ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2004. Вып. 34

УДК 531.38

©2004. **М.Е. Лесина, А.П. Харламов**

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ПО ИНЕРЦИИ ДВУХ ГИРОСКОПОВ ЛАГРАНЖА, СОЕДИНЕННЫХ НЕГОЛОНОМНЫМ ШАРНИРОМ

Задача о движении двух гироскопов Лагранжа, соединенных идеальным упругим шарниром, поставленная в [1] (и позже обобщенная в [2], [5]), изучалась в работах [3, 4, 6–11, 13–15]. Дальнейшее обобщение задача получила при замене сферического шарнира неголономным, введенным в работе [16]. В [12] дана постановка задачи о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром, найдено решение, характеризуемое нулевым начальным значением момента количества движения системы. В данной работе построено решение с ненулевым начальным значением момента количества движения системы при условии, что одно из тел системы закреплено в центре масс.

1. Постановка задачи. Воспользуемся уравнениями движения рассматриваемой задачи из работы [12], в которой в дополнение к указанным в [5] взаимодействиям тел S и S_0 в неголономном шарнире введен момент $\mathbf{L} = L\text{э}_3$, характеризующий действие через этот шарнир тела S_0 на S. Тогда

$$\mathbf{L} = -\mathbf{e}_2 L \sin\theta + \mathbf{e}_3 L \cos\theta, \tag{1}$$

$$n = I(\omega_3 + \dot\varphi), \tag{2}$$

$$n_0 = I_0(\Omega_3 + \dot\Phi), \tag{3}$$

$$\dot n = L\cos\theta, \tag{4}$$

$$\dot n_0 = -L, \tag{5}$$

$$A(\dot\omega_1 - \omega_2\omega_3) + n\omega_2 = -\Pi'(\theta) - N\big[(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)\sin\theta - (\dot\Omega_1 - \Omega_2\Omega_3)\cos\theta\big], \tag{6}$$

$$A(\dot\omega_2 + \omega_3\omega_1) - n\omega_1 = N(\dot\Omega_2 + \Omega_3\Omega_1) - L\sin\theta, \tag{7}$$

$$A_0(\dot\Omega_1 - \Omega_2\Omega_3) + n_0\Omega_2 = \Pi'(\theta) + N\big[(\omega_1^2 + \omega_2^2)\sin\theta - (\dot\omega_1 - \omega_2\omega_3)\cos\theta\big], \tag{8}$$

$$A_0(\dot\Omega_2 + \Omega_3\Omega_1) - n_0\Omega_1 = N(\dot\omega_2 + \omega_3\omega_1). \tag{9}$$

Уравнения (4)–(6) дополнены кинематическими соотношениями

$$\dot\theta = \Omega_1 - \omega_1, \tag{10}$$

$$\Omega_2 = \omega_2\cos\theta + \omega_3\sin\theta, \qquad \Omega_3 = -\omega_2\sin\theta + \omega_3\cos\theta \tag{11}$$

и уравнением неголономного шарнира [16]

$$\dot\Phi = \dot\varphi\cos\theta. \tag{12}$$

Система (2)–(12) замкнута: двенадцать уравнений связывают двенадцать величин ω_1, $\omega_2, \omega_3; \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3; n, n_0, \varphi, \Phi, \theta, L$. Имеется интеграл, выражающий сохранение момента количества движения системы относительно ее центра масс [5, (12)]

$$G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = g^2, \tag{13}$$

$$
\begin{aligned}
G_1 &= (A - N\cos\theta)\omega_1 + (A_0 - N\cos\theta)\Omega_1,\\
G_2 &= (A - N\cos\theta)\omega_2 + (A_0\cos\theta - N)\Omega_2 - n_0\sin\theta,\\
G_3 &= (A_0\Omega_2 - N\omega_2)\sin\theta + n_0\cos\theta + n,
\end{aligned}
\tag{14}
$$

и интеграл энергии [12, (15)]

$$
A(\omega_1^2+\omega_2^2) + A_0(\Omega_1^2+\Omega_2^2) - 2N(\Omega_1\omega_1\cos\theta + \Omega_2\omega_2) + \frac{n^2}{I} + \frac{n_0^2}{I_0} + 2\Pi(\theta) = 2h. \tag{15}
$$

В рассматриваемой задаче потенциальная энергия $\Pi(\theta)$ не конкретизирована, и вследствие (15) остающийся в ее выборе произвол можно отнести к зависимости $\omega_2(\theta)$, конкретизация которой определит и зависимость $\Pi(\theta)$. Исключая из уравнений (4)–(5) момент L, получим

$$
n' = -n_0'\cos\theta \tag{16}
$$

(здесь и в дальнейшем штрихом обозначено дифференцирование по θ).

Внося (11), (12) в (3), с учетом (2) находим

$$
n_0 = -I_0\omega_2\sin\theta + \frac{I_0}{I}n\cos\theta. \tag{17}
$$

Исключая n_0 из (16), (17), получим для $n(\theta)$ уравнение

$$
n'(\theta) - \frac{\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta + I/I_0}n(\theta) = I\frac{[\omega_2(\theta)\sin\theta]'\cos\theta}{\cos^2\theta + I/I_0}, \tag{18}
$$

общее решение которого имеет вид

$$
n(\theta) = \frac{g}{\sqrt{\cos^2\theta + I/I_0}}\Big[C + \int\frac{[\omega_2(\theta)\sin\theta]'\cos\theta d\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + I/I_0}}\Big].
$$

Зависимость $n_0(\theta)$ определяем из (17). Вместо ω_1, Ω_1 введем переменные $\xi, \varkappa$ [6, (10)]

$$
\omega_1(\xi+1)\varkappa, \qquad \Omega_1(\xi-1)\varkappa, \tag{19}
$$

тогда из (10), (19) следует

$$
\dot\theta = -2\varkappa. \tag{20}
$$

Запишем уравнения (7), (9) в новых переменных и разрешим их относительно ω_2', Ω_2' :

$$
2\omega_2' - (\xi+1)\omega_3 = -[A_0 n(\xi+1) + Nn_0(\xi-1) - 2A_0 n_0'\sin\theta]/H, \tag{21}
$$

$$
2\Omega_2' - (\xi-1)\Omega_3 = -[An_0(\xi-1) + Nn(\xi+1) - 2Nn_0'\sin\theta]/H, \tag{22}
$$

$$
H = AA_0 - N^2 > 0.
$$

Определив из кинематических соотношений (11)

$$
\omega_3 = (\Omega_2 - \omega_2\cos\theta)/\sin\theta, \qquad \Omega_3 = (\Omega_2\cos\theta - \omega_2)/\sin\theta, \tag{23}
$$

вносим их в (21), (22) и получаем два уравнения

$$
(\xi+1)[H(\Omega_2 - \omega_2\cos\theta) - (A_0 n + Nn_0)\sin\theta] = 2[H\omega_2' - (Nn_0 + A_0 n_0'\sin\theta)]\sin\theta, \tag{24}
$$

$$(\xi-1)[H(\Omega_2\cos\theta-\omega_2)-(An_0+Nn)\sin\theta]=2[H\Omega_2'-N(-n+n_0'\sin\theta)]\sin\theta. \tag{25}$$

Если

$$H(\Omega_2-\omega_2\cos\theta)-(A_0n+Nn_0)\sin\theta\neq 0, \tag{26}$$

то из (24) можем определить ξ:

$$\xi=-1+2\frac{[H\omega_2'-(Nn_0+A_0n_0'\sin\theta)]\sin\theta}{H(\Omega_2-\omega_2\cos\theta)-(A_0n+Nn_0)\sin\theta}. \tag{27}$$

Исключая ξ из (25), получаем уравнение для Ω_2

$$[\Omega_2+f(\theta)]\Omega_2'=f_2(\theta)\Omega_2^2+f_1(\theta)\Omega_2+f_0(\theta), \tag{28}$$

где

$$\begin{aligned}
f(\theta)=&\quad -\omega_2(\theta)\cos\theta-[(A_0n+Nn_0)/H]\sin\theta,\qquad f_2(\theta)=-\mathtt{ctg}\theta,\\
f_1(\theta)=&\quad -\omega_2'(\theta)\cos\theta+\omega_2(\theta)(\sin\theta+2\cos\theta\mathtt{ctg}\theta)+\\
&\quad +[A_0n\cos\theta+An_0-(A_0\cos\theta-N)n_0'\sin\theta]/H,\\
f_0(\theta)=&\quad \{-\omega_2(\theta)-[(Nn+An_0)\sin\theta]/H\}\ \omega_2'(\theta)+[n_0(n_0'\sin\theta-n)\sin\theta]/H+\\
&\quad +\{-\omega_2(\theta)\mathtt{ctg}\theta+[-A_0n-An_0\cos\theta+(A_0-N\cos\theta)n_0'\sin\theta]/H\}\omega_2(\theta).
\end{aligned}$$

Если же

$$H(\Omega_2-\omega_2\cos\theta)-(A_0n+Nn_0)\sin\theta=0,$$

то из (24) следует, что и правая часть обращается в нуль, то есть

$$H\omega_2'-(Nn_0+A_0n_0'\sin\theta)=0,$$

а ξ будем определять из (25). Этот вариант будет изучен отдельно. Заменой

$$\eta(\theta)=\left\{\Omega_2(\theta)-\omega_2\cos\theta-[A_0n(\theta)+Nn_0(\theta)]\frac{\sin\theta}{H}\right\}\sin\theta\neq 0 \tag{29}$$

преобразуем уравнение (28) к виду

$$\eta(\theta)\ \eta'(\theta)=F_1(\theta)\eta(\theta)+F_0(\theta), \tag{30}$$

где

$$F_1(\theta)=\{2\omega_2(\theta)\sin\theta+[-2A_0n(\theta)\cos\theta+(A-3N\cos\theta)n_0(\theta)]/H\}\sin\theta, \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
F_0(\theta)=\{\omega_2(\theta)\sin\theta+[-(A_0\cos\theta-N)n(\theta)+(A-N\cos\theta)n_0(\theta)]/H\}\{\omega_2'+\\
+[Nn_0(\theta)+A_0n_0'(\theta)\sin\theta]/H\}\sin^3\theta.
\end{aligned} \tag{32}$$

Таким образом, при неконкретизированной функции $\omega_2(\theta)$ для двенадцати величин $\xi,\varkappa,\Pi(\theta),\eta,\omega_3,\Omega_3,n,n_0,\varphi,\Phi,\theta,L$ имеем соответственно двенадцать уравнений: (27), (13), (15), (30), (23), (16), (17), (2), (3), (20), (5).

Уравнение (30) представляет собой уравнение Абеля второго рода. Как известно, при неконкретизированной функции $\omega_2(\theta)$ его нельзя проинтегрировать, поэтому конкретизируем $\omega_2(\theta)$ таким образом, чтобы $F_0(\theta)$ обратилась в нуль. Из двух вариантов выбираем такой

$$\omega_2(\theta)=\frac{1}{H\sin\theta}[(A_0\cos\theta-N)n(\theta)-(A-N\cos\theta)n_0(\theta)]. \tag{33}$$

При этом уравнение (30) принимает вид $[\eta'(\theta) - F_1(\theta)]\eta(\theta) = 0$, а так как $\eta(\theta) \neq 0$, то

$$\eta'(\theta) = F_1(\theta). \tag{34}$$

2. Построение решения. Три уравнения (16), (17), (33) связывают три величины n, n_0, ω_2. Выразим из (17), (33) ω_2 и n через n_0

$$\omega_2(\theta) = \frac{NI_0\cos^2\theta + (A_0I - AI_0)\cos\theta - NI}{[(H - A_0I)\cos\theta + NI]I_0\sin\theta} n_0(\theta), \tag{35}$$

$$n(\theta) = \frac{I[(H - AI_0) + NI_0\cos\theta]}{I_0[NI + (H - A_0I)\cos\theta]} n_0(\theta), \tag{36}$$

внесем их в (16) и получим уравнение

$$\frac{n_0'(\theta)}{n_0(\theta)} = \frac{I[(H - A_0I)(H - AI_0) - N^2II_0](\cos\theta)'}{[(H - A_0I)\cos\theta - NI][(H - A_0I)I_0\cos^2\theta + 2NII_0\cos\theta + (H - AI_0)I]},$$

из которого находим зависимость n_0 от θ

$$n_0(\theta) = gC\frac{\cos\theta + \frac{NI}{H - A_0I}}{\sqrt{\cos^2\theta + 2\frac{NI}{H - A_0I}\cos\theta + \frac{(H - AI_0)I}{(H - A_0I)I_0}}} \tag{37}$$

(здесь произвольная постоянная взята в виде $gC, g \neq 0$). Подставив найденные значения $n_0(\theta)$ в (35), (36), установим зависимость от θ величин ω_2 и n

$$\omega_2(\theta) = \frac{Cg[NI_0\cos^2\theta + (A_0I - AI_0)\cos\theta - NI]}{I_0(H - A_0I)\sqrt{\cos^2\theta + 2\frac{NI}{H - A_0I}\cos\theta + \frac{(H - AI_0)I}{(H - A_0I)I_0}}\sin\theta}\ , \tag{38}$$

$$n(\theta) = \frac{Cg\big(\cos\theta + \frac{NI}{H - A_0I}\big)}{\sqrt{\cos^2\theta + 2\frac{NI}{H - A_0I}\cos\theta + \frac{(H - AI_0)I}{(H - A_0I)I_0}}}\ , \tag{39}$$

Обозначим $\cos\theta = u$, с учетом (37)–(39) запишем уравнение (34)

$$\frac{d\eta}{du} = \frac{Cg}{HI_0}\frac{2NI[NI_0u + H - AI_0] + (AI_0 + NI_0u)[(H - A_0I)u + NI]}{\sqrt{(H - A_0I)^2u^2 + 2(H - A_0I)NIu + (H - A_0I)(H - AI_0)I/I_0}},$$

интегрируя которое, получаем

$$\begin{gathered}\eta - \eta_0 = \frac{Cg}{2HI_0}\Big[\frac{2AI_0(H - A_0I) + 3N^2II_0}{(H - A_0I)^2} + \\ +NI_0u\Big]\sqrt{u^2 + \frac{2NIu}{H - A_0I} + \frac{(H - AI_0)I}{(H - A_0I)I_0}} + \\ +\frac{3CgNI[(H - A_0I)(H - AI_0) - N^2II_0]}{2(H - A_0I)^2HI_0}\int\frac{du}{\sqrt{u^2 + \frac{2NIu}{H - A_0I} + \frac{(H - AI_0)I}{(H - A_0I)I_0}}}.\end{gathered} \tag{40}$$

Чтобы упростить зависимости (37)–(40), предположим, что одно из тел закреплено в центре масс, то есть

$$N = 0, \tag{41}$$

тогда $H = AA_0$. Введем безразмерный параметр

$$b = \frac{(A_0 - I_0)AI}{(A - I)A_0 I_0} \tag{42}$$

и запишем теперь (37)–(40) при условии (41)

$$n_0(\theta) = \frac{Cg\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + b}}\ , \tag{43}$$

$$n(\theta) = \frac{Cgb}{\sqrt{\cos^2\theta + b}}\ , \tag{44}$$

$$\omega_2(\theta) = Cg\Big(\frac{b}{I} - \frac{1}{I_0}\Big)\frac{\mathtt{ctg}\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + b}}\ , \tag{45}$$

$$\eta = \eta_0 + \frac{Cg}{A_0}\sqrt{\cos^2\theta + b} \tag{46}$$

(далее постоянную интегрирования η_0 полагаем нулем). Подставляя значения (43)–(46) в (29), находим

$$\Omega_2(\theta) = \frac{Cg(A + A_0)}{AA_0}\frac{b}{\sqrt{\cos^2\theta + b}}\ , \tag{47}$$

после чего из (27) получаем

$$\xi(\theta) = 1 + \frac{2(A + A_0)b(1 - b - 2\cos^2\theta)}{A(\cos^2\theta + b)^2}. \tag{48}$$

Введем безразмерный параметр

$$k = A_0/A \tag{49}$$

и найдем из (14) компоненты G_1, G_2, G_3 момента количества движения системы с учетом (19), (41), (43)–(48)

$$\begin{aligned}
&G_1 = \frac{2A}{(\cos^2\theta + b)^2}\big[(\cos^2\theta + b)^2 - 2(1 + k)^2 b(\cos^2\theta + b) + (1 + k)^2 b(b + 1)\big]\varkappa(\theta),\\
&G_2 = \frac{Cg\mathtt{ctg}\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + b}}\Big[\cos^2\theta + b(2 + k) - \frac{1 + k}{k}\Big],\\
&G_3 = \frac{Cg}{\sqrt{\cos^2\theta + b}}[\cos^2\theta + b(2 + k)].
\end{aligned} \tag{50}$$

Подставив (50) в (13), получим

$$\begin{aligned}
&\varkappa^2(\theta) = \frac{g^2}{4A^2k^2}(\cos^2\theta + b)^3\times\\
&\times\frac{k^2(\cos^2\theta + b)\sin^2\theta - C^2(1 + k)^2\cos^2\theta\sin^2\theta - C^2[\cos^2\theta - b(k^2 + 2k)]^2}{\big[\cos^4\theta - 2b(k^2 + 2k)\cos^2\theta - b^2(k^2 + 2k) + b(k + 1)^2\big]^2\sin^2\theta}\ .
\end{aligned} \tag{51}$$

Зависимость t от θ определим квадратурой из (20) с учетом (51)

$$t = \frac{Ak}{g}\int \frac{\left[u^4 - 2b(k^2+2k)u^2 - b^2(k^2+2k) + b(1+k)^2\right]du}{\sqrt{(u^2+b)^3[k^2(u^2+b) - C^2(1+k)^2u^2](1-u^2) - C^2[u^2 - b(k^2+2k)]^2}}\ . \qquad (52)$$

Подставляя (45), (47), (49) в (23), находим

$$\begin{aligned} \omega_3(\theta) &= \frac{Cg}{Ak\sqrt{\cos^2\theta + b}\ \sin^2\theta}(kb\sin^2\theta + b + \cos^2\theta)\ , \\ \Omega_3(\theta) &= \frac{Cg(b+1)}{Ak\sqrt{\cos^2\theta + b}\ \sin^2\theta}. \end{aligned} \qquad (53)$$

Запишем уравнения (2), (3), привлекая (53), (43), (44):

$$\begin{aligned} \dot\varphi &= \frac{Cg}{\sqrt{\cos^2\theta + b}\ \sin^2\theta}\Big(\frac{\sin^2\theta}{I_0} - \frac{b+1}{A_0}\Big), \\ \dot\Phi &= \frac{Cg\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + b}\ \sin^2\theta}\Big(\frac{\sin^2\theta}{I_0} - \frac{b+1}{A_0}\Big). \end{aligned} \qquad (54)$$

При интегрировании этих уравнений надо использовать (20), (51). Тогда

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 - \frac{Cg}{2}\int \frac{\left(\frac{\sin^2\theta}{I_0} - \frac{b+1}{A_0}\right)d\theta}{\varkappa(\theta)\sin^2\theta\sqrt{\cos^2\theta + b}}\ , \\ \Phi &= \Phi_0 - \frac{Cg}{2}\int \frac{\left(\frac{\sin^2\theta}{I_0} - \frac{b+1}{A_0}\right)\cos\theta d\theta}{\varkappa(\theta)\sin^2\theta\sqrt{\cos^2\theta + b}}\ . \end{aligned} \qquad (55)$$

Потенциальную энергию упругого элемента определяем из (15) с учетом (19), (48), (51), (41), (43)–(45), (47) и обозначения (49)

$$\Pi(\theta) = h_1 + \frac{g^2}{2A}\Bigg\{-\frac{C^2(b+1)}{k(k+1)\sin^2\theta} + \frac{(\cos^2\theta + b)^3}{k(k+1)\sin^2\theta}\times$$

$$\times\frac{C^2(k+1)^2(\cos^2\theta\sin^2\theta + C^2[\cos^2\theta - b(k^2+2k)]^2 - k^2(\cos^2\theta + b)\sin^2\theta}{\left[\cos^4\theta - 2b(k^2+2k)\cos^2\theta - b^2(k^2+2k) + b(k+1)^2\right]^2}\Bigg\}\ . \qquad (56)$$

Таким образом, построено решение задачи, переменные $\omega_2, \Omega_2, n, n_0, \omega_1, \Omega_1, \omega_3, \Omega_3,$ t, φ, Φ и функция $\Pi(\theta)$ соответственно определены соотношениями (45), (47), (43), (44), (19), (48), (51), (53), (52), (55), (56).

1. *Лесина М.Е.* О колебаниях оси маховика в теле-носителе // Механика твердого тела. – 1979. – Вып.11. – С. 32-37.
2. *Лесина М.Е.* Об условиях существования точных решений задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, соединенных сферическим шарниром // Там же. – 1984. – Вып.16. – С. 32-36.
3. *Лесина М.Е.* Уравнения аксоидов в одном из решений задачи о движении двух тел, соединенных сферическим шарниром // Там же. – С. 36–42.
4. *Лесина М.Е.* К построению полного решения в одном случае интегрируемости задачи о движении двух связанных тел // Там же. – 1987. – Вып.19. – С. 54-57.

5. *Лесина М.Е.* К построению полного решения задачи об относительном движении системы двух тел // Там же. – С. 58–68.
6. *Лесина М.Е.* Три новых случая интегрируемости уравнений движения системы двух связанных твердых тел // Там же. – 1989. – Вып. 21. – С. 24-31.
7. *Лесина М.Е.* Аксоиды в одном случае интегрируемости задачи о движении двух тел, связанных сферическим шарниром // Там же. – 1991. – Вып. 23. – С. 43-50.
8. *Лесина М.Е.* Полное решение задачи об одном классе равноаксоидных движений по инерции двух тел, соединенных сферическим шарниром // Там же. – С. 93-101.
9. *Лесина М.Е.* Гамильтонова форма уравнений задачи движении двух связанных тел // Там же. – 1993. – Вып. 25. – С. 42-44.
10. *Лесина М.Е.* Сведение к квадратурам общего случая задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, сочлененных упругим сферическим шарниром // Там же. – 1998. – Вып. 26. – С. 28-33.
11. *Лесина М.Е., Харламов А.П.* Новый подход к построению аксоидов в задаче о движении системы двух связанных тел // Там же. – 1993. – Вып. 25. – С. 30 -42.
12. *Лесина М.Е., Харламов А.П.* Движение по инерции двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром // Там же. – 1995. – Вып. 27. – С. 15-21.
13. *Лесина М.Е., Харламов П.В.* Случаи интегрирования уравнений движения по инерции двух тел, соединенных сферическим шарниром // Изв. АН СССР. Сер. Механика твердого тела. – 1983. – № 4. – С. 26–31.
14. *Лесина М.Е., Шевченко Т.П.* Полное решение задачи о движении двух связанных тел в одном случае интегрируемости // Механика твердого тела. – 1988. – Вып. 20. – С. 71-76.
15. *Лесина М.Е., Шевченко Т.П.* Об одном случае движения двух тел, связанных сферическим шарниром, при нулевом моенте количества движения этой системы // Там же. – 1990. – Вып. 22. – С. 48-54.
16. *Харламов А.П., Харламов М.П.* Неголономный шарнир // Там же. – 1995. – Вып. 27. – С. 1-7.

Донецкий нац. технический ун-т,
Ин-т прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк

Получено 18.10.2003