ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2004. Вып. 34

УДК 513.944;531.38

©2004. **Д.Б. Зотьев**

ФАЗОВАЯ ТОПОЛОГИЯ ВОЛЧКА КОВАЛЕВСКОЙ В $SO(2)$-СИММЕТРИЧНОМ ДВОЙНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

Исследована фазовая топология вполне интегрируемой гамильтоновой системы, описывающей волчок Ковалевской в двойном силовом поле при условиях на параметры, обеспечивающих существование группы симметрий $SO(2)$ – синхронных вращений вокруг оси динамической симметрии и нормали к плоскости силовых полей. Вычислена бифуркационая диаграмма и области возможности движения. Описаны геометрические особенности, характерные для данной задачи. Найдены топологические типы фазового пространства и изоэнергетических поверхностей, которые оказались погруженными подмногообразиями с самопересечениями. Описаны соответствующие особые движения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим намагниченное твердое тело с неподвижной точкой, которое вращается под действием гравитационного и магнитного полей [1]. Поля предполагаются однородными и стационарными. В подвижной системе отсчета динамика тела определяется уравнениями Эйлера-Пуассона

$$\dot{\mathbf{M}} = [\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}] + \mathbf{m}\mathrm{g}[\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}] + \mathbf{B}[\mathbf{d}, \boldsymbol{\delta}], \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = [\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega}], \quad \dot{\boldsymbol{\delta}} = [\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\omega}], \tag{1}$$

где m – масса тела, $\mathbf{M}$ – кинетический момент, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор центра масс, $\mathrm{g}\boldsymbol{\gamma}$ – ускорение свободного падения, $\mathbf{d}$ – полный магнитный момент тела, $B\boldsymbol{\delta}$ – напряженность магнитного поля. Векторы $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}$ единичны и неподвижны в пространстве, а векторы $\mathbf{r}, \mathbf{d}$ фиксированы в теле.

Предположим, что главные моменты инерции связаны условием С.В. Ковалевской $I_1 = I_2 = 2I_3$, а векторы $\mathbf{r}$, $\mathbf{d}$ взаимно ортогональны и параллельны экваториальной плоскости эллипсоида инерции [1]. Тогда подвижную систему можно выбрать так, что $m\mathrm{g}\mathbf{r} = (r_1, 0, 0)$, $B\boldsymbol{d} = (0, d_2, 0)$.

Введем обозначения $\ = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta})$, $c_1 = (4I_3r_1)^2$, $c_2 = (4I_3)^2 r_1 d_2 (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta})$, $c_3 = (4I_3d_2)^2$ и в качестве основных переменных выберем компоненты

$$M_i, \xi_i, \eta_i \tag{2}$$

в подвижных осях векторов $\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$, где $\boldsymbol{\xi} = \sqrt{c_1}\boldsymbol{\gamma}$, $\quad \boldsymbol{\eta} = \sqrt{c_3}\boldsymbol{\delta}$.

Далее полагаем единицы измерения выбранными так, что $4I_3 = 1$. Система (1) запишется в виде

$$\begin{array}{lll} \dot{M}_1 = 2M_2M_3 + \eta_3, & \dot{M}_2 = -2M_1M_3 - \xi_3, & \dot{M}_3 = \xi_2 - \eta_1; \\ \dot{\xi}_1 = 2(2M_3\xi_2 - M_2\xi_3), & \dot{\xi}_2 = 2(M_1\xi_3 - 2M_3\xi_1), & \dot{\xi}_3 = 2(M_2\xi_1 - M_1\xi_2); \\ \dot{\eta}_1 = 2(2M_3\eta_2 - M_2\eta_3), & \dot{\eta}_2 = 2(M_1\eta_3 - 2M_3\eta_1), & \dot{\eta}_3 = 2(M_2\eta_1 - M_1\eta_2). \end{array} \tag{3}$$

В работе [1] показано, что, кроме интеграла энергии

$$H = M_1^2 + M_2^2 + 2M_3^2 - \xi_1 - \eta_2, \tag{4}$$

система (3) имеет еще один общий интеграл типа С.В. Ковалевской

$$Z = (M_1^2 - M_2^2 + \xi_1 - \eta_2)^2 + (2M_1M_2 + \xi_2 + \eta_1)^2. \tag{5}$$

Геометрические соотношения $(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}) = 1$, $(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\delta}) = 1$, $(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}) = c$, где $|c| \leqslant 1$, задают в фазовом пространстве $\mathbf{R}^9$ инвариантное подмногообразие $\mathcal{O}$. В переменных (2) оно определяется системой уравнений

$$\sum_{i=1}^{3}\xi_i^2 = c_1, \quad \sum_{i=1}^{3}\xi_i\eta_i = c_2, \quad \sum_{i=1}^{3}\eta_i^2 = c_3 \qquad (c_2^2 \leqslant c_1c_3). \tag{6}$$

Если $|c| = 1$, то $\mathcal{O}{\cong}S^2\times\mathbf{R}^3$, а если $|c| < 1$, то $\mathcal{O}{\cong}SO(3)\times\mathbf{R}^3{\cong}\mathbf{RP}^3\times\mathbf{R}^3$. При $|c| = 1$ система вырождается в случай С.В. Ковалевской. В дальнейшем полагаем $|c| < 1$, что равносильно $c_2^2 < c_1c_3$.

В [1] доказана полная интегрируемость системы (3) на инвариантном подмножестве $\mathcal{M}^4 = Z^{-1}(0)\cap\mathcal{O}$, состоящем из точек глобального минимума интеграла Z, – в дополнение к интегралу (4) указан частный интеграл $F:\ \mathcal{M}^4 \to \mathbf{R}$, который в переменных (2) запишем так

$$F = (M_1^2 + M_2^2)\left(M_3 \pm \sqrt{\frac{\xi_1 + \eta_2 - M_1^2 - M_2^2 + 2\sqrt{c_1}}{2}}\right). \tag{7}$$

Совокупность движений, отвечающая траекториям на $\mathcal{M}^4$, обобщает 1-й класс Аппельрота (случай Делоне [2]). Обобщение 2-го, 3-го и 4-го классов Аппельрота для системы (3) найдено в работах [4,5]. В работе [3] автором изучена топология слоения Лиувилля на многообразии $\mathcal{M}^4$ в предположении

$$(c_1 - c_3)^2 + c_2^2 \neq 0. \tag{8}$$

В [3] доказано, что $\mathcal{M}^4{\cong}S^2\times S^1\times\mathbf{R}$, а условие

$$(c_1 - c_3)^2 + c_2^2 = 0 \tag{9}$$

оказывается единственным случаем, когда $\mathcal{M}^4$ теряет гладкость. В работе [6] случай (9) был отмечен как имеющий однопараметрическую группу симметрий $SO(2)$. При этом система допускает синхронные вращения вокруг вектора $[\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}]$ и оси динамической симмметрии тела.

М.П. Харламов доказал [5], что векторы $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\delta}$ без ограничения общности можно считать взаимно ортогональными, то есть априорно положить $c_2 = 0$. Поэтому, фактически, при нулевом значении интеграла Z имеется однопараметрическое семейство (существенный параметр – отношение c_3/c_1) интегрируемых случаев О.И. Богоявленского, описывающих аналог особо замечательных движений 1-го класса по Аппельроту для намагниченного волчка Ковалевской. Фазовая топология одного из них – случая $c_1 = c_3$ – никем не изучалась. В данной статье этот пробел восполнен. Полностью описана фазовая топология динамической системы, определяемой ограничением системы (3) на инвариантное подмножество $\mathcal{M}^4 = Z^{-1}(0)\cap\mathcal{O}$, при условиях $c_2^2 < c_1c_3$ и $(c_1 - c_3)^2 + c_2^2 = 0$. Явно указаны движения, отвечающие точкам самопересечения погруженного подмногообразия $\mathcal{M}^4$.

2. Фазовая топология. Всюду ниже полагаем

$$c_2 = 0, \quad c_1 = c_3 > 0. \tag{10}$$

Предложение 1. Инвариантное множество $\mathcal{M}^4 \subset \mathcal{O}$ является погруженным подмногообразием и имеет трансверсальное самопересечение по инвариантному гладкому цилиндру $\mathcal{C}^2 \cong S^1 \times \mathbf{R}$, который определяется уравнениями

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 = c_1, \quad \xi_1 = \eta_2, \quad \xi_2 = -\eta_1, \quad \xi_3 = \eta_3 = 0, \quad M_1 = M_2 = 0. \tag{11}$$

Доказательство. Из (5) следует, что уравнения $\mathcal{M}^4$ в $\mathcal{O}$ имеют вид

$$Z_1 = 0, \quad Z_2 = 0, \tag{12}$$

где

$$Z_1 = M_1^2 - M_2^2 + \xi_1 - \eta_2, \quad Z_2 = 2M_1M_2 + \xi_2 + \eta_1. \tag{13}$$

При условии (10) дифференциалы функций (13) на $\mathcal{O}$ зависимы лишь в точках вида (11), составляющих некоторое (инвариантное) подмножество $\mathcal{C}^2$. Так как M_3 произвольно, то $\mathcal{C}^2 \cong S^1 \times \mathbf{R}$. В каждой точке $p \in \mathcal{C}^2$ множество всех векторов, касательных к дифференцируемым кривым на $\mathcal{M}^4$, является объединением пары 4-мерных подпространств $T_p^{\pm}\mathcal{M}^4$, пересекающихся по $T_p\mathcal{C}^2$. Эти подпространства перестановочны относительно симметрии, которая обращает знаки координат M_1 и M_2. Поскольку $\mathcal{M}^4 \setminus \mathcal{C}^2$ суть гладкое многообразие и $T_p^+\mathcal{M}^4 + T_p^-\mathcal{M}^4 = T_p\mathcal{O}$ в каждой точке $p \in \mathcal{C}^2$, то очевидно, что $\mathcal{M}^4$ – погруженное подмногообразие, имеющее трансверсальное самопересечение по цилиндру $\mathcal{C}^2$. $\square$

Интегральные многообразия системы на $\mathcal{M}^4$ представляют собой совместные уровни интегралов H, F, и их перестройки отвечают точкам бифуркационной диаграммы отображения

$$H \times F : \ \mathcal{M}^4 \to \mathbf{R}^2. \tag{14}$$

Предложение 2. Бифуркационная диаграмма отображения (14) является объединением луча

$$f = 0, \quad h \geqslant -2d_2 \tag{15}$$

и кривой

$$f = \pm \frac{h + 6d_2 - \sqrt{h^2 + 12d_2^2}}{3\sqrt{6}} \sqrt{h + 6d_2 + 2\sqrt{h^2 + 12d_2^2}}. \tag{16}$$

Множество (15), (16) изображено на рисунке. Однозначные ветви AA_+ и AA_- кривой (16) сходятся в точке $A = (-2d_2, 0)$, являющейся началом луча (15).

Доказательство. Введем следующие обозначения:

$$y = \xi_1 + \eta_2, \quad \rho = \sqrt{(\xi_1 - \eta_2)^2 + (\xi_2 + \eta_1)^2}. \tag{17}$$

Из (12), (13) следует, что $\rho = M_1^2 + M_2^2$ на $\mathcal{M}^4$. Точки, в которых нарушается гладкость $\mathcal{M}^4$, считаем критическими для интегрального отображения, поэтому луч (15) включается в диаграмму как образ цилиндра $\mathcal{C}^2$ (предложение 1). Функция $H : \mathcal{M}^4 \to \mathbf{R}$ имеет только два бифуркационных значения $\pm 2d_2$. Единственная точка минимума является прообразом $A = (-2d_2, 0)$, остальные точки бифуркации лежат на прообразе

$B = (2d_2, 0)$. Изоэнергетическая поверхность $Q^3_h = H^{-1}(h)$ в $\mathcal{M}^4$ определяется уравнением

$$M_3 = \pm\sqrt{\frac{y-\rho+h}{2}}. \tag{18}$$

Заметим, что при $-2d_2 < h \leqslant 2d_2$ поверхность Q^3_h является связной, а при $h > 2d_2$ она состоит из двух связных компонент, на одной из которых $M_3 > 0$ и $F \geqslant 0$, а на другой $M_3 < 0$ и $F \leqslant 0$. Обозначим через F_h ограничение интеграла (7) на Q^3_h:

$$F_h = \frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\pm\sqrt{y-\rho+h} \pm \sqrt{y-\rho+2\sqrt{c_1}}\right). \tag{19}$$

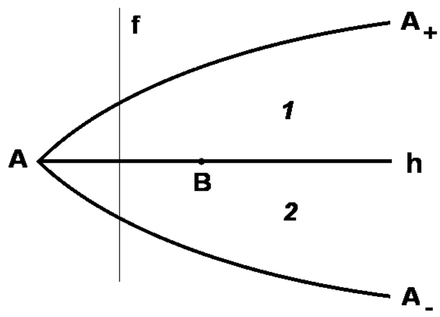
Из условия $dF_h = 0$ следует уравнение (16). $\square$

Определение. Погружение $j : S^3 \to \mathcal{M}$, где $\mathcal{M}$ произвольное многообразие размерности $n > 4$, назовем скручивающим погружением, а его образ $j(S^3)$ – скрученной сферой, если:

а) существует окружность $S^1 \subset S^3$ такая, что ограничение $j|_{S^1}$ является двулистным накрытием окружности $j(S^1) \subset \mathcal{M}$;

б) в каждой точке $p \in j(S^1)$ множество всех векторов, касательных к непрерывно-дифференцируемым кривым на $j(S^3)$, является объединением пары 3-мерных подпространств, пересекающихся по прямой $T_p j(S^1)$;

в) отображение j инъективно на множестве $S^3 \setminus S^1$.



Бифуркационная диаграмма.

Отметим, что введенные термины не являются общепринятыми и нигде, кроме данной статьи, не применяются.

Предложение 3. Любые две скрученные сферы гомеоморфны.

Таким образом, скрученная сфера – это топологический тип.

Предложение 4. Погруженное подмногообразие $\mathcal{M}^4$ гомеоморфно произведению скрученной сферы на прямую.

Доказательство. Инвариантное множество $\mathcal{M}^4$ можно представить в виде $\mathcal{M}^4 = \mathcal{N}^3 \times \mathbf{R}(M_3) \subset \mathbf{R}^9$, где погруженное подмногообразие $\mathcal{N}^3 \subset \mathbf{R}^8$ определяется уравнениями (6) и (12). При этом $\mathcal{C}^2 = S^1_0 \times \mathbf{R}(M_3)$, где окружность $S^1_0 \subset \mathcal{N}^3$ определяется уравнениями (11), которые эквивалентны $\rho = 0$. Для некоторого $h > 2d_2$ зафиксируем одну из двух связных компонент Q^3_h, например, компоненту, у которой $M_3 > 0$. Она является графиком функции M_3, заданной согласно (18), непрерывной на $\mathcal{N}^3$ и гладкой на $\mathcal{N}^3 \setminus S^1_0$. Ограничим интеграл F на данную компоненту. Слоение Лиувилля на компоненте спроектируем на многообразие $\mathcal{N}^3 \setminus S^1_0$. Проекция функции F на $\mathcal{N}^3$, за которой мы сохраняем обозначение F, в переменных (17) имеет вид (19), где из первого $\pm$ следует выбрать знак $+$. Функция F порождает слоение $\mathcal{N}^3 \setminus S^1_0$ на вложенные торы T^2. Заметим, что $F \geqslant 0$ и $F^{-1}(0) = S^1_0$. Вложенный в $\mathcal{N}^3$ тор $F^{-1}(f)$ обозначим T^2_f. Проекция тора T^2_f на плоскость $\mathbf{R}^2(y, \rho)$ является фрагментом кривой

$$y = \frac{(h-2\sqrt{c_1})^2}{8f^2}\rho^2 + \rho - \frac{h+2\sqrt{c_1}}{2} + \frac{f^2}{2\rho^2}, \tag{20}$$

не выходящим из треугольника $A_1A_2A_3$, который ограничен отрезками прямых

$$[A_1A_2] : y - \rho = -2\sqrt{c_1}, \quad [A_2A_3] : y + \rho = 2\sqrt{c_1}, \quad [A_1A_3] : \rho = 0.$$

Этот фрагмент кривой (20), являющийся вложенным отрезком, будем называть дугой. Если значение f стремится к максимуму f_{max}, то дуга стягивается в некоторую точку $A_4 \in (A_2A_3)$. Соответствующий тор T_f^2 стягивается на максимальную окружность. При этом некоторый нетривиальный цикл $\sigma(f) \subset T_f^2$ стягивается в точку. Если f стремится к нулю, то дуга гомотопируется в отрезок $[A_1A_3]$, складываясь в пределе вдвое. Соответствующий тор T_f^2 гомотопируется в окружность S_0^1. При этом цикл $\sigma(f)$ стягивается на S_0^1 подобно тому, как граница листа Мебиуса стягивается на осевую окружность. Очевидно, что при уменьшении f от f_{max} до нуля тор T_f^2 заметает сферу S^3, скрученную вдоль окружности S_0^1. Пусть $j : S^3 \to \mathbf{R}^8$ – скручивающее погружение этой сферы, тогда $j(S^3) = \mathcal{N}^3$. Следовательно $\mathcal{M}^4 = j(S^3) \times \mathbf{R}$. □

Определение. Пусть подмногообразия $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{M}$ и $\mathcal{N}_2 \subset \mathcal{M}$ пересекаются по подмногообразию $\mathcal{Q} \subset \mathcal{M}$. Назовем это пересечение регулярным, если $T_p\mathcal{Q} = T_p\mathcal{N}_1 \cap T_p\mathcal{N}_2$ в каждой точке $p \in \mathcal{Q}$.

Предложение 5. 1. При $-2d_2 < h < 2d_2$ изоэнергетическая поверхность Q_h^3 является объединением пары вложенных в $\mathcal{O}$ сфер S^3, регулярно пересекающихся по окружности $S^1 \subset \mathcal{C}^2$, которая исчерпывает пересечение каждой из сфер с цилиндром $\mathcal{C}^2$.

2. При $h > 2d_2$ поверхность Q_h^3 имеет две связных компоненты, каждая из которых является скрученной сферой $j(S^3)$ и пересекается с цилиндром $\mathcal{C}^2$ по своей особой окружности.

Доказательство. Второе утверждение содержится в доказательстве предложения 4. Первое получается аналогично, однако отрезок $[A_1A_2]$ лежит на прямой $y - \rho = -h$, где $-2\sqrt{c_1} < h < 2\sqrt{c_1}$. В этом случае Q_h^3 связна и на окружность $S^1(h) \subset Q_h^3$, определяемую равенством $\rho = 0$, стягивается пара торов Лиувилля T_f^2, отвечающих значениям $f > 0$ и $f < 0$. При этом торы семейства $[0, f_{max}]$ заметают вложенную сферу S^3, а торы семейства $[f_{min}, 0]$ заметают свою вложенную сферу S^3. Обе сферы регулярно пересекаются по $S^1(h)$. □

Теперь мы готовы описать слоение Лиувилля на $\mathcal{M}^4 \setminus \mathcal{C}^2$. Обозначим через $p_+(h)$ и $p_-(h)$ точки пересечения вертикальной прямой $H = h$ с кривыми AA_+ и AA_- (см. рисунок).

Предложение 6. Прообразом каждой точки из регулярных областей 1 и 2 является один тор Лиувилля. Если $h > -2d_2$, то прообразом точки $p_+(h)$ является максимальная, а прообразом точки $p_-(h)$ – минимальная окружности интеграла F, ограниченного на изоэнергетическую поверхность $Q_h^3 = H^{-1}(h) \subset \mathcal{M}^4$. Если $h = -2d_2$, то поверхность $H^{-1}(h)$ вырождается в точку.

Доказательство. Для области 1 единственный тор Лиувилля над произвольной ее точкой явно указан в доказательстве предложения 5. Случай области 2 аналогичен. Точкам кривой A_-AA_+, вообще говоря, могли бы соответствовать бутылки Клейна K^2. Однако этого нет, поскольку прообразом точки на плоскости $\mathbf{R}^2(y, \rho)$, в которую стягивается проекция (20) тора Лиувилля, является одномерное подмногообразие. □

Заметим, что в динамике твердого тела инвариантные подмногообразия в форме бутылок Клейна не наблюдались.

3. Особые движения.

Предложение 7. Фазовым траекториям, лежащим на инвариантном цилиндре C^2, отвечают маятниковые движения вокруг оси динамической симметрии, сохраняющей в пространстве положение, параллельное вектору $[\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}]$. При этом:

1) если $h = -2d_2$ (точка A), то тело находится в состоянии устойчивого равновесия;

2) если $-2d_2 < h < 2d_2$, то тело совершает колебания с постоянным периодом;

3) если $h = 2d_2$ (точка B), то тело находится в состоянии неустойчивого равновесия или совершает колебания с бесконечным полупериодом;

4) если $h > 2d_2$, то тело вращается с постоянным периодом.

Доказательство. Согласно (11), $\xi_3 = \eta_3 = 0$. Поэтому ось динамической симметрии в движениях этого класса сохраняет направление, ортогональное векторам $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$.

Цилиндр $\mathcal{C}^2$ расслаивается на инвариантные подмножества, выделяемые уравнением (18). Среди них одна точка ($h = -2d_2$) и одна восьмерка ($h = 2d_2$), а все остальные являются окружностями (в топологическом смысле). Для завершения доказательства достаточно нарисовать слоение цилиндра. □

Заметим, что в случае О.И. Богоявленского (8) тело не имеет положений равновесия, если не выполняется хотя бы одно из условий $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}) = 0$ и $r_1 = d_2$ [3]. В рассмотренном особом случае (9) на $\mathcal{M}^4$ попадают только два положения равновесия волчка. Устойчивое равновесие отвечает конфигурации, в которой вектор $\mathbf{r}$ сонаправлен $\boldsymbol{\gamma}$, а вектор $\mathbf{d}$ сонаправлен $\boldsymbol{\delta}$. Неустойчивое равновесие имеет место, когда вектор $\mathbf{r}$ противонаправлен $\boldsymbol{\gamma}$, а вектор $\mathbf{d}$ противонаправлен $\boldsymbol{\delta}$.

Автор благодарен М.П. Харламову за советы и критические замечания.

1. *Богоявленский О.И.* Интегрируемые уравнения Эйлера на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1984. – **48**, вып. 5.– С. 883 – 938.
2. *Делоне Н.Б.* Алгебраические интегралы движения твердого тела около неподвижной точки. – СПб., 1892. – 78 с.
3. *Zotev D.B.* Fomenko-Zieschang invariant in the Bogoyavlenskyi integrable case // Regular & chaotic dynamics. – 2000. – **5**, N 4. – P. 437 – 458.
4. *Харламов М.П.* Один класс решений с двумя инвариантными соотношениями задачи о движении волчка Ковалевской в двойном постоянном поле // Механика твердого тела.– 2002. – Вып. 32. – С. 32 – 38.
5. *Харламов М.П.* Критическое множество и бифуркационная диаграмма задачи о движении волчка Ковалевской в двойном поле – См. наст. сб. – С. - .
6. *Яхъя Х.М.* Новые интегрируемые случаи задачи о движении гиростата // Вестник МГУ. Сер. мат. мех. – 1987. – Вып. 4. – С. 88 – 90.

Волгоградский гос. техн. ун-т, Россия.
`zotev@inbox.ru`

Получено 24.09.04