответственно, $\varkappa$ - произведение постоянной всемирного тяготения на массу Солнца.

Считаем силовую функцию состоящей из двух слагаемых, обусловленных влиянием гравитационного момента и момента сил светового давления $U = U_g + U_c$. Силовая функция, обусловленная влиянием гравитационного момента, записывается следующим образом [3]

$$U_g = \frac{3\varkappa}{2R^3}\left[(A-B)\gamma'^2 + (A-C)\gamma''^2\right],$$

$$\gamma' = \alpha_2 \sin\nu + \gamma_2 \cos\nu, \quad \gamma'' = \alpha_3 \sin\nu + \gamma_3 \cos\nu.$$

Момент сил светового давления (1) соответствует силовой функции $U_c(\cos\varepsilon_s) = -R_0^2R^{-2}\int a_c(\cos\varepsilon_s)d(\cos\varepsilon_s)$.

Рассмотрим два случая: $a_c(\cos\varepsilon_s) = a_{0c}$ и $a_c(\cos\varepsilon_s) = a_{1c}\cos\varepsilon_s$, которые соответствуют первым двум членам разложения (2). Силовые функции в этих случаях имеют вид $U_c(\cos\varepsilon_s) = -R_0^2R^{-2}a_{0c}\cos\varepsilon_s$ и $U_c(\cos\varepsilon_s) = -R_0^2R^{-2}a_{1c}\cos^2\varepsilon_s$, причем $\cos\varepsilon_s = \gamma_3\cos\nu + \alpha_3\sin\nu$. Заметим, что первый случай соответствует, например, спутнику сферической формы со смещенным относительно центра сферы центром масс.

Введем в систему уравнений (3), (4) малые параметры. Предположим, что угловая скорость вращения спутника относительно центра масс существенно больше угловой скорости орбитального движения ω_0, то есть будем считать, что $\varepsilon = \dfrac{\omega_0}{\omega} \sim \dfrac{A\omega_0}{L} \ll 1$. Здесь L – модуль кинетического момента тела. В этом случае кинетическая энергия спутника велика по сравнению с работой гравитационных моментов за период вращения. Предположим также, что $a_{0c} \sim \varepsilon^2 \ll 1$ или $a_{1c} \sim \varepsilon^2$ в зависимости от того, какой из случаев рассматривается. Исследуем решение системы (3), (4) при малом ε на большом промежутке времени $t \sim \varepsilon^{-2}$. Для решения задачи применим метод усреднения [12, 13]. Погрешность усредненного решения для медленных переменных составляет величину порядка ε на интервале времени, за который тело совершит $\sim \varepsilon^{-2}$ оборотов. Усреднение по движению Эйлера-Пуансо проводим по методике работы [2] для нерезонансных случаев. Обоснование процедуры усреднения требует дополнительного рассмотрения.

2. Рассмотрим невозмущенное движение ($\varepsilon = 0$), когда гравитационный момент и момент сил светового давления равны нулю. В этом случае вращение спутника является движением Эйлера-Пуансо. Величины σ, ρ, L, ν обращаются в постоянные, а θ, φ, ψ – некоторые функции времени. Медленными переменными в возмущенном движении будут σ, ρ, L, ν, а быстрыми – углы Эйлера.

Проведем усреднение первых трех уравнений системы (3) вдоль траектории невозмущенного движения. Согласно [2] усреднение выполняется по переменной ψ, а затем по θ и φ. Оно производится по замкнутым траекториям вектора кинетического момента в движении Эйлера-Пуансо.

В результате усреднения по ψ и вдоль полодии невозмущенного движения получим систему уравнений [2, 9] для случа $a_c = a_{0c}$

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho}{d\nu} = &- a_{0c}R_0^2\left(L_0\sqrt{\varkappa P}\right)^{-1} F\sin(\sigma-\nu) + \frac{3\omega_0 N}{2(1-e^2)^{3/2}L_0}\times \\
&\times(1+e\cos\nu)\sin\rho\sin(\sigma-\nu)\cos(\sigma-\nu), \\
\frac{d\sigma}{d\nu} = &- a_{0c}R_0^2\left(L_0\sqrt{\varkappa P}\right)^{-1} F\operatorname{ctg}\rho\cos(\sigma-\nu) + \frac{3\omega_0 N}{2(1-e^2)^{3/2}L_0}\times \\
&\times(1+e\cos\nu)\cos\rho\cos^2(\sigma-\nu).
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
&\alpha = a_{0c}R_0^2\left(L_0\sqrt{\varkappa P}\right)^{-1} F = \varepsilon\alpha_1, \\
&F = \frac{\pi a}{2K(k)}, \quad 2T_0B - L_0^2 > 0 \quad \text{либо} \quad F = 0, \quad 2T_0B - L_0^2 < 0, \\
&L = L_0 = \mathrm{const}, \quad T = T_0 = \mathrm{const}, \quad a^2 = \frac{\varepsilon_1 + h}{1+\varepsilon_1}, \quad \varepsilon_1 = \frac{C(A-B)}{A(B-C)}, \\
&N = B + C - 2A + 3A\left(\frac{2T_0A}{L_0^2} - 1\right)\left[C + (B-C)\frac{K(k)-E(k)}{k^2K(k)}\right], \\
&h = \left(\frac{2T_0}{L_0^2} - \frac{1}{B}\right)\frac{BC}{B-C}, \quad \chi = \frac{3\omega_0 N}{2(1-e^2)^{3/2}L_0} = \varepsilon\chi_1,
\end{aligned}$$

$K(k)$, $E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода, $k^2 = \dfrac{a^2-h}{a^2}$, T – кинетическая энергия спутника относительно центра масс. Выражение для N имеет смысл при $2T_0B < L_0^2$. В случае $L_0^2 < 2T_0B$ следует поменять местами A и C в формуле для N.

Для определенности примем $A > B > C$. Формула для модуля эллиптических функций k приведена для $h > 0$. Остальные соотношения справедливы при любых значениях h. В системе уравнений (5) мы перешли к новой независимой переменной $\nu = \nu(t)$.

Систему (5) с учетом введенных обозначений можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho}{d\nu} &= \varepsilon\sin(\sigma-\nu)\left[-\alpha_1 + \chi_1(1+e\cos\nu)\sin\rho\cos(\sigma-\nu)\right], \\
\frac{d\sigma}{d\nu} &= \varepsilon\operatorname{ctg}\rho\cos(\sigma-\nu)\left[-\alpha_1 + \chi_1(1+e\cos\nu)\sin\rho\cos(\sigma-\nu)\right].
\end{aligned} \tag{6}$$

Для решения уравнений (6) вновь воспользуемся методом усреднения. Выведенные усредненные уравнения определяют величины ρ, σ с погрешностью порядка ε^2 на интервале $\Delta\nu \sim \varepsilon^{-1}$, то есть $\Delta t \sim \varepsilon^{-2}$. Поэтому достаточно решить с этой точностью уравнения (6), для чего нужно найти асимптотическое решение во втором приближении по ε и установить,что отброшенные члены имеют нулевое среднее. Система (6) имеет стандартную форму [12] и может быть записана следующим образом:

$$\frac{d\rho}{d\nu} = \varepsilon X(\nu,\rho,\sigma), \quad \frac{d\sigma}{d\nu} = \varepsilon Y(\nu,\rho,\sigma). \tag{7}$$

Ее решение во втором приближении ищется в виде

$$\rho = \xi + \varepsilon u(\nu, \xi, \eta), \quad \sigma = \eta + \varepsilon w(\nu, \xi, \eta),$$

где u, w удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = X(\nu, \xi, \eta) - M_\nu \left\{ X(\nu, \xi, \eta) \right\},$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = Y(\nu, \xi, \eta) - M_\nu \left\{ Y(\nu, \xi, \eta) \right\},$$
$$M_\nu \left\{ u(\nu, \xi, \eta) \right\} = M_\nu \left\{ w(\nu, \xi, \eta) \right\} = 0,$$

причем M_ν означает усреднение по ν за период 2π. Функции ξ, η удовлетворяют системе второго приближения

$$\frac{d\xi}{d\nu} = \varepsilon M_\nu(X) + \varepsilon^2 M_\nu \left(u \frac{\partial X}{\partial \xi} + w \frac{\partial X}{\partial \eta} \right),$$
$$\frac{d\eta}{d\nu} = \varepsilon M_\nu(Y) + \varepsilon^2 M_\nu \left(u \frac{\partial Y}{\partial \xi} + w \frac{\partial Y}{\partial \eta} \right).$$

Система первого приближения записывается в виде

$$\frac{d\xi_1}{d\nu} = 0, \quad \frac{d\eta_1}{d\nu} = \frac{\chi_1}{2} \cos \xi_1.$$

Отсюда $\xi_1 = \xi_0 = \text{const}$, $\eta_1 = \dfrac{\chi_1}{2} \nu \cos \xi_0 + \eta_0$, где ξ_0, η_0 – начальные условия.

Определяя функции u, w известным способом [12], получим

$$u = -\alpha_1 \cos(\nu - \eta) + \frac{\chi_1}{4} \sin \xi \Big[\cos 2(\nu - \eta) + \cos 2\eta + $$
$$+ e \cos(2\nu - 2\eta) + \frac{e}{3} \cos(3\nu - 2\eta) \Big],$$
$$w = -\alpha_1 \operatorname{ctg} \xi \sin(\nu - \eta) + \frac{\chi_1}{2} \cos \xi \Big[\frac{1}{2} \sin 2(\nu - \eta) + \frac{1}{2} \sin 2\eta + $$
$$+ e \left(\frac{1}{6} \sin(3\nu - 2\eta) + \frac{1}{2} \sin(\nu - 2\eta) + \sin \nu \right) \Big].$$

Переменные ξ, η удовлетворяют системе второго приближения

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\nu} &= \frac{\varepsilon^2}{16} \left(\chi_1^2 e^2 \sin 2\xi \sin 2\eta - 8\alpha_1 \chi_1 e \sin \eta \cos \xi \right), \\ \frac{d\eta}{d\nu} &= \varepsilon \frac{\chi_1}{2} \cos \xi + \frac{\varepsilon^2}{48} \Big[\chi_1^2 e^2 - 24\alpha_1^2 - 9\chi_1^2 + \frac{24\chi_1 e \alpha_1 \cos \eta}{\sin \xi} \times \\ &\times \left(1 - 2\cos^2 \xi \right) + 6\chi_1^2 \cos^2 \eta \left(2 - e^2 \right) + 3\chi_1^2 \cos^2 \xi \left(5 - e^2 \right) + \\ &+ 6\chi_1^2 \cos^2 \xi \cos^2 \eta \left(3e^2 - 2 \right) \Big] \end{aligned} \tag{8}$$

с начальными условиями $\xi(0)=\xi_0$, $\eta(0)=\eta_0$.

Выражения (8) – это система с вращающейся фазой η [14]. Сделаем замену $\tau=\varepsilon\nu$ и проведем усреднение по η. На интервале времени $\sim\varepsilon^{-2}$ получим

$$\frac{d\xi}{d\tau}=0,\quad \frac{d\eta}{d\tau}=\frac{\chi_1}{2}\cos\xi.$$

Таким образом, $\xi=\xi_0=\mathrm{const}$, $\eta=\dfrac{\chi_1}{2}\tau\cos\xi_0+\eta_0$, где ξ_0, η_0 – начальные условия. Проведем замену $\tau=\varepsilon\nu$. Ищем решение в виде

$$\xi=\xi_0+\varepsilon\Delta\xi,\quad \eta=\eta_0+\frac{\chi_1}{2}\cos\xi_0\tau+\varepsilon\Delta\eta.$$

В этом случае из (8) получим систему уравнений относительно $\Delta\xi$ и $\Delta\eta$

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta\xi}{d\tau}=&\frac{1}{16}\left[\chi_1^2e^2\sin 2\xi_0\sin 2\mu-8\chi_1e\alpha_1\cos\xi_0\sin\mu\right],\\ \frac{d\Delta\eta}{d\tau}=&-\frac{\chi_1}{2}\sin\xi_0\Delta\xi+\frac{\chi_1^2\cos^2\xi_0}{16}\left(5+6e^2\cos^2\mu-4\cos^2\mu-e^2\right)+\\ &+\frac{1}{48}\left[\chi_1^2e^2+12\chi_1^2\cos^2\mu-9\chi_1^2-24\alpha_1^2-24\frac{e\chi_1\alpha_1\cos\mu\cos 2\xi_0}{\sin\xi_0}\right].\end{aligned}$$

Здесь $\mu=\eta_0+\dfrac{\chi_1}{2}\tau\cos\xi_0$. Для $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ – нулевые начальные данные.

Откуда

$$\begin{aligned}\Delta\xi=&-\frac{\chi_1e^2}{8}\cos 2\mu\sin\xi_0+\alpha_1e\cos\mu,\\ \Delta\eta=&\frac{1}{48}\Bigg[3\chi_1e^2\sin 2\mu\,\mathrm{tg}\,\xi_0\sin\xi_0-48\alpha_1e\sin\mu\,\mathrm{ctg}\,\xi_0+\\ &+\chi_1^2e^2\tau\left(1+6\cos^2\xi_0\right)-3\chi_1^2\tau\left(1-3\cos^2\xi_0\right)+\frac{12\chi_1}{\cos\xi_0}(\eta_0+\sin\mu\cos\mu)-\\ &-24\alpha_1^2\tau-\frac{12\chi_1e^2\sin\mu}{\cos\xi_0}+6\chi_1\cos\xi_0(\eta_0+\cos\mu\sin\mu)(3e-2)\Bigg].\end{aligned}$$

Тогда во втором приближении получим искомые решения

$$\begin{aligned}\xi=&\xi_0+\varepsilon\left(-\frac{\chi_1e^2}{8}\cos 2\mu\sin\xi_0+\alpha_1e\cos\mu\right),\\ \eta=&\eta_0+\frac{\chi_1}{2}\tau\cos\xi_0+\frac{\varepsilon}{48}\Bigg[3\chi_1e^2\sin 2\mu\,\mathrm{tg}\,\xi_0\sin\xi_0-48\alpha_1e\sin\mu\,\mathrm{ctg}\,\xi_0+\\ &+\chi_1^2e^2\tau\left(1+6\cos^2\xi_0\right)-3\chi_1^2\tau\left(1-3\cos^2\xi_0\right)+\frac{12\chi_1}{\cos\xi_0}(\eta_0+\sin\mu\cos\mu)-\\ &-24\alpha_1^2\tau+6\chi_1\cos\xi_0(\eta_0+\cos\mu\sin\mu)(3e-2)-\frac{12\chi_1e^2\sin\mu}{\cos\xi_0}\Bigg].\end{aligned}$$

В результате получим следующие выражения:

$$
\begin{aligned}
\rho =&\xi(\nu) + \varepsilon\Big[-\alpha_1\cos(\nu-\mu) + \frac{\chi_1}{2}\sin\xi_0\sin^2\nu\left(2-\cos^2\mu\right) + \\
&+\frac{\chi_1}{4}\sin\xi_0\sin 2\mu\sin 2\nu + \frac{2}{3}\chi_1 e\sin\xi_0\cos\mu\cos^2\nu\cos(\nu-\mu) + \\
&+\frac{1}{3}\chi_1 e\sin\xi_0\left(\frac{1}{2}\sin 2\mu\sin\nu - \cos^3\nu\right)\Big],\\
\sigma =&\eta(\nu) - \frac{1}{6}\varepsilon\operatorname{ctg}\xi_0\Big\{6\alpha_1\sin(\nu-\mu) - \frac{3}{2}\chi_1\sin\xi_0\sin 2\nu\times\\
&\times\left(1-2\cos^2\mu\right) - 3\chi_1\sin 2\mu\sin\xi_0\sin^2\nu - 2\chi_1 e\sin\xi_0\cos\mu\times\\
&\times\left[2\cos^2\nu\sin(\nu-\mu) + \sin\nu\cos\mu\right] - 2\chi_1 e\sin\xi_0\sin^3\nu\Big\}.
\end{aligned}
$$

Здесь $\nu-\mu = \nu\left(1-\frac{\chi_1}{2}\varepsilon\cos\xi_0\right) - \eta_0$.

Это решение системы (6) отличается от точного на величины порядка ε^2 на интервале $\Delta\nu\sim\varepsilon^{-1}$, а ξ_0, η_0 – произвольные постоянные.

3. Если коэффициент светового давления $a_c = a_{1c}\cos\varepsilon_s$, то усредненная система для ρ и σ в первом приближении принимает вид

$$
\begin{aligned}
\frac{d\rho}{d\nu} =& \sin\rho\sin(\sigma-\nu)\cos(\sigma-\nu)\frac{L_0^{-1}}{2}\times\\
&\times\left[-\frac{a_{1c}R_0^2}{\sqrt{\varkappa P}}G + \frac{3\omega_0 N}{(1-e^2)^{3/2}}(1+e\cos\nu)\right],\\
\frac{d\sigma}{d\nu} =& \cos\rho\cos^2(\sigma-\nu)\frac{L_0^{-1}}{2}\times\\
&\times\left[-\frac{a_{1c}R_0^2}{\sqrt{\varkappa P}}G + \frac{3\omega_0 N}{(1-e^2)^{3/2}}(1+e\cos\nu)\right].
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Здесь введены обозначения

$$
G = \begin{cases}
\dfrac{1}{2}\left[3a^2\dfrac{E(k)}{K(k)} - 1\right] & \text{при} \quad 2T_0B - L_0^2 > 0,\\
\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{3a^2}{k^2}\left[k^2 - 1 - \dfrac{E(k)}{K(k)}\right] - 1\right\} & \text{при} \quad 2T_0B - L_0^2 < 0;
\end{cases}
$$

$$
N = B + A - 2C + 3\left(\frac{2TC}{L_0^2} - 1\right)\left[A + (B-A)\frac{K(k)-E(k)}{k^2K(k)}\right]
$$

при $2T_0B - L_0^2 > 0$.

При $2T_0B - L_0^2 < 0$ следует поменять местами A и C.

Обозначим

$$
\alpha = \frac{1}{2}a_{1c}R_0^2\left(\sqrt{\varkappa P}\right)^{-1}GL_0^{-1} = \varepsilon\alpha_1, \quad \chi = \frac{3\omega_0 N}{2(1-e^2)^{3/2}}L_0 = \varepsilon\chi_1.
$$

Тогда система (9) принимает вид

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{d\nu} =&\varepsilon \sin\rho \sin(\sigma-\nu)\cos(\sigma-\nu)\left[-\alpha_1+\chi_1(1+e\cos\nu)\right],\\ \frac{d\sigma}{d\nu} =&\varepsilon \cos\rho\cos^2(\sigma-\nu)\left[-\alpha_1+\chi_1(1+e\cos\nu)\right].\end{aligned}$$

Это система вида (7), где

$$\begin{aligned}X =&\frac{1}{2}\left[-\alpha_1+\chi_1(1+e\cos\nu)\right]\sin\rho\sin 2(\sigma-\nu),\\ Y =&\left[-\alpha_1+\chi_1(1+e\cos\nu)\right]\cos\rho\cos^2(\sigma-\nu).\end{aligned} \tag{10}$$

Ищем решение системы (7), (10) в виде

$$\rho=\xi+\varepsilon u(\nu,\xi,\eta),\quad \sigma=\eta+\varepsilon w(\nu,\xi,\eta).$$

Здесь

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial\nu}=X-M_\nu(X),\quad \frac{\partial w}{\partial\nu}=Y-M_\nu(Y),\\ &\frac{d\xi}{d\nu}=\varepsilon M_\nu(X)+\varepsilon^2 M_\nu\left(u\frac{\partial X}{\partial\xi}+w\frac{\partial X}{\partial\eta}\right),\\ &\frac{d\eta}{d\nu}=\varepsilon M_\nu(Y)+\varepsilon^2 M_\nu\left(u\frac{\partial Y}{\partial\xi}+w\frac{\partial Y}{\partial\eta}\right).\end{aligned} \tag{11}$$

В первом приближении метода усреднения получим

$$M_\nu(X)=0,\quad M_\nu(Y)=\frac{\chi_1-\alpha_1}{2}\cos\xi.$$

Таким образом,

$$\xi=\xi_0=\text{const},\quad \eta=\eta_0+\frac{\chi_1-\alpha_1}{2}\nu\cos\xi_0,\quad \eta_0=\text{const}.$$

В системе (11) члены порядка ε^2 имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial\xi} =&\frac{1}{2}\left[-\alpha_1+\chi_1\left(1+e\cos\nu\right)\right]\cos\xi\sin 2(\eta-\nu),\\ \frac{\partial X}{\partial\eta} =&\left[-\alpha_1+\chi_1(1+e\cos\nu)\right]\sin\xi\cos 2(\eta-\nu),\\ \frac{\partial Y}{\partial\xi} =&-\left[-\alpha_1+\chi_1(1+e\cos\nu)\right]\sin\xi\cos^2(\eta-\nu),\\ \frac{\partial Y}{\partial\eta} =&-\left[-\alpha_1+\chi_1(1+e\cos\nu)\right]\cos\xi\sin 2(\eta-\nu).\end{aligned}$$

Определим функции u, w

$$\begin{aligned}u =&\frac{\sin\xi}{12}\Big\{3(\chi_1-\alpha_1)\left[\cos 2(\nu-\eta)-\cos 2\eta\right]+\\ &+\chi_1 e\left[3\cos(\nu-2\eta)+\cos(3\nu-2\eta)\right]\Big\},\\ w =&\frac{\cos\xi}{12}\Big\{3(\chi_1-\alpha_1)\left[\sin 2(\nu-\eta)+\sin 2\eta\right]+\\ &+\chi_1 e\left[6\sin\nu+3\sin(\nu-2\eta)+\sin(3\nu-2\eta)\right]\Big\}.\end{aligned}$$

Находим

$$
\begin{aligned}
M_\nu\left(\frac{\partial X}{\partial \xi}u+\frac{\partial X}{\partial \eta}w\right)=&\frac{1}{16}\chi_1^2e^2\sin 2\eta\sin 2\xi,\\
M_\nu\left(\frac{\partial Y}{\partial \xi}u+\frac{\partial Y}{\partial \eta}w\right)=&\frac{(\chi_1-\alpha_1)^2}{16}\left(5\cos^2\xi-3+4\cos^2\eta\sin^2\xi\right)+\\
&+\frac{\chi_1^2e^2}{48}\left(6\cos^2\eta-1\right)\left(3\cos^2\xi-1\right).
\end{aligned}
$$

Имеем

$$
\begin{aligned}
\frac{d\xi}{d\nu}=&\frac{\varepsilon^2}{16}\chi_1^2e^2\sin 2\eta\sin 2\xi,\\
\frac{d\eta}{d\nu}=&\varepsilon\frac{\chi_1-\alpha_1}{2}\cos\xi+\varepsilon^2\left[\frac{(\chi_1-\alpha_1)^2}{16}\times\right.\\
&\left.\times\left(5\cos^2\xi_0-3+4\cos^2\eta\sin^2\xi\right)+\frac{\chi_1^2e^2}{48}\left(6\cos^2\eta-1\right)\left(3\cos^2\xi-1\right)\right].
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Соотношения (12) – это система с вращающейся фазой η [14]. Сделаем замену $\tau=\varepsilon\nu$ и проведем усреднение по η на интервале времени $\sim\varepsilon^{-2}$. Получим

$$
\frac{d\xi}{d\tau}=0,\quad \frac{d\eta}{d\tau}=\frac{\chi_1-\alpha_1}{2}\cos\xi.
$$

Следовательно, $\xi=\xi_0=\mathrm{const}$, $\eta=\dfrac{\chi_1-\alpha_1}{2}\tau\cos\xi_0+\eta_0$, где ξ_0, η_0 – начальные условия.

Проведем замену $\tau=\varepsilon\nu$ и ищем решение в виде

$$
\xi=\xi_0+\varepsilon\Delta\xi,\quad \eta=\eta_0+\frac{\chi_1-\alpha_1}{2}\tau\cos\xi_0+\varepsilon\Delta\eta.
$$

Тогда система (12) принимает вид

$$
\begin{aligned}
\frac{d\Delta\xi}{d\tau}=&\frac{\chi_1^2e^2}{16}\sin 2\beta\sin 2\xi_0,\\
\frac{d\Delta\eta}{d\tau}=&-\frac{(\chi_1-\alpha_1)^2}{16}\left(3-5\cos^2\xi_0-4\cos^2\beta\sin^2\xi_0\right)+\\
&+\frac{\chi_1^2e^2}{48}\left(1-6\cos^2\beta\sin^2\xi_0+3\cos^2\xi_0\left(4\cos^2\beta-1\right)\right)-\frac{\chi_1-\alpha_1}{2}\sin\xi_0\Delta\xi.
\end{aligned}
$$

Здесь $\beta=\eta_0+(\chi_1-\alpha_1)\tau\cos\xi_0/2$. Откуда

$$
\begin{aligned}
\Delta\xi=&\frac{\chi_1^2e^2\sin\xi_0\cos 2\beta}{8(\alpha_1-\chi_1)},\\
\Delta\eta=&\frac{1}{48\cos\xi_0\left(\alpha_1-\chi_1\right)^2}\left\{\tau\left[3\left(\alpha_1-\chi_1\right)^2+2\chi_1^2e^2\right]\cos\xi_0\left(\alpha_1-\chi_1\right)\times\right.\\
&\times\left(3\cos^2\xi_0-1\right)-6\left(\alpha_1-\chi_1\right)^2\sin^2\xi_0\left(\sin 2\beta+2\eta_0\right)-\\
&\left.-6\chi_1^2e^2\left[\sin 2\beta\cos^2\xi_0+\eta_0\left(3\cos^2\xi_0-1\right)\right]\right\}.
\end{aligned}
$$

Тогда получим решение во втором приближении

$$\begin{aligned}
\xi =&\xi_0 + \varepsilon \frac{\chi_1^2 e^2}{8(\alpha_1 - \chi_1)} \sin \xi_0 \cos 2\beta, \\
\eta(\nu) =&\eta_0 + \frac{\chi_1 - \alpha_1}{2} \varepsilon \nu \cos \xi_0 + \frac{\varepsilon}{96 \cos^2 \xi_0 \left(\alpha_1 - \chi_1\right)^2} \times \\
&\times \Big\{ \varepsilon \nu \left[3\left(\alpha_1 - \chi_1\right)^2 + 2\chi_1^2 e^2\right] \cos \xi_0 \left(\alpha_1 - \chi_1\right) \left(3 \cos^2 \xi_0 - 1\right) - \\
&- 6\left(\alpha_1 - \chi_1\right)^2 \sin^2 \xi_0 \left(\sin 2\beta + 2\eta_0\right) - 6\chi_1^2 e^2 \times \\
&\times \left[\sin 2\beta \cos^2 \xi_0 + \eta_0 \left(3 \cos^2 \xi_0 - 1\right)\right] \Big\}.
\end{aligned}$$

В результате находим выражения вида

$$\begin{aligned}
\rho(\nu) =&\xi(\nu) + \varepsilon \Big[(\chi_1 - \alpha_1) \sin \xi_0 \Big(\frac{1}{4} \sin 2\beta \sin 2\nu - \cos^2 \beta \sin^2 \nu + \\
&+ \frac{1}{2} \sin^2 \nu \Big) + \frac{2}{3} \chi_1 e \sin \xi_0 \cos^2 \nu \cos \beta \cos(\nu - \beta) + \\
&+ \frac{1}{3} \chi_1 e \sin \xi_0 \left(\frac{1}{2} \sin \nu \sin 2\beta + \cos^3 \nu \right) \Big], \\
\sigma(\nu) =&\eta(\nu) + \varepsilon \frac{\cos \xi_0}{12} \Big[3(\chi_1 - \alpha_1) \big(\sin 2\nu + 2 \sin 2\beta \sin^2 \nu + \\
&+ 2 \sin 2\nu \cos^2 \beta \big) + 8\chi_1 e \cos \beta \cos^2 \nu \sin(\nu - \beta) + \\
&+ 4\chi_1 e \sin \nu \left(\cos^2 \beta + \sin^2 \nu \right) \Big].
\end{aligned}$$

Здесь $\nu - \beta = \nu \left(1 - \dfrac{\chi_1 - \alpha_1}{2} \varepsilon \cos \xi_0 \right) - \eta_0$.

Полученные формулы позволяют провести анализ движения. Таким образом, исследована эволюция вращений несимметричного спутника относительно центра масс под действием моментов сил светового давления и гравитационного притяжения на удлиненном интервале времени $t \sim \varepsilon^{-2}$, что является новым результатом.

1. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. – М.: Наука, 1965. – 416 с.
2. *Черноусько Ф.Л.* О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // Прикл. математика и механика. – 1963. – **27**, вып. 3. – С. 474-483.
3. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. – М.: Изд-во МГУ, 1975. – 308 с.
4. *Карымов А.А.* Устойчивость вращательного движения геометрически симметричного искусственного спутника Солнца в поле сил светового давления // Прикл. математика и механика. – 1964. – **28**, вып 5. – С. 923-930.
5. *Абалакин В.К., Аксенов Е.П., Гребеников Е.А., Демин В.Г., Рябов Ю.А.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. – М.: Наука, 1976. – 862 с.
6. *Поляхова Е.Н.* Космический полёт с солнечным парусом: проблемы и перспективы. – М.: Наука, 1986. – 304 с.
7. *Сидоренко В.В.* О вращательном движении космического аппарата с солнечным стабилизатором // Космич. исслед. – 1992. – **30**, вып 6. – С. 780-790.

8. *Сазонов В.В.* Движение астероида относительно центра масс под действием момента сил светового давления // Астрон. вестник. – 1994. – **28**, №2. – С. 95-107.
9. *Лещенко Д.Д., Шамаев А.С.* О движении спутника относительно центра масс под действием моментов сил светового давления // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1985. – №1. – С. 14-21.
10. *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д.* Эволюция вращений трехосного спутника, близкого к динамически-сферическому, под действием моментов сил светового давления // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1996. – № 2. – С. 3-12.
11. *Лещенко Д.Д.* Эволюция вращений трехосного тела под действием момента сил светового давления // Там же. – 1997. – № 6. – С. 17-26.
12. *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 507 с.
13. *Митропольский Ю.А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1971. – 440 с.
14. *Акуленко Л.Д.* Схемы усреднения высших степеней в системах с быстрой и медленной фазами // Прикл. математика и механика. – 2002. – **66**, вып. 2. – С.165-176.

Ин-т проблем механики РАН, Москва
Получено 19.09.04
Одесская гос. академия строительства и архитектуры, Одесса
leshchenko_d@ukr.net