ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2004. Вып. 34

УДК 531.36

 А.С. Кулешов

О ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛАХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ НА ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТИ

Рассматривается задача о движении тяжелого твердого динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения, по неподвижной горизонтальной плоскости без скольжения. В случае, когда поверхность тела и распределение масс в нем удовлетворяют некоторому условию, указан явный вид двух дополнительных к интегралу энергии первых интегралов уравнений движения тела.

Введение. В 1932 году Х.М. Муштари в своей статье [1] заметил, что "... в то время как изучение общих проблем о неголономных системах дало обильные результаты, круг разрешенных частных задач мало расширился, решение же проблемы катания тяжелого твердого тела вращения по неподвижной горизонтальной плоскости со времени работ Чаплыгина и Аппеля совершенно не продвинулось вперед..."Удивительно, но это замечание сохраняет актуальность по сей день. Интегрируемость задачи о качении тела вращения по неподвижной горизонтальной плоскости была доказана в статье С.А. Чаплыгина [2]. Чаплыгин показал, что уравнения движения тела допускают, помимо интеграла энергии, два линейных относительно обобщенных скоростей, первых интеграла. Однако явный вид этих интегралов известен лишь в случае, когда движущееся тело представляет собой неоднородный динамически симметричный шар [2]. В случае, когда тело является круглым диском или обручем, эти линейные по скоростям интегралы представляются в виде сходящихся гипергеометрических рядов [2, 3]. В работе Х.М. Муштари [1] было продолжено исследование задачи о движении тяжелого тела вращения по неподвижной абсолютно шероховатой плоскости. При дополнительном условии, накладывающем ограничения на распределение масс и форму поверхности тела, были найдены два новых частных случая, когда в явном виде можно указать линейные по скоростям интегралы уравнений движения тела. В первом случае движущееся тело ограничено поверхностью, образуемой при вращении дуги параболы вокруг оси, проходящей через ее фокус, а во втором случае движущееся тело представляет собой параболоид вращения. Для других тел, ограниченных поверхностью вращения и движущихся без скольжения по горизонтальной плоскости, явный вид линейных по скоростям первых интегралов неизвестен. Таким образом, представляет интерес задача о нахождении явного вида этих интегралов в случае движения по плоскости тела, по форме отличного от тел, рассматривавшихся в работах [1-3].

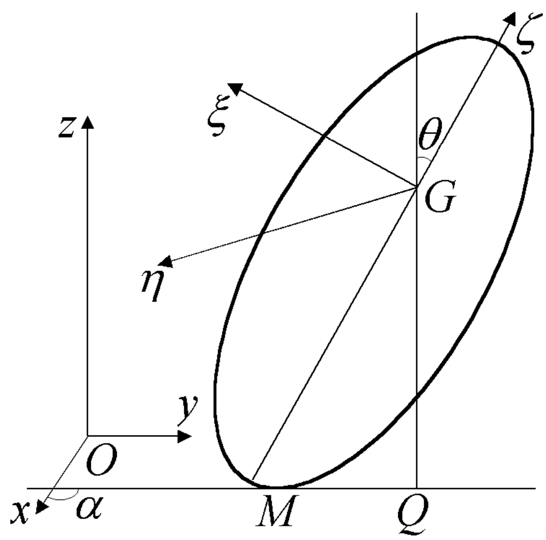
Настоящая работа посвящена дальнейшему изучению данной задачи. Указан явный вид линейных по скоростям интегралов уравнений движения тела, распределение масс и форма поверхности которого удовлетворяют условию Муштари. Результаты работы существенно дополняют и развивают результаты исследования, проведенного Муштари.

1. Постановка задачи и уравнения движения. Пусть твердое тело, симметричное по форме и распределению масс относительно оси $G\zeta$, проходящей через центр тяжести G тела, опирается в точке M на неподвижную горизонтальную плоскость Oxy.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (04-01-00398), гранта "Молодые кандидаты"(МК-1393.2003.01) и гранта "Научные школы"(НШ-2000.2003.1)

Обозначим: θ – угол между осью симметрии тела и вертикалью, β – угол между меридианом $M\zeta$ тела и какой-либо фиксированной меридианной плоскостью, α – угол между горизонтальной касательной MQ меридиана $M\zeta$ и осью Ox. Положение тела будет вполне определено углами α, β, θ и координатами x и y точки M.

Кроме того, введем систему координат $G\xi\eta\zeta$, движущуюся и в пространстве и в теле так, что ось $G\xi$ все время лежит в плоскости вертикального меридиана, а $G\eta$ перпендикулярна этой плоскости (см. рисунок). Пусть векторы скорости $\mathbf{v}$ центра масс G, угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела, угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ трехгранника $G\xi\eta\zeta$ и реакции плоскости $\mathbf{R}$ задаются в системе координат $G\xi\eta\zeta$ компонентами v_ξ, v_η, v_ζ; p, q, r; Ω_ξ, Ω_η, Ω_ζ и R_ξ, R_η, R_ζ соответственно. Пусть m – масса тела, A_1 – его момент инерции относительно осей $G\xi$ и $G\eta$, а A_3 – момент инерции относительно оси симметрии.



Заметим [1-2], что расстояние GQ от центра тяжести до плоскости Oxy будет функцией угла θ, то есть $GQ = f(\theta)$. Координаты ξ, η, ζ точки M касания тела и плоскости в системе координат $G\xi\eta\zeta$ также будут функциями только угла θ, причем $\eta = 0$, а

$$\begin{aligned} \xi &= -f(\theta)\sin\theta - f'(\theta)\cos\theta, \\ \zeta &= -f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\sin\theta. \end{aligned} \tag{1}$$

Так как ось $G\zeta$ неподвижна в теле, то $\Omega_\xi = p$, $\Omega_\eta = q$. Плоскость $G\xi\zeta$ будет все время вертикальной, поэтому $\Omega_\zeta - \Omega_\xi \operatorname{ctg}\theta = 0$. Скорость точки касания M равна нулю, следовательно

$$v_\xi + q\zeta = 0, \quad v_\eta + r\xi - p\zeta = 0, \quad v_\zeta - q\xi = 0.$$

Закон изменения импульса в проекции на ось $G\eta$ и закон изменения кинетического момента для осей $G\xi$ и $G\zeta$ после простых преобразований дают:

$$\begin{aligned} &\frac{d\,(p\zeta - r\xi)}{dt} - pq\,(\zeta\operatorname{ctg}\theta + \xi) = \frac{R_\eta}{m}, \\ &A_1\frac{dp}{dt} + (A_3 r - A_1 p\operatorname{ctg}\theta)\,q = -\zeta R_\eta, \\ &A_3\frac{dr}{dt} = \xi R_\eta. \end{aligned} \tag{2}$$

Отбрасывая в дальнейшем частный случай $\theta = \mathrm{const}$ и имея в виду, что $q = -d\theta/dt$, по исключении R_η из системы (2), получим

$$\begin{aligned} &A_1\frac{dp}{d\theta} + A_3\frac{\zeta}{\xi}\frac{dr}{d\theta} = -A_1 p\operatorname{ctg}\theta + A_3 r, \\ &\zeta\frac{dp}{d\theta} - \frac{(A_3 + m\xi^2)}{m\xi}\frac{dr}{d\theta} = -\left(\zeta\operatorname{ctg}\theta + \xi + \zeta'\right)p + \xi' r. \end{aligned} \tag{3}$$

Эти линейные уравнения первого порядка приводят к одному линейному дифференциальному уравнению второго порядка. Интегрирование этого уравнения или системы (3) дает зависимость p и r от θ с двумя произвольными постоянными; затем интегрирование задачи заканчивается в квадратурах.

Таким образом, из системы (3) определяются два линейных относительно p и r первых интеграла. К настоящему времени явный вид этих интегралов известен лишь в случае, когда движущееся тело является неоднородным динамически симметричным шаром. Действительно, в случае движения по плоскости динамически симметричного шара радиуса R, центр масс которого не совпадает с геометрическим центром, а отстоит от него на расстояние d вдоль оси симметрии шара, имеем

$$f(\theta) = R - d\cos\theta, \quad \xi = -R\sin\theta, \quad \zeta = d - R\cos\theta$$

и из системы (3) находятся два первых интеграла (подробности см. в [2]):

$$A_1 p\sin\theta + A_3 r\left(\cos\theta - \frac{d}{R}\right) = \mathrm{c}_1 = \mathrm{const}, \tag{4}$$

$$r\sqrt{A_1A_3 + mR^2\left(A_1\sin^2\theta + A_3\left(\cos\theta - \frac{d}{R}\right)^2\right)} = \mathrm{c}_2 = \mathrm{const}. \tag{5}$$

Интеграл (4) известен как интеграл Желле [4, 5]. Он выражает условие сохранения во все время движения скалярного произведения кинетического момента шара и радиуса-вектора точки касания относительно центра масс. Интеграл (5) принято называть интегралом Чаплыгина.

Попытка найти явный вид линейных по p и r первых интегралов в случае движения по шероховатой плоскости тел другой формы была предпринята в работе Х.М. Муштари [1]. Ниже мы приводим некоторые результаты работы [1], на которые будем ссылаться в дальнейшем.

2. Основные результаты работы Х.М. Муштари. Разрешим систему линейных уравнений (3) относительно производных

$$\begin{aligned}\frac{dp}{d\theta} &= -\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{A_3 m\zeta\left(\xi+\zeta'\right)}{\Delta}\right)p + \frac{A_3\left(A_3 + m\xi^2 + m\xi'\zeta\right)}{\Delta}r,\\ \frac{dr}{d\theta} &= \frac{A_1 m\xi\left(\xi+\zeta'\right)}{\Delta}p + \frac{m\xi\left(A_3\zeta - A_1\xi'\right)}{\Delta}r.\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь и в дальнейшем через Δ будем обозначать выражение

$$\Delta = A_1A_3 + A_1m\xi^2 + A_3m\zeta^2.$$

Из системы (6) можно получить для r следующее дифференциальное уравнение второго порядка

$$\begin{aligned}\frac{d^2r}{d\theta^2} &+ \left[\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{3m\left(A_1\xi\xi' + A_3\zeta\zeta'\right)}{\Delta} - \frac{\dfrac{d}{d\theta}\left(\xi\left(\xi+\zeta'\right)\right)}{\xi\left(\xi+\zeta'\right)}\right]\frac{dr}{d\theta} - \\ &- \frac{m\xi\left(\xi+\zeta'\right)}{\Delta\sin\theta}\left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\left(A_3\zeta - A_1\xi'\right)\sin\theta}{\xi+\zeta'}\right) + A_3\sin\theta\right]r = 0.\end{aligned} \tag{7}$$

В работе [1] основное внимание было уделено телам, имеющим такую форму меридианного сечения, при которой были бы возможны движения тела с постоянной угловой скоростью вращения вокруг оси симметрии. Таким образом, в [1] предполагалось, что дифференциальное уравнение (7) имеет частное решение

$$r = r_0 = \mathrm{const}. \tag{8}$$

Для исследования этого частного случая в работе [1] предлагался следующий подход. Очевидно (см. (7)), что для того, чтобы выполнялось условие (8) координаты точки касания ξ и ζ должны удовлетворять соотношению

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{(A_3\zeta - A_1\xi')\sin\theta}{\xi + \zeta'}\right) + A_3 \sin\theta = 0. \tag{9}$$

Подставляя в данное соотношение выражения (1) для ξ, ζ и их производных, получим дифференциальное уравнение для определения функции $f(\theta)$. Решая его, найдем в явном виде функцию $f(\theta)$ и определим тем самым, при какой форме меридианного сечения тела выполняется условие (9) (это исследование проведено в пункте 4 данной работы). Затем, зная явный вид функции $f(\theta)$, найдем выражения для координат точки касания ξ и ζ, подставим их в систему (6) и, решив ее, найдем выражения для p и r.

В работе [1] были указаны два частных решения уравнения (9). Они имеют вид:

$$A_3 = \frac{2}{3}A_1, \quad f(\theta) = \frac{\lambda}{\sin\theta}, \quad \xi = \frac{\lambda\cos^2\theta}{\sin^2\theta} - \lambda, \quad \zeta = -\frac{2\lambda\cos\theta}{\sin\theta}, \tag{10}$$

$$A_3 = 2A_1, \quad f(\theta) = \frac{\lambda}{\cos\theta}, \quad \xi = -\frac{2\lambda\sin\theta}{\cos\theta}, \quad \zeta = \frac{\lambda\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - \lambda, \tag{11}$$

где λ – произвольная постоянная. Поверхность, определяемая условиями (10), образуется при вращении дуги параболы вокруг оси, проходящей через ее фокус, а поверхность, определяемая условиями (11), представляет собой параболоид вращения. В обоих указанных случаях переменные p и r выражаются через эллиптические функции.

Мы предлагаем другой способ изучения данной задачи, позволяющий получить явный вид линейных первых интегралов системы, не решая уравнения (9). Этот способ излагается в следующем пункте.

3. Первые интегралы уравнений движения тела в случае Муштари. Заметим, что систему уравнений (6) можно привести к такому виду:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{d\theta} &= h(\theta) r, \\ \frac{dr}{d\theta} &= u(\theta)\tau. \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\tau = m\left[A_1 p + \frac{(A_3\zeta - A_1\xi')}{(\xi + \zeta')} r\right]\sqrt{\Delta}\sin\theta,$$

$$h(\theta) = m\sqrt{\Delta}\left[A_3\sin\theta + \frac{d}{d\theta}\left(\frac{(A_3\zeta - A_1\xi')\sin\theta}{(\xi + \zeta')}\right)\right], \quad u(\theta) = \frac{\xi\,(\xi + \zeta')}{\Delta^{\frac{3}{2}}\sin\theta}.$$

Покажем, что при выполнении условия Муштари (9), уравнения (12) допускают первый интеграл, выраженный через элементарные функции. Действительно, при выполнении условия (9) получаем

$$h(\theta) \equiv 0$$

и, как следует из уравнений (12), сохраняется выражение

$$\tau = m\left[A_1 p + \frac{(A_3\zeta - A_1\xi')}{(\xi + \zeta')} r\right]\sqrt{\Delta}\sin\theta = \tau_0 = \mathrm{const}. \tag{13}$$

Из условия Муштари (9) однократным интегрированием находим

$$\frac{(A_3\zeta - A_1\xi')\sin\theta}{\xi + \zeta'} = A_3\cos\theta + A_3\ell, \tag{14}$$

где ℓ – произвольная постоянная интегрирования. Таким образом, интеграл (13) можно переписать в виде

$$\left[A_1 p\sin\theta + A_3 r\cos\theta + \ell A_3 r\right]\sqrt{A_1A_3 + A_1 m\xi^2 + A_3 m\zeta^2} = \mathrm{k}_1 = \mathrm{const}. \tag{15}$$

Заметим, что по своей структуре интеграл (15) напоминает упомянутый ранее интеграл Чаплыгина (5). Можно заметить, что выражение, стоящее перед знаком корня в интеграле (5), представляет собой проекцию кинетического момента на ось динамической симметрии. Аналогично, выражение, стоящее перед знаком корня в интеграле (15), представляет собой линейную комбинацию с постоянными коэффициентами проекций кинетического момента на вертикаль и ось симметрии соответственно.

После нахождения интеграла (15) легко найти явный вид и другого первого интеграла. Поскольку $\tau = \tau_0 = \mathrm{const}$ (см. (13)), то из второго уравнения системы (12) следует, что

$$r = \tau_0\int u(\theta)d\theta + \mathrm{k}_2,$$

откуда

$$r - m\mathrm{k}_1\int\frac{\xi\,(\xi + \zeta')}{\Delta^{\frac{3}{2}}\sin\theta}d\theta = \mathrm{k}_2. \tag{16}$$

Таким образом, для тел, меридианное сечение которых удовлетворяет условию Муштари (9), линейные по скоростям первые интегралы имеют вид (15) и (16). Тем самым, оба искомых первых интеграла найдены.

Следующий пункт данной работы посвящен выяснению того, какую форму должно иметь меридианное сечение движущегося тела, чтобы для него выполнялось условие Муштари (9).

4. Определение формы поверхности тела. В предыдущем пункте условие Муштари (9) было приведено к виду (14). Рассмотрим сначала случай $\ell = 0$. Тогда координаты ξ и ζ точки касания тела с плоскостью удовлетворяют соотношению

$$(A_3\zeta - A_1\xi')\sin\theta = A_3\,(\xi + \zeta')\cos\theta. \tag{17}$$

Подставляя в соотношение (17) выражения (1) для ξ, ζ и их производных и вводя безразмерный параметр $k = A_3/A_1$, получим дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $f(\theta)$:

$$(k-1)\,f''\sin\theta\cos\theta - kf' + (k-1)\,f\sin\theta\cos\theta = 0. \tag{18}$$

Для нахождения общего решения уравнения (18) мы должны найти любое нетривиальное частное решение $f_0(\theta)$ данного уравнения. Тогда общее решение уравнения (18) можно представить в виде

$$f(\theta) = f_0(\theta)\left(\lambda + \mu\int \frac{(\operatorname{tg}\varphi)^{\frac{k}{k-1}}}{f_0^2(\varphi)}d\varphi\right), \tag{19}$$

Для того, чтобы найти частное решение уравнения (18), преобразуем это уравнение. Положим

$$f(\theta) = \frac{s(\theta)}{\cos\theta},$$

тогда для функции $s(\theta)$ уравнение (18) запишется следующим образом:

$$s'' + \left[\frac{(k-2)}{(k-1)\sin\theta\cos\theta} - \frac{2\cos\theta}{\sin\theta}\right]s' + \frac{(k-2)}{(k-1)\cos^2\theta}s = 0. \tag{20}$$

Делая в уравнении (20) замену независимой переменной по формуле

$$w = \frac{1}{\cos^2\theta},$$

приведем его к виду

$$w(1-w)\frac{d^2s}{dw^2} + \left[2 - \left(\frac{3}{2} + \frac{(k-2)}{2(k-1)}\right)w\right]\frac{ds}{dw} - \frac{(k-2)}{4(k-1)}s = 0. \tag{21}$$

Уравнение (21) представляет собой дифференциальное гипергеометрическое уравнение Гаусса [6, 7]. Следовательно, при $\ell = 0$ меридианное сечение тела, удовлетворяющее условию Муштари (9), определяется при помощи гипергеометрической функции.

Одним из частных решений уравнения (21) будет гипергеометрический ряд

$$s_0 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{(k-2)}{2(k-1)}, 2;\, w\right),$$

следовательно, исходное уравнение (18) имеет нетривиальное частное решение

$$f_0(\theta) = \frac{F\left(\frac{1}{2}, \frac{(k-2)}{2(k-1)}, 2;\, \frac{1}{\cos^2\theta}\right)}{\cos\theta},$$

а общее решение данного уравнения определяется формулой (19).

Покажем, как получить из общего решения (19) два частных решения (10) и (11), найденные в работе [1]. Для этого сделаем два дополнительных предположения. Предположим, что в формуле (19) для функции $f(\theta)$ постоянная $\mu = 0$. Тогда функция $f(\theta)$ определяется формулой

$$f(\theta) = \frac{\lambda F\left(\frac{1}{2}, \frac{(k-2)}{2(k-1)}, 2;\, \frac{1}{\cos^2\theta}\right)}{\cos\theta}. \tag{22}$$

Теперь предположим, что гипергеометрический ряд, стоящий в числителе выражения (22), является конечной суммой. Это предположение накладывает ограничения на значения параметра k. Действительно, гипергеометрический ряд $F\,(a,\,b,\,c;\,w)$ будет конечной суммой, если один из его параметров a или b равен отрицательному целому числу или нулю [6, 7]. В нашем случае соответствующее условие имеет вид

$$\frac{(k-2)}{2\,(k-1)}=-N,$$

где N – натуральное число или нуль. Выражая отсюда k, находим

$$k=\frac{2\,(N+1)}{2N+1}. \tag{23}$$

Пользуясь формулой [6, 7]

$$F\,(a,\,b,\,c;\,w)=(1-w)^{-a}\,F\left(a,\,c-b,\,c;\,\frac{w}{w-1}\right)$$

можно также сделать вывод, что гипергеометрический ряд будет конечной суммой, если выражение $c-b$ равно отрицательному целому числу или нулю. В нашем случае это условие дает

$$2-\frac{(k-2)}{2\,(k-1)}=-N,$$

откуда

$$k=\frac{2\,(N+1)}{2N+3}. \tag{24}$$

При $N=0$ в случае (23) получаем

$$k=2,\quad f(\theta)=\frac{\lambda}{\cos\theta},$$

а в случае (24) –

$$k=\frac{2}{3},\quad f(\theta)=\frac{\lambda}{\sin\theta},$$

что совпадает с частными решениями Муштари (11) и (10) соответственно.

Теперь рассмотрим случай $\ell\neq 0$. В этом случае дифференциальное уравнение для определения функции $f(\theta)$ будет иметь вид

$$[(k-1)\cos\theta+k\ell]\,f''\sin\theta-k\,(1+\ell\cos\theta)\,f'+(k-1)\,f\sin\theta\cos\theta=0. \tag{25}$$

В уравнении (25) сделаем замену независимой переменной. Положим,

$$z=\frac{1+\cos\theta}{2}.$$

тогда уравнение (25) примет вид

$$z\,(z-1)\left[z-\frac{((k-1)-k\ell)}{2\,(k-1)}\right]\frac{d^2f}{dz^2}+\left(z^2-z-\frac{1}{4\,(k-1)}\right)\frac{df}{dz}+\left(\frac{1}{2}-z\right)f=0. \tag{26}$$

Уравнение (26) представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка, называемое уравнением Хейна [7, 8]. Если ввести параметры

$$a = \frac{((k-1)-k\ell)}{2\,(k-1)},\ \alpha = 1,\ \beta = -1,\ \gamma = \frac{1}{2\,(k\ell-(k-1))},\ \delta = -\frac{1}{2\,((k-1)+k\ell)},\ \varepsilon = -\frac{1}{2},$$

то уравнение (26) можно записать в том виде, в котором в литературе обычно приводится уравнение Хейна [7, 8]:

$$z\,(z-1)\,(z-a)\,f''_{zz} + \left[(\alpha+\beta+1)\,z^2 - \left[\alpha+\beta+1+a\,(\gamma+\delta)-\delta\right]z + a\gamma\right] f'_z + (\alpha\beta z-\varepsilon)\,f = 0. \tag{27}$$

При $|a| \geq 1$ и $\gamma \neq 0,\ -1,\ -2,\ -3,\ldots$ решение уравнения (27) может быть представлено в виде ряда

$$F\,(a,\,\varepsilon,\,\alpha,\,\beta,\,\gamma,\,\delta;\,z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

коэффициенты которого определяются рекуррентными формулами:

$$c_0 = 1, \quad a\gamma c_1 = \varepsilon,$$

$$a\,(n+1)\,(\gamma+n)\,c_{n+1} = \left[a\,(\gamma+\delta+n-1)+\alpha+\beta-\delta+n+\frac{q}{n}\right] nc_n -$$

$$-\left[(n-1)\,(n-2)+(n-1)\,(\alpha+\beta+1)+\alpha\beta\right] c_{n-1}.$$

Таким образом, при $\ell = 0$ меридианное сечение тела вращения, удовлетворяющее условию Муштари (9), определяется при помощи гипергеометрической функции, а при $\ell \neq 0$ – при помощи функции Хейна.

1. *Муштари Х.М.* О катании тяжелого твердого тела вращения по неподвижной горизонтальной плоскости // Мат. сборник. – 1932. – **39**. – № 1-2. – С. 105-126.
2. *Чаплыгин С.А.* О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости // Чаплыгин С.А. Исследования по динамике неголономных систем. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – С. 4–27.
3. *Appell P.* Sur l'intégration des équations du mouvement d'un corps pesant de revolution roulant par une arête circulaire sur un plane horizontal; cas particulier du cerceau // Rend. circ. mat. di Palermo. – 1900. – **14**. – P. 1-6.
4. *Jellett J.H.* A Treatise on the Theory of Friction. – Dublin; London: MacMillan, 1872. – 230 p.
5. *Карапетян А.В.* Об интеграле Желле // Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах. – Казань, 1996. – Вып. 1, № 3.
6. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.– М.: Наука, 1971. – 1108 с.
7. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1995. – 560 с.
8. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. – Т. 2. М.: Физматгиз, 1963. – 516 с.

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва
kuleshov@mech.math.msu.su
akule@pisem.net

Получено 08.08.04