УДК 531.38

©2004. **Е.К. Узбек, Е.А. Данилейко**

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ КИРХГОФА В СЛУЧАЕ ЛИНЕЙНОГО ИНВАРИАНТНОГО СООТНОШЕНИЯ

Изучена задача интегрирования дифференциальных уравнений Кирхгофа [1] в предположении, что они допускают линейное инвариантное соотношение относительно компонент момента количества движения и компонент единичного вектора оси симметрии силового поля. С привлечением первых интегралов уравнений осуществлена редукция исходной системы к системе второго порядка. При двух условиях на параметры задачи, характеризующих геометрию масс гиростата, потенциальные и гироскопические силы, указан интегрирующий множитель приведенных уравнений. Полученное в работе решение уравнений Кирхгофа содержит четыре произвольных постоянных и совпадает с решением П.В. Харламова [4, с. 23-26], найденным в основных переменных [1].

Введение. В динамике твердого тела большое число работ посвящено не только классической задаче о движении тяжелого твердого тела (см. [3–6]), но и различным ее обобщениям — задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил [7] и задаче о движении тяжелого твердого тела в идеальной несжимаемой жидкости [1—4, 8, 9]. Данное обстоятельство обусловлено тем, что последние две задачи математически эквивалентны, поскольку описываются дифференциальными уравнениями класса Кирхгофа [1, 7]. Это означает, что случаи интегрируемости уравнений движения тела в жидкости, установленные Клебшем, Кирхгофом, Стекловым, Ляпуновым, Чаплыгиным, Харламовым (см. [3—6]) могут быть интерпретированы, как решения уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил [7]. Очевидно, справедливо и обратное утверждение: любое новое решение уравнений движения гиростата является новым решением и уравнений Кирхгофа.

Известно [10], что в общем случае уравнения Эйлера-Пуассона неинтегрируемы в квадратурах. Аналогичный результат имеет место и для уравнений Кирхгофа-Пуассона [8]. Поэтому для этих уравнений актуальна задача построения новых частных решений, в частности решений, содержащих максимальное число произвольных постоянных [6]. К таким решениям можно отнести решения В. Гесса [11], Л.Н. Сретенского [12], С.А. Чаплыгина [2] и П.В. Харламова [3, 4]. В данной работе продолжено изучение интегрируемости уравнений Кирхгофа, начатое в работах [2–4]. Найден интегрирующий множитель приведенных уравнений в случае, когда уравнения Кирхгофа-Пуассона допускают одно линейное инвариантное соотношение. Полученное решение зависит от четырех произвольных постоянных.

1. Постановка задачи. Рассмотрим дифференциальные уравнения движения заряженного и намагниченного гиростата в силовом поле, являющемся суперпозицией магнитного, электрического и центрального ньютоновского поля в постановке [7]

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \times a\mathbf{x} + a\mathbf{x} \times B\boldsymbol{\nu} + \mathbf{s} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times C\boldsymbol{\nu}, \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times a\mathbf{x}, \tag{2}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – момент количества движения гиростата; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – гиростатический момент, характеризующий движение носимых тел; $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гиростата; $a = (a_{ij})$ — гирационный тензор, построенный в неподвижной точке; $B = (B_{ij})$ – постоянная симметричная матрица третьего порядка, определяющая гироскопические силы; $C = (C_{ij})$ — постоянная симметричная матрица третьего порядка, характеризующая потенциальные силы. Точка над переменными означает производную по времени t.

Уравнения (1), (2) имеют первые интегралы:

$$\mathbf{x} \cdot a\mathbf{x} - 2(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) + (C\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 2E, \qquad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \tag{3}$$

$$(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k.$$

Здесь E и k – произвольные постоянные.

Следуя работам [2–4], поставим задачу об интегрировании уравнений (1), (2) при условии существования у этих уравнений одного линейного инвариантного соотношения:

$$x_1 - (g_0 + g_1\nu_1 + g_2\nu_2 + g_3\nu_3) = 0, \tag{4}$$

где g_i $(i = \overline{0,3})$ – постоянные, подлежащие определению. Для задачи о движении тела в жидкости [4] в полной мере решена только первая часть задачи интегрирования уравнений (1), (2), а именно, определены условия существования соотношения (4). Решение второй части данной задачи указано только в некоторых частных случаях [2, 3], причем в работе [2] исследован вариант $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0},\ \mathbf{s} = \mathbf{0}$, а в работе [3] – $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$. Для классической задачи о движении тяжелого твердого тела, уравнения которой получим из (1), (2) при $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}, B = 0, C = 0$, аналог соотношения (4) $(x_1 = 0)$ изучен В. Гессом [11]. Геометрическое истолкование решения В. Гесса дано А.М. Ковалевым [13]. Л.Н. Сретенский [12] обобщил данное решение на случай $\boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{0},\ B = 0,\ C = 0$.

Продифференцируем соотношение (4) в силу скалярных уравнений, вытекающих из векторных уравнений (1), (2) и потребуем, чтобы полученное равенство после подстановки в него значения для x_1 из (4) было тождеством при любых значениях переменных $x_2, x_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3$ и найдем следующие условия на параметры задачи и параметры g_i:

$$\begin{gathered}
a_{12} = a_{23} = 0, \qquad a_{22} = a_{33}, \qquad \lambda_2 = 0, \qquad a_{13}g_0 - a_{22}\lambda_3 = 0, \qquad g_2 = B_{12}, \\
a_{13}g_1 - a_{22}g_3 + a_{22}B_{13} = 0, \qquad a_{13}g_2 + a_{22}B_{23} = 0, \\
a_{13}g_3 + a_{22}g_1 + a_{22}B_{33} = 0, \qquad a_{22}g_1 - a_{13}g_3 + a_{22}B_{22} = 0, \\
s_2 = g_0(a_{11}g_2 + a_{13}B_{23}), \qquad s_3 = g_0(a_{11}g_3 - a_{13}g_1 - a_{13}B_{22}), \\
C_{12} + g_1(a_{13}B_{23} + a_{11}g_2) = 0, \qquad C_{13} + g_1(a_{11}g_3 - a_{13}g_1 - a_{13}B_{22}) = 0, \\
C_{23} + g_2(a_{11}g_3 - a_{13}g_1 - a_{13}B_{22}) = 0, \qquad C_{23} + g_3(a_{11}g_2 + a_{13}B_{23}) = 0, \\
C_{22} - C_{33} = a_{11}(g_3^2 - g_2^2) - a_{13}(g_1g_3 + g_2B_{23} + g_3B_{22}).
\end{gathered} \tag{5}$$

При условиях $a_{12} = a_{23} = 0,\ a_{33} = a_{22}$, уравнение гирационного эллипсоида примет вид $a_{11}x^2 + a_{22}(y^2 + z^2) + 2a_{13}xz = \mathrm{const}$. Поэтому координатная ось, относительно которой задано инвариантное соотношение (4), ортогональна круговому сечению гирационного эллипсоида. Очевидно, для случая Гесса на этой оси лежит центр масс гиростата. Но для обобщенной задачи (1), (2) данное условие не выполняется.

Рассмотрим случай $a_{13} \neq 0$. Тогда из системы (5) получим

$$a_{12} = a_{23} = 0, \qquad a_{22} = a_{33}, \qquad \lambda_2 = 0, \qquad g_0 = \frac{a_{22}\lambda_3}{a_{13}},$$

$$g_1 = -\frac{1}{2}(B_{22} + B_{33}), \qquad g_2 = B_{12}, \qquad g_3 = \frac{a_{22}}{2a_{13}}(B_{22} - B_{33}),$$

$$B_{13} = \frac{1}{2a_{13}a_{22}}\big[(a_{13}^2 + a_{22}^2)B_{22} + (a_{13}^2 - a_{22}^2)B_{33}\big], \qquad B_{23} = -\frac{a_{13}}{a_{22}}B_{12},$$

$$s_2 = \frac{\lambda_3 B_{12}}{a_{13}}(a_{11}a_{22} - a_{13}^2), \qquad s_3 = \frac{\lambda_3 a_{22}}{2a_{13}^2}(a_{11}a_{22} - a_{13}^2)(B_{22} - B_{33}), \tag{6}$$

$$C_{12} = \frac{B_{12}}{2a_{22}}(a_{11}a_{22} - a_{13}^2)(B_{22} + B_{33}), \qquad C_{13} = \frac{1}{4a_{13}}(a_{11}a_{22} - a_{13}^2)(B_{22}^2 - B_{33}^2),$$

$$C_{23} = -\frac{B_{12}}{2a_{13}}(a_{11}a_{22} - a_{13}^2)(B_{22} - B_{33}),$$

$$C_{22} - C_{33} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{13}^2}{4a_{13}^2 a_{22}}\big[(a_{22}^2(B_{22} - B_{33})^2 - 4a_{13}^2 B_{12}^2\big].$$

На основании условий (6) инвариантное соотношение (4) запишется в виде

$$x_1 = \frac{a_{22}}{a_{13}}\lambda_3 - \frac{1}{2}(B_{22} + B_{33})\nu_1 + B_{12}\nu_2 + \frac{a_{22}}{2a_{13}}(B_{22} - B_{33})\nu_3. \tag{7}$$

2. Преобразование системы (1), (2). Непосредственные вычисления показывают, что интегралы энергии и момента количества движения из (3) независимы на соотношении (4). Поэтому вместо второго и третьего уравнений, вытекающих из (1), рассмотрим данные интегралы. С помощью равенств (4), (5) получим

$$\begin{gathered} x_2 = \frac{1}{a_{22}(1 - \nu_1^2)}\big[a_{22}\nu_2\varphi(\nu_1) + \nu_3\sqrt{\Delta(\nu_1)}\ \big], \\ x_3 = \frac{1}{a_{22}(1 - \nu_1^2)}\big[a_{22}\nu_3\varphi(\nu_1) - a_{13}(1 - \nu_1^2)(g_0 + g_1\nu_1 + g_2\nu_2 + g_3\nu_3) - \nu_2\sqrt{\Delta(\nu_1)}\ \big], \end{gathered} \tag{8}$$

где

$$\begin{gathered} \varphi(\nu_1) = k + \frac{1}{2}B_{22} - (\lambda_1 + g_0)\nu_1 + \frac{1}{2}(B_{11} + B_{23})\nu_1^2, \\ \Delta(\nu_1) = d_0 + d_1\nu_1 + d_2\nu_1^2 + d_3\nu_1^3 + d_4\nu_1^4. \end{gathered} \tag{9}$$

Здесь
$$d_0 = g_0^2(a_{13}^2 - a_{11}a_{22}) + \tfrac{1}{4}g_3^2(a_{13}^2 - 2a_{11}a_{22}) + a_{22}\Big(2E - \tfrac{1}{2}(C_{22} + C_{33})\Big) -$$

$$-a_{13}a_{22}g_3\Big(k - \frac{g_1}{2}\Big) - a_{22}^2\Big(k - \frac{g_1}{2}\Big)^2 + \frac{1}{2}g_2^2(a_{13}^2 - a_{11}a_{22}),$$

$$d_1 = 2g_0g_1(a_{13}^2 - a_{11}a_{22}) + 2a_{22}s_1 + a_{22}(\lambda_1 + g_0)[a_{13}g_3 - a_{22}(g_1 - 2k)],$$

$$d_2 = g_0^2(a_{11}a_{22} - a_{13}^2) - 2a_{22}E + a_{22}(C_{22} + C_{33} - C_{11}) + g_2^2(a_{11}a_{22} - a_{13}^2) +$$

$$+g_3^2\Big(a_{11}a_{22} - \frac{1}{2}a_{13}^2\Big) + g_1^2\Big(a_{13}^2 - \frac{1}{2}a_{22}^2 - a_{11}a_{22}\Big) - \frac{1}{2}a_{13}a_{22}g_3B_{11} + \frac{1}{2}a_{22}^2 g_1 B_{11} - \tag{10}$$

$$-a_{22}^2(\lambda_1+g_0)^2+a_{22}k(a_{13}g_3-a_{22}B_{11}+a_{22}g_1),$$
$$d_3=a_{22}^2(\lambda_1+g_0)(B_{11}-g_1)-2a_{22}(s_1-a_{11}g_0g_1)-2a_{13}^2g_0g_1-a_{13}a_{22}g_3(\lambda_1+g_0),$$
$$d_4=\frac{1}{4}g_3^2(a_{13}^2-2a_{11}a_{22})+\frac{1}{2}g_2^2(a_{13}^2-a_{11}a_{22})+\frac{1}{4}g_1^2(4a_{11}a_{22}-4a_{13}^2-a_{22}^2)-$$
$$-\frac{1}{2}a_{22}(C_{22}+C_{33}-2C_{11})+\frac{1}{2}a_{13}a_{22}g_3(B_{11}-g_1)-\frac{1}{4}a_{22}^2B_{11}(B_{11}-2g_1).$$

Соотношения (8), (9) позволяют преобразовать уравнения, вытекающие из (2), к виду

$$\dot\nu_1=-\sqrt{\Delta(\nu_1)},\tag{11}$$
$$\dot\nu_2=\frac{1}{a_{22}(1-\nu_1^2)}\big[\nu_2(a_{22}\nu_1-a_{13}\nu_3)\sqrt{\Delta(\nu_1)}+\nu_3F(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\big],\tag{12}$$
$$\dot\nu_3=\frac{1}{a_{22}(1-\nu_1^2)}\big[(a_{13}\nu_2^2+a_{22}\nu_1\nu_3)\sqrt{\Delta(\nu_1)}-\nu_2F(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\big],\tag{13}$$

Здесь введено обозначение

$$F(\nu_1,\nu_2,\nu_3)=\varepsilon_0\nu_2(1-\nu_1^2)+\nu_3(\beta_0+\beta_1\nu_1+\beta_2\nu_1^2)+\gamma_0+\gamma_1\nu_1+\gamma_2\nu_1^2+\gamma_3\nu_1^3,\tag{14}$$

где

$$\varepsilon_0=(a_{11}a_{22}-a_{13}^2)B_{12},\qquad \beta_0=a_{13}a_{22}k+\frac{a_{22}}{2a_{13}}[a_{11}a_{22}B_{22}-(a_{11}a_{22}-a_{13}^2)B_{33}],$$
$$\beta_1=-a_{22}(a_{13}\lambda_1+a_{22}\lambda_3),\qquad \beta_2=\frac{a_{22}}{2a_{13}}[a_{13}^2B_{11}-(a_{11}a_{22}-a_{13}^2)B_{22}+a_{11}a_{22}B_{33}],$$
$$\gamma_0=\frac{a_{22}\lambda_3}{a_{13}}(a_{11}a_{22}-a_{13}^2),\tag{15}$$
$$\gamma_1=-\frac{1}{2}\big[2a_{22}^2k+(a_{11}a_{22}+a_{22}^2-a_{13}^2)B_{22}+(a_{11}a_{22}-a_{13}^2)B_{33}\big],$$
$$\gamma_2=\frac{a_{22}^2}{a_{13}}(a_{13}\lambda_1+a_{22}\lambda_3)-\frac{a_{22}\lambda_3}{a_{13}}(a_{11}a_{22}-a_{13}^2),$$
$$\gamma_3=\frac{1}{2}\big[(a_{11}a_{22}-a_{13}^2)B_{22}+(a_{11}a_{22}-a_{13}^2-a_{22}^2)B_{33}-a_{22}^2B_{11}\big].$$

Таким образом, интегрирование системы (1), (2) на инвариантном соотношении (4) сведено к интегрированию системы третьего порядка (11)-–(13), которая имеет первый интеграл с фиксированной постоянной: $\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1$.

3. Интегрирование системы (11)—(13). В работах [2, 3] нахождение интегрирующего множителя аналогов уравнений (11)—(13) осуществлено в переменных ν_1,ν_2,ν_3. Однако, вычисления значительно упрощаются, если систему (11)—(13) преобразовать к новым переменным:

$$\nu_1=\cos\theta,\qquad \nu_2=\sin\theta\cos\varphi,\qquad \nu_3=\sin\theta\sin\varphi.\tag{16}$$

Тогда система (11)—(13) приводится к двум уравнениям

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{\sqrt{\Delta(\cos\theta)}}{\sin\theta},\tag{17}$$

$$a_{22}\sqrt{\Delta(\cos\theta)}\sin\theta d\varphi+[\varepsilon_0\sin^3\theta\cos\varphi+(\beta_0+\beta_1\cos\theta+\beta_2\cos^2\theta)\sin\theta\sin\varphi+ \\ +\gamma_0+\gamma_1\cos\theta+\gamma_2\cos^2\theta+\gamma_3\cos^3\theta-a_{13}\sqrt{\Delta(\cos\theta)}\sin\theta\cos\varphi]d\theta=0. \tag{18}$$

Из уравнения (17) устанавливаем зависимость $\theta=\theta(t)$. В общем случае на основании уравнения (11) можно сделать вывод о том, что функция $\nu_1=\cos\theta$ является эллиптической функцией времени.

Для интегрирования уравнения (18) воспользуемся теорией интегрирующего множителя [14]. Будем искать его в виде

$$M(\varphi,\theta)=\frac{1}{\sqrt{\Delta(\cos\theta)}(f_1(\theta)\sin\varphi+f_2(\theta)\cos\varphi+f_3(\theta))}\ , \tag{19}$$

где $f_i(\theta)$ $(i=\overline{1,3})$ – функции, подлежащие определению. Если интегрирующий множитель будет найден, то уравнение (18) примет вид

$$\frac{\partial V(\varphi,\theta)}{\partial\varphi}d\varphi+\frac{\partial V(\varphi,\theta)}{\partial\theta}d\theta=0, \tag{20}$$

где

$$\frac{\partial V(\varphi,\theta)}{\partial\varphi}=a_{22}\sin\theta(f_1(\theta)\sin\varphi+f_2(\theta)\cos\varphi+f_3(\theta))^{-1}, \tag{21}$$

$$\frac{\partial V(\varphi,\theta)}{\partial\theta}=[\varepsilon_0\sin^3\theta\cos\varphi+(\beta_0+\beta_1\cos\theta+\beta_2\cos^2\theta)\sin\theta\sin\varphi+ \\ +\gamma_0+\gamma_1\cos\theta+\gamma_2\cos^2\theta+\gamma_3\cos^3\theta-a_{13}\sqrt{\Delta(\cos\theta)}\sin\theta\cos\varphi]\times \\ \times(f_1(\theta)\sin\varphi+f_2(\theta)\cos\varphi+f_3(\theta))^{-1}(\Delta(\cos\theta))^{-\frac{1}{2}}. \tag{22}$$

Принимая во внимание выражения (21), (22), распишем равенство $\dfrac{\partial^2V(\varphi,\theta)}{\partial\theta\partial\varphi}=\dfrac{\partial^2V(\varphi,\theta)}{\partial\varphi\,\partial\theta}$:

$$a_{22}(f_1(\theta)\cos\theta-f_1'(\theta)\sin\theta)\sqrt{\Delta(\cos\theta)}=a_{13}\sqrt{\Delta(\cos\theta)}f_3(\theta)\sin\theta+ \\ +f_2(\theta)(\gamma_0+\gamma_1\cos\theta+\gamma_2\cos^2\theta+\gamma_3\cos^3\theta)-\varepsilon_0f_3(\theta)\sin^3\theta, \tag{23}$$

$$a_{22}(f_2(\theta)\cos\theta-f_2'(\theta)\sin\theta)\sqrt{\Delta(\cos\theta)}=f_3(\theta)(\beta_0+\beta_1\cos\theta+\beta_2\cos^2\theta)\sin\theta- \\ -f_1(\theta)(\gamma_0+\gamma_1\cos\theta+\gamma_2\cos^2\theta+\gamma_3\cos^3\theta), \tag{24}$$

$$a_{22}(f_3(\theta)\cos\theta-f_3'(\theta)\sin\theta)\sqrt{\Delta(\cos\theta)}=f_2(\theta)(\beta_0+\beta_1\cos\theta+\beta_2\cos^2\theta)\sin\theta- \\ -\varepsilon_0f_1(\theta)\sin^3\theta+a_{13}f_1(\theta)\sqrt{\Delta(\cos\theta)}\sin\theta. \tag{25}$$

Покажем, что система (23)–(25) имеет решение при условии $B_{12}=0$, то есть при $\varepsilon_0=0$. В этом случае из системы (6) следует ряд ограничений: $B_{23}=0, s_2=0, C_{12}=0, C_{23}=0$. Соотношение (7) примет вид

$$x_1=\frac{a_{22}\lambda_3}{a_{13}}-\frac{1}{2}(B_{22}+B_{33})\nu_1+\frac{a_{22}}{2a_{13}}(B_{22}-B_{33})\nu_3. \tag{26}$$

Непосредственной подстановкой можно убедится в том, что уравнения (23), (25) имеют решение

$$f_1(\theta)=P_0+P_1\cos\theta+P_2\cos^2\theta,$$

$$f_2(\theta) = \sqrt{\Delta(\cos\theta)}, \qquad f_3(\theta) = (Q_0 + Q_1\cos\theta)\sin\theta, \tag{27}$$

где P_i $(i = \overline{1,2}), Q_0, Q_1$ в силу (15) могут быть представлены в виде

$$P_0 = \frac{a_{22}}{2(a_{13}^2 + a_{22}^2)}\big[2(a_{11}a_{22} - a_{13}^2 - a_{22}^2)B_{33} - (a_{13}^2 + a_{22}^2)(2k + B_{22}) - 2a_{22}^2 B_{11}\big], \tag{28}$$

$$\begin{gathered} P_1 = \frac{a_{22}}{a_{13}}(a_{13}\lambda_1 + a_{22}\lambda_3), \\ P_2 = \frac{a_{22}}{2(a_{13}^2 + a_{22}^2)}\big[(a_{22}^2 - a_{13}^2)B_{11} + (a_{22}^2 + a_{13}^2 - 2a_{11}a_{22})B_{33}\big], \end{gathered} \tag{29}$$

$$Q_0 = \frac{a_{22}}{a_{13}^2}\big[a_{13}a_{22}\lambda_1 + (a_{22}^2 - a_{11}a_{22} + a_{13}^2)\lambda_3\big],$$

$$\begin{gathered} Q_1 = \frac{1}{2a_{13}(a_{13}^2 + a_{22}^2)}\big[-2a_{13}^2 a_{22}^2 B_{11} + (a_{13}^2 + a_{22}^2)(a_{11}a_{22} - a_{13}^2)B_{22} + \\ + (a_{11}a_{13}^2 a_{22} - a_{11}a_{22}^3 - a_{13}^4 - a_{13}^2 a_{22}^2)B_{33}\big]. \end{gathered} \tag{30}$$

Внесем выражения (27) в уравнение (24) и потребуем, чтобы оно было тождеством по θ:

$$\begin{gathered} a_{22}d_1 = 2(\beta_0 Q_0 - \gamma_0 P_0), \qquad a_{22}(d_0 + d_2) = \beta_0 Q_1 + \beta_1 Q_0 - \gamma_0 P_1 - \gamma_1 P_0, \\ \frac{1}{2}a_{22}(d_1 + 3d_3) = \beta_2 Q_0 + \beta_1 Q_1 - \beta_0 Q_0 - \gamma_2 P_0 - \gamma_1 P_1 - \gamma_0 P_2, \\ \frac{1}{2}a_{22}d_3 = \beta_2 Q_0 + \beta_1 Q_1 + \gamma_3 P_1 + \gamma_2 P_2, \\ 2a_{22}d_4 = \beta_2 Q_1 - \beta_1 Q_0 - \beta_0 Q_1 - \gamma_3 P_0 - \gamma_2 P_1 - \gamma_1 P_2, \\ a_{22}d_4 = \beta_2 Q_1 + \gamma_3 P_2. \end{gathered} \tag{31}$$

Система (31) совместна при наличии соотношений (10), (28)–(30), если выполняются условия на параметры:

$$\begin{gathered} C_{22} - C_{11} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{13}^2}{4a_{13}^2(a_{13}^2 + a_{22}^2)}\big[a_{11}a_{13}^2(B_{22} + B_{33})^2 + a_{11}a_{22}^2(B_{22} - B_{33})^2 - 4a_{13}^2 a_{22}B_{11}B_{22}\big], \\ s_1 = \frac{a_{22}(a_{11}a_{22} - a_{13}^2)}{2a_{13}^3(a_{13}^2 + a_{22}^2)}\Big(a_{13}\lambda_1(a_{13}^2 + a_{22}^2)(B_{22} - B_{33}) + \lambda_3[2a_{13}^2 a_{22}B_{11} + \\ + (a_{22} - a_{11}) \times (a_{13}^2 + a_{22}^2)B_{22} - (a_{13}^2(a_{11} + a_{22}) + a_{22}^2(a_{22} - a_{11}))B_{33}]\Big). \end{gathered} \tag{32}$$

Таким образом, если наряду с соотношениями (6), где $B_{12} = 0$, выполняются еще и условия (32), то уравнения (1), (2) на инвариантном соотношении (4) приводятся к системе (17), (18), которая допускает интегрирующий множитель (19) со значениями функций $f_i(\theta)$ из (27). При этом постоянные E и k остаются произвольными.

Обратимся к уравнениям (21), (22). Из уравнения (21) имеем

$$V(\varphi, \theta) = \frac{a_{22}}{\sqrt{\mu_0}}\ln\left|\frac{h(\theta) + \sqrt{\mu_0}\,\mathrm{tg}\frac{\varphi - \alpha(\theta)}{2}}{h(\theta) - \sqrt{\mu_0}\,\mathrm{tg}\frac{\varphi - \alpha(\theta)}{2}}\right| + F(\theta), \tag{33}$$

где

$$\mu_0 = d_0 + P_0^2 - Q_0^2,$$
$$h(\theta) = Q_0 + Q_1\cos\theta + \sqrt{\mu_0 + (Q_0 + Q_1\cos\theta)^2}, \tag{34}$$

$$\alpha(\theta) = \arcsin\frac{P_0 + P_1\cos\theta + P_2\cos^2\theta}{\sqrt{\mu_0 + (Q_0 + Q_1\cos\theta)^2}\sin\theta}. \tag{35}$$

Функцию $F(\theta)$ найдем, подставив выражение (33) в уравнение (22),

$$F(\theta) = f(\cos\theta) = \int\frac{(K_0 + K_1\cos\theta + K_2\cos^2\theta)d(\cos\theta)}{\sqrt{\Delta(\cos\theta)}\big(\mu_0 + (Q_0 + Q_1\cos\theta)^2\big)}, \tag{36}$$

где

$$K_0 = a_{13}d_0 - \beta_0 P_0, \qquad K_1 = (\gamma_2 - \gamma_0)Q_1, \qquad K_2 = \gamma_3 Q_1.$$

Следовательно, из уравнения (20) вытекает первый интеграл $V(\varphi,\theta) = C$, где C – произвольная постоянная. В силу формул (33)–(36) запишем его следующим образом:

$$\frac{a_{22}}{\sqrt{\mu_0}}\ln\left|\frac{h(\theta) + \sqrt{\mu_0}\,\mathtt{tg}\frac{\varphi-\alpha(\theta)}{2}}{h(\theta) - \sqrt{\mu_0}\,\mathtt{tg}\frac{\varphi-\alpha(\theta)}{2}}\right| + f(\cos\theta) = C. \tag{37}$$

Как уже было отмечено, зависимость $\theta(t)$ определяется из уравнения (17). Из интеграла (37) находится функция $\varphi = \varphi(\theta)$, а из соотношений (16) – функции $\nu_i = \nu_i(t)$. Компоненты вектора момента количества движения гиростата задаются соотношениями (8), (26).

Покажем действительность полученного решения. По условию существования множителя и интеграла (37) должно выполняться условие $\mu_0 = d_0 + P_0^2 - Q_0^2$. Так как из формул (28), (30) следует, что P_0 и Q_0 не зависят от постоянной E, а в выражение для d_0 из (10) она входит линейно, то можно выбором этой постоянной добиться условий $\mu_0 > 0$ и $d_0 > 0$. Второе условие показывает, что $\Delta(\cos\theta) > 0$ и существует невырожденный промежуток по ν_1 ($\nu_1^{(1)} \le \nu_1 \le \nu_1^{(2)}$, где $|\nu_1^{(i)}| < 1$), в котором функция $\Delta(\cos\theta)$ неотрицательна. То есть, функция $\theta(t)$, определяемая из формулы (17), действительна. Полученное в данной работе решение зависит от четырех произвольных постоянных E, k, C и θ_0.

Если в данном решении перейти к рассмотрению классического аналога, то в формулах (6), (32) необходимо положить $B_{ij} = 0, C_{ij} = 0$ $(i,j = 1,2,3)$. Тогда получим $s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 0$, то есть центр масс гиростата неподвижен. Эти условия характеризуют известное решение Н.Е. Жуковского [15]. Следовательно, полученные здесь результаты не переносятся на обобщение Л.Н. Сретенского [12] для решения В. Гесса [11].

4. Заключение. Указанный выше пример интегрирования системы (17), (18) в квадратурах не является единственным. В работе [16] показано, что при выполнении условий

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \qquad s_2 = s_3 = 0, \qquad B_{11} = \frac{B_{33}}{a_{22}^2 - a_{13}^2}(2a_{11}a_{22} - a_{13}^2 - a_{22}^2),$$

$$B_{22} = \frac{B_{33}}{a_{22}^2 - a_{13}^2}(a_{13}^2 + a_{22}^2), \qquad B_{13} = \frac{2a_{13}a_{22}B_{33}}{a_{22}^2 - a_{13}^2}, \qquad C_{12} = C_{23} = 0,$$

$$C_{13} = \frac{1}{4a_{13}^2}(a_{11}a_{22} - a_{13}^2)(B_{22}^2 - B_{33}^2), \qquad C_{22} - C_{33} = \frac{a_{22}}{4a_{13}^2}(a_{11}a_{22} - a_{13}^2)(B_{22} - B_{33})^2,$$

$$k = \frac{B_{33}}{2(a_{13}^2 - a_{22}^2)}(2a_{11}a_{22} - a_{13}^2 + a_{22}^2).$$

Уравнение (18) принимает вид

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{a_{13}}{a_{22}}\cos\varphi$$

и, следовательно, интегрируется в элементарных функциях. В решении [16] сохранено три произвольных постоянных.

1. *Харламов П.В., Мозалевская Г.В., Лесина М.Е.* О различных представлениях уравнений Кирхгофа // Механика твердого тела. — 2001. – Вып. 31. – С. 3—17.
2. *Чаплыгин С.А.* О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости. Статья вторая // Собр. соч. Т. 1. – М.–Л.: Гостехиздат, 1948. – С. 304—311.
3. *Харламов П.В.* О линейном интеграле уравнений движения тяжелого твердого тела в жидкости // Тр. Донецкого индустриального ин-та. — 1957. — **20**, вып. 1 – С. 51—67.
4. *Харламов П.В.* О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // Журнал прикл. механики и техн. физики. – 1963. — № 4. – С. 17—29.
5. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. — Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2001. – 384 с.
6. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние // Киев: Наук. думка, 1978. – 296 с.
7. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces. I. The equation of motion and their transformation. — I. thear. and appl. mech. — 1985. — **5**, № 5. — P. 747–762.
8. *Козлов В.В., Онищенко Д.А.* Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа // Докл. АН СССР. – 1982. — **266**, № 6. — С. 1298—1300.
9. *Kirchhoff G.R.* Über die Bewegung eines Rotation Körpers in eines Flüssigkeit // J. Fur die Reine und angew. Math. — 1870. — B.3. – S.237–262.
10. *Зиглин С.Л.* Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновых системах // Функциональный анализ и его приложения. — 1983. – **17**, № 1. – С. 8–23.
11. *Hess W.* Über die Eulerschen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren schweren Körpers um einen festen Punkt // Math. Ann. – 1890. – B.37, H.2. – S. 153–181.
12. *Сретенский Л.Н.* О некоторых случаях движения тяжелого твердого тела с гироскопом // Вест. Московского ун-та. Математика, механика. – 1963. – № 3. – С. 60 – 71.
13. *Ковалев А.М.* О движении тела в случае Гесса // Механика твердого тела. — 1969. — Вып. 1. — С. 12—27.
14. *Голубев В.В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. – М.: Гостехиздат, 1953. — 287 с.
15. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Журнал Русск. физ.-хим. о-ва. Часть физ. 1885. — Т. 17. — Отд. 1. — Вып. 6. — С. 81–113.
16. *Узбек Е.К.* Новое решение уравнений Кирхгофа задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил // Доп. НАНУ. — 2003. – № 9. – С. 45–50.

Донецкий гос. ун-т экономики и торговли им. М.Туган-Барановского
Получено 30.01.2004