

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ХВИЛЬОВИХ ПРОЦЕСІВ У ШАРУВАТОМУ ПІВПРОСТОРИ З ВИКОРИСТАННЯМ МАТРИЦЬ ШОСТОГО ПОРЯДКУ

© Д.В. Малицький, О.І. Хитряк, 2008

Карпатське відділення Інституту геофізики НАН України, Львів, Україна

Authors suggest using of 6-th order matrices for modelling of the seismic wave field on a free surface of a layered half-space. It is shown, that current approach significantly expands utilization of Matrix method. The results of mathematical modelling are simple in utilization and can be used for interpretation of seismic records.

Вступ. Задачам моделювання хвильових процесів у неоднорідних середовищах приділено значну увагу, як у вітчизняних, так і в закордонних виданнях [1–5, 10]. Слід відзначити, що різні методи і підходи, які викладені у багатьох публікаціях, є достатньо ефективними, але не завжди застосовані для певного класу задач, що використовуються в сейсмології. До таких задач, які є актуальними в наш час, належать проблеми розв'язання обернених динамічних задач сейсміки стосовно характеристик моделі середовища і вогнища землетрусу. Надзвичайно важливим є визначення параметрів джерела за даними сейсмічних спостережень на вільній поверхні шаруватого півпростору. Ми на цьому наголошуємо, тому що використання синтетичних сейсмограм для визначення орієнтації площини розриву і скалярного сейсмічного моменту є проблемою, над якою працює багато вчених [9, 11]. Тому очевидно, що математичне моделювання хвильових процесів у неоднорідному середовищі має важливе значення для розв'язання як прямих, так і обернених задач сейсмології.

Постановка задачі. Розглянемо модель шаруватого середовища у вигляді n однорідних ізотропних шарів на $(n + 1)$ однорідному півпросторі з вільною поверхнею. Джерело сейсмічних хвиль розміщене всередині однорідного s -шару. Вважаємо, що на межах між шарами виконуються умови жорсткого контакту, крім s -шару, де розміщене джерело. Вогнище землетрусу моделюємо тензором сейсмічного моменту M_{ij} , і воно має розміщуватися на достатній відстані від вільної поверхні, починаючи з кількох сотень метрів. Поле переміщень одержуємо з використанням матричного методу за розв'язанням $P-SV$ - та SH -задач. Постановка цієї задачі та її результати описані в роботах і матеріалах конференцій [6–8]. У статті наведено основні результати для поля переміщення у дальній зоні:

$$\begin{aligned}
 u_z^{(0)}(r, \varphi_a, t) &= \int_0^\infty \frac{k^2 J_1(kr)}{2\pi j} dk \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} M_1(k, \eta, \varphi_a) g_{1z} e^{k\eta} d\eta + \\
 &+ \int_0^\infty \frac{k^2 J_0(kr)}{2\pi j} dk \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} M_2(k, \eta, \varphi_a) g_{2z} e^{k\eta} d\eta + \\
 &+ \int_0^\infty \frac{k^2 J_0(kr)}{2\pi j} dk \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} M_3(k, \eta, \varphi_a) g_{3z} e^{k\eta} d\eta; \\
 u_r^{(0)}(r, \varphi_a, t) &= \int_0^\infty \frac{k^2 J_0(kr)}{2\pi j} dk \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} M_1(k, \eta, \varphi_a) g_{1r} e^{k\eta} d\eta + \\
 &+ \int_0^\infty \frac{k^2 J_1(kr)}{2\pi j} dk \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} M_2(k, \eta, \varphi_a) g_{2r} e^{k\eta} d\eta + \\
 &+ \int_0^\infty \frac{k^2 J_1(kr)}{2\pi j} dk \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} M_3(k, \eta, \varphi_a) g_{3r} e^{k\eta} d\eta; \\
 u_\varphi^{(0)}(r, \varphi_a, t) &= \int_0^\infty \frac{k^2 J_0(kr)}{2\pi j} dk \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} M_5(k, \eta, \varphi_a) g_{5\varphi} e^{k\eta} d\eta + \\
 &+ \int_0^\infty \frac{k^2 J_1(kr)}{2\pi j} dk \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} M_6(k, \eta, \varphi_a) g_{6\varphi} e^{k\eta} d\eta,
 \end{aligned} \tag{1}$$

де J_0, J_1 функції Бесселя;

$$\begin{aligned}
 M_1 &= M_{xz} \cos \varphi_a + M_{yz} \sin \varphi_a, \quad M_2 = M_{zz}, \\
 M_3 &= \cos^2 \varphi_a \cdot M_{xx} + \sin^2 \varphi_a \cdot M_{yy} + \sin 2\varphi_a \cdot M_{xy}, \\
 M_5 &= M_{yz} \cos \varphi_a - M_{xz} \sin \varphi_a, \\
 M_6 &= \sin 2\varphi_a \cdot M_{xx} - \sin 2\varphi_a \cdot M_{yy} - 2 \cos 2\varphi_a \cdot M_{xy};
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$g_{1z} = \frac{d'_{11} d_{31} - d'_{31} d_{11}}{\Delta} \frac{1}{2\pi\mu_s}, \quad g_{3z} = \frac{d'_{13} d_{31} - d'_{33} d_{11}}{\Delta} \frac{1}{2\pi},$$

$$g_{2z} = \left\{ \frac{d'_{12} d_{31} - d'_{32} d_{11}}{\Delta} \frac{1}{\rho_s V_p^2} + \frac{d'_{13} d_{31} - d'_{33} d_{11}}{\Delta} \left(\frac{2V_s^2}{V_p^2} - 1 \right) \right\} \frac{1}{2\pi},$$

$$g_{1r} = \frac{d'_{31} d_{12} - d'_{11} d_{32}}{\Delta} \frac{1}{2\pi\mu_s}, \quad g_{3r} = \frac{d'_{33} d_{12} - d'_{13} d_{32}}{\Delta} \frac{1}{2\pi},$$

$$g_{2r} = \left\{ \frac{d'_{32} d_{12} - d'_{12} d_{32}}{\Delta} \frac{1}{\rho_s V_p^2} + \frac{d'_{33} d_{12} - d'_{13} d_{32}}{\Delta} \left(\frac{2V_s^2}{V_p^2} - 1 \right) \right\} \frac{1}{2\pi},$$

$$g_{5\varphi} = -\frac{d'_{12}}{d'_{11}} \frac{1}{2\pi\mu_s}, \quad g_{6\varphi} = -\frac{d'_{11}}{d'_{11}} \frac{1}{4\pi}.$$

У коефіцієнти $g_{1z}, g_{2z}, g_{3z}, g_{1r}, g_{2r}, g_{3r}, g_{5\varphi}, g_{6\varphi}$ входять елементи характеристичних матриць, що наведені нижче. Характеристичні матриці всього n -шаруватого середовища на $(n+1)$ -півпросторі для $P-SV$ - та SH -задачі задано так:

$$D = (d_{ij})_{i,j=1,4} = A_{n+1}^{-1} A_n L_n A_{n-1} \dots A_2^{-1} A_1 L_1 A_1^{-1};$$

$$D^* = (d_{ij}^*)_{i,j=1,2} = A_{n+1}^* A_n^* L_n^* A_{n-1}^* \dots A_2^* A_1^* L_1^* A_1^*.$$

Характеристичні матриці середовища під джерелом мають вигляд

$$D' = (d'_{ij})_{i,j=1,4} = A_{n+1}^{-1} A_n L_n A_{n-1} \dots A_{s+2}^{-1} A_{s+1} A_{s+1}^{-1};$$

$$D'^* = (d'_{ij}^*)_{i,j=1,2} = A_{n+1}^* A_n^* L_n^* A_{n-1}^* \dots A_{s+2}^* A_{s+1}^* A_{s+1}^*.$$

Характеристичні матриці введені з використанням умов жорсткого контакту на межах між шарами, умови випромінювання та відсутності напруження на вільній поверхні.

Зауважимо, що елементи вищенаведених матриць визначаємо фізичними параметрами моделі середовища: μ_i – модуль зсуву в i -му шарі; ρ_i – густина i -го шару; V_{pi}, V_{si} – швидкості поширення P - і S -хвиль в i -му шарі. У формулах (3) значення фізичних параметрів V_p, V_s, μ, ρ визначені для s -го шару, в якому розміщене вогнище землетрусу.

Знаменник Δ є мінором другого порядку характеристичної матриці D всього середовища:

$$\Delta = d_{11} d_{32} - d_{31} d_{12}. \quad (4)$$

Поле переміщень. Ми навели співвідношення (1)–(3) для поля переміщення через параметри середовища і компоненти тензора сейсмічного моменту. Ще раз відзначимо, що матричний метод дає змогу розв'язувати дві окремі задачі: $P-SV$ та SH . Аналізуючи співвідно-

шення (1)–(3), а саме компоненти характеристичної матриці D ($P-SV$ -задача), стикаємось із труднощами, які пов'язані з елементами діагональної матриці:

$$L_i = \begin{pmatrix} \exp(k h_i \alpha_i) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-k h_i \alpha_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(k h_i \beta_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(-k h_i \beta_i) \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \pm \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_p^2}}, \quad \beta = \pm \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_s^2}}.$$

де η – змінна Мелліна; h_i – потужність i -го шару; k – горизонтальне хвильове число.

Для великих значень h_i (потужність i -го шару) компоненти матриці L дуже великі або дуже малі. Це пов'язане з тим, що радикали α_i та β_i є комплексними з дійсною та уявною частинами. Для неоднорідних P - та S -хвиль радикали є суто дійсні, тобто значення $\exp(\pm k h_i \alpha_i)$ та $\exp(\pm k h_i \beta_i)$ прямують до нескінченності або до нуля. Крім того, ці величини входять в мінори в чисельнику і знаменнику, через які визначаємо відповідні параметри у формулах (3), що приводить до розбіжності розв'язку для поля переміщень (1). Всі матриці, використані у цьому підході, є матрицями 4×4 ($P-SV$ -випадак) і 2×2 (SH -випадак). Пряма динамічна задача сейсміки, яка використовує матриці 4-го порядку, дає змогу одержувати хвильове поле на вільній поверхні тонкошаруватого півпростору [7, 8]. У випадку специфічного набору системи шарів, вибраних кутів падіння і частотного діапазону запропонована методика може дати негативний результат (рис.1, табл.1). А це означає, що для шаруватой моделі середовища, наприклад, з потужностями $h_i \sim 1000$ м виникають труднощі, описані вище. Тому скористаємось роботами професора Л.А. Молоткова [2], в яких здійснено перехід від матриць 4×4 до матриць 6×6 .

Отже, кожній матриці

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{pmatrix}, \quad F \in C^{4 \times 4}$$

ставиться у відповідність матриця

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} F_{13}^{13} & F_{24}^{13} & F_{14}^{13} & F_{23}^{13} & F_{12}^{13} & F_{34}^{13} \\ F_{13}^{24} & F_{24}^{24} & F_{14}^{24} & F_{23}^{24} & F_{12}^{24} & F_{34}^{24} \\ F_{13}^{14} & F_{24}^{14} & F_{14}^{14} & F_{23}^{14} & F_{12}^{14} & F_{34}^{14} \\ F_{13}^{23} & F_{24}^{23} & F_{14}^{23} & F_{23}^{23} & F_{12}^{23} & F_{34}^{23} \\ F_{13}^{12} & F_{24}^{12} & F_{14}^{12} & F_{23}^{12} & F_{12}^{12} & F_{34}^{12} \\ F_{13}^{34} & F_{24}^{34} & F_{14}^{34} & F_{23}^{34} & F_{12}^{34} & F_{34}^{34} \end{pmatrix}, \quad \tilde{F} \in C^{6 \times 6}.$$

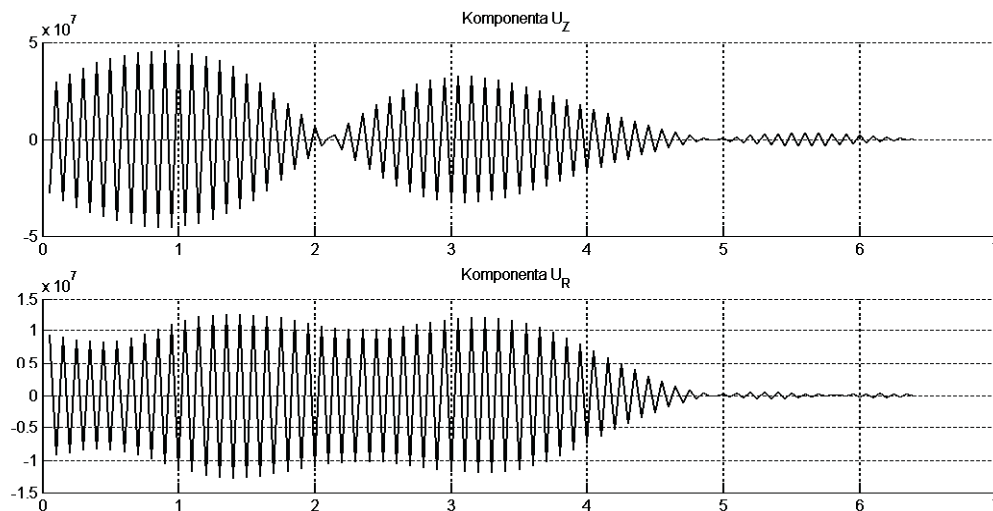


Рис. 1. Негативний результат математичного моделювання поля переміщень $u_z^{(0)}, u_r^{(0)}$ з використанням матриць 4×4 ($P-SV$ -задача)

Таблиця 1. Модель середовища: два шари на півпросторі

Номер шару	$V_p, \text{м/с}$	$V_s, \text{м/с}$	$h, \text{м}$	$\mu \cdot 10^{11}, \text{Па}$
1	6000	3550	2000	3,2451
2	6000	3550	3000	3,2451
Півпростір	6300	3700	∞	3,62781

Елементами матриці \tilde{F} є мінори другого порядку матриці F , тобто

$$F_{lm}^{ik} = \begin{vmatrix} f_{il} & f_{im} \\ f_{kl} & f_{km} \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Властивість мінорних матриць [2]. Якщо для $\forall A, B, C \in C^{4 \times 4}$, що задовольняють умову: $A \cdot B = C$, побудувати відповідні матриці $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} \in C^{6 \times 6}$ за формулою (6), то виконуватиметься рівність [2]: $\tilde{A} \cdot \tilde{B} = \tilde{C}$.

Скористаємося мінорними матрицями в наших формулах. Для характеристичної матриці всього середовища (5) замінимо кожен з матриць $A_i^{-1}, A_i, L_i \in C^{4 \times 4}, i = \overline{1, n+1}$ відповідними матрицями шостого порядку $\tilde{A}_i^{-1}, \tilde{A}_i, \tilde{L}_i \in C^{6 \times 6}$.

Як приклад для матриці A_i такий перехід наведено нижче:

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\beta_i & \beta_i \\ \alpha_i & -\alpha_i & -1 & -1 \\ 2\mu_i \alpha_i & -2\mu_i \alpha_i & -\mu_i g_i & -\mu_i g_i \\ \mu_i g_i & \mu_i g_i & -2\mu_i \beta_i & 2\mu_i \beta_i \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}_i = \begin{pmatrix} -\mu_i (g_i - 2\alpha_i \beta_i) & -\mu_i (g_i - 2\alpha_i \beta_i) & -\mu_i (g_i + 2\alpha_i \beta_i) & -\mu_i (g_i + 2\alpha_i \beta_i) & -4\mu_i \alpha_i & 2\mu_i g_i \beta_i \\ \mu_i (g_i - 2\alpha_i \beta_i) & \mu_i (g_i - 2\alpha_i \beta_i) & \mu_i (g_i + 2\alpha_i \beta_i) & \mu_i (g_i + 2\alpha_i \beta_i) & 2\mu_i g_i \alpha_i & -4\mu_i \beta_i \\ -\beta_i \mu_i (2 - g_i) & \beta_i \mu_i (2 - g_i) & \beta_i \mu_i (2 - g_i) & -\beta_i \mu_i (2 - g_i) & 0 & 0 \\ \alpha_i \mu_i (2 - g_i) & -\alpha_i \mu_i (2 - g_i) & \alpha_i \mu_i (2 - g_i) & -\alpha_i \mu_i (2 - g_i) & 0 & 0 \\ -(1 - \alpha_i \beta_i) & -(1 - \alpha_i \beta_i) & -(1 + \alpha_i \beta_i) & -(1 + \alpha_i \beta_i) & -2\alpha_i & 2\beta \\ \mu_i^2 (g_i^2 - 4\alpha_i \beta_i) & \mu_i^2 (g_i^2 - 4\alpha_i \beta_i) & \mu_i^2 (g_i^2 + 4\alpha_i \beta_i) & \mu_i^2 (g_i^2 + 4\alpha_i \beta_i) & 4\mu_i^2 \alpha_i g_i & -4\mu_i^2 \beta_i g_i \end{pmatrix}.$$

Згідно з властивістю мінорних матриць, одержимо характеристичну матрицю всього середовища $\tilde{D} \in C^{6 \times 6}$:

$$\tilde{D} = \tilde{A}_{n+1}^{-1} \tilde{A}_n \tilde{L}_n \tilde{A}_n^{-1} \tilde{A}_{n-1} \tilde{L}_{n-1} \dots \tilde{A}_2^{-1} \tilde{A}_1 \tilde{L}_1 \tilde{A}_1^{-1}. \quad (7)$$

Для елементів матриць D та \tilde{D} справедливе співвідношення (6).

Зробивши перехід до матриць шостого порядку, знаменник у формулі (4) запишемо у вигляді

$$\Delta = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{31} \\ d_{12} & d_{32} \end{vmatrix} = \tilde{D}_{12}^{13} = \tilde{d}_{15}. \quad (8)$$

Таким чином, співвідношення (4) замінюємо елементом матриці шостого порядку \tilde{d}_{15} . Зауважимо, що поле переміщення для SH -задачі не потребує використання матриць вищого порядку.

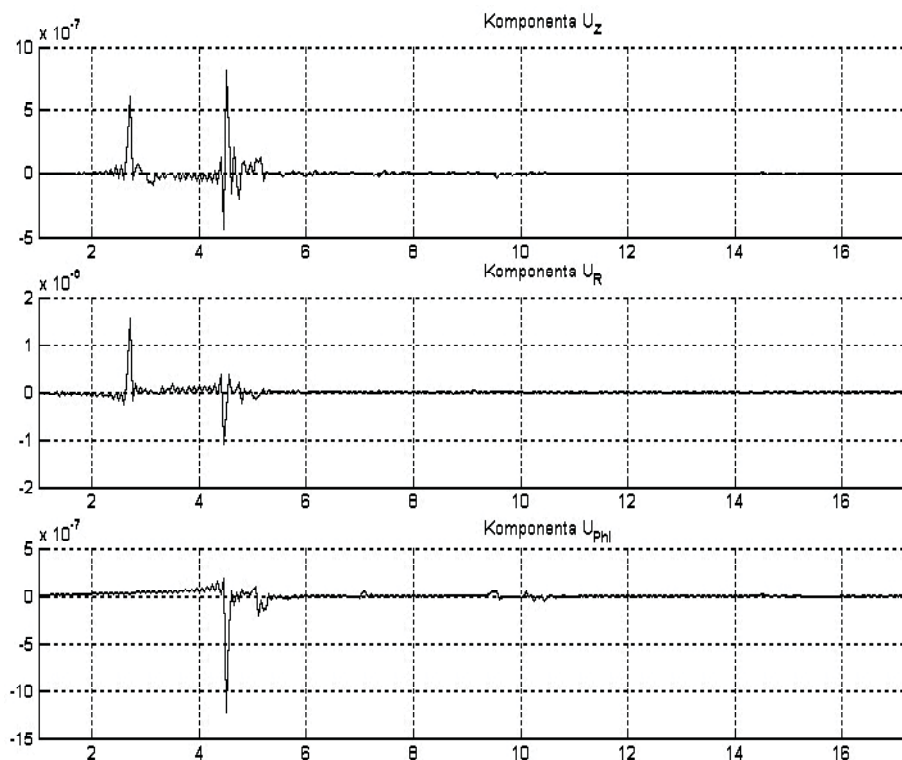


Рис. 2. Компоненти $u_z^{(0)}$, $u_r^{(0)}$, $u_\phi^{(0)}$ поля переміщень на вільній поверхні з використанням даних табл. 2

Таблиця 2. Модель середовища: сім шарів на півпросторі

Номер шару	V_P , м/с	V_S , м/с	h , м	$\mu \cdot 10^{11}$, Па
1	6000	3550	5600	3,245
2	6300	3700	5300	3,627
3	6300	3700	790	3,627
4	7000	4000	684	4,483
5	7500	4300	134	4,945
6	7900	4800	184	5,267
7	8300	5100	484	5,963
Півпростір	8500	5300	∞	6,263

Чисельні розрахунки хвильового поля. Використаємо формули (1) та (8) для розрахунку хвильового поля на вільній поверхні шаруватого півпростору.

Як приклад розглянемо модель середовища: сім шарів на півпросторі, для якої параметри другого і третього шарів однакові. Задамо тензор сейсмічного моменту у вигляді

$$m = \begin{pmatrix} 5,687 \cdot 10^{13} & -7,805 \cdot 10^{13} & -1,498 \cdot 10^{13} \\ -7,805 \cdot 10^{13} & 2,046 \cdot 10^{13} & -9,594 \cdot 10^{12} \\ -1,498 \cdot 10^{13} & -9,594 \cdot 10^{12} & -7,733 \cdot 10^{13} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Використавши програмний пакет MATLAB, отримуємо чисельні розрахунки хвильового поля, згідно з формулою (9) і табл. 2. Джерело сейсмічних хвиль, представлене тензором сейсмічного моменту (9), розміщено всередині другого шару на глибині $h_s = 10900$ м (табл. 2). Епіцентральна відстань дорівнює 12 км. Рис. 2 ілюструє три компоненти поля, переміщені на вільній поверхні. Теоретичні розрахунки часів вступу P - і S -хвиль

дають такі значення: $t_p = 2,64$ – час вступу P -хвилі; $t_s = 4,48$ – час вступу S -хвилі.

Згідно з чисельними розрахунками за формулами (1), (3), (8), ми одержали синтетичні сейсмограми (рис. 2), які відповідають часам вступу P - і S -хвиль, розрахованим теоретично.

Висновок. Результати математичного моделювання поширення сейсмічних хвиль у шаруватому півпросторі дають підстави стверджувати, що використання матриць шостого порядку є достатньо ефективний спосіб для інтерпретації поля переміщення на вільній поверхні. Для пришвидшення розрахунків, тобто для зменшення машинного часу, в монографії [3] здійснено перехід від матриць 6×6 до матриць 5×5 , що ми плануємо показати у подальших роботах. Крім того, плануємо провести математичні перетворення у формулах (3). Наведені операції дають змогу значно поліпшити результати і розширити можливості для математичного моделювання хвильових процесів у шаруватому півпросторі.

1. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология: Теория и методы. — М.: Мир, 1983. — Т. 1, 2. — 880 с.
2. Молотков Л.А. Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред. — М.: Наука, 2001. — 348 с.
3. Молотков Л.А. Матричный метод в теории распространения волн в слоистых, упругих и жидких средах. — М.: Наука, 1984. — 201 с.
4. Малицкий Д.В. Основные принципы розв'язання динамічної задачі сейсмології на основі рекурентного підходу // Геофіз. журн. — 1998. — № 5. — С. 96–98.
5. Малицкий Д.В., Пак Р.М. Використання рекурентного методу для розв'язання задач сейсмології // Там само. — 2004. — № 6. — С. 168–173.
6. Малицкий Д.В., Муйла О.О. Про застосування матричного методу і його модифікацій для дослідження поширення сейсмічних хвиль у шаруватому середовищі // Теоретичні та прикладні аспекти геоінформатики. — К., 2007. — С.124–136.
7. Малицкий Д.В., Пак Р.М., Козловский Э.М., Мосьпан О.И., Муйла О.О. Анализ волновых полей, генерируемых источником сейсмических волн в виде тензора сейсмического момента в слоистой среде // Материалы междунар. науч. конф. “Уроки и следствия сильных землетрясений (к 80-летию разрушительных землетрясений в Крыму)”, Ялта, 25–28 сент., 2007 г. — С. 221–223.
8. Малицкий Д., Пак Р., Козловський Е., Мосьпан О., Муйла О. Поширення сейсмічних хвиль у шаруватому середовищі. Чисельні методи розрахунку хвильового поля // Матеріали наук. конф. “Нові геофізичні технології прогнозування та моніторингу геологічного середовища”, присвяч. пам'яті фундаторів Карпат. відня. Ін-ту геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України Тараса Зиновійовича Вербицького і Ярослава Станіславовича Сапужака, 9–11 жовт., 2007 р. — Львів, 2007. — С.66–69.
9. Kennet B.L.N. The seismic wavefield. — Cambridge: Univ. Press, 2001. — 370 с.
10. Dunkin I.W. Computation of modal solutions in layered elastic media at high frequencies // Bul. Seismol. Soc. Amer. — 1965. — 55, № 2. — P. 335–358.
11. Müller G. The reflectivity method: a tutorial // J. Geophysics. — 1985. — № 58. — P. 153–174.

Надійшла до редакції 14.04.2008 р.

Д.В. Малицкий, О.И. Хитряк

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ХВИЛЬОВИХ ПРОЦЕСІВ У ШАРУВАТОМУ ПІВПРОСТОРІ З ВИКОРИСТАННЯМ МАТРИЦЬ ШОСТОГО ПОРЯДКУ

Запропоновано використання матриць шостого порядку для моделювання хвильового поля на вільній поверхні шаруватого півпростору. Показано, що цей підхід значно розширює використання матричного методу. Одержані результати математичного моделювання є простими у використанні, їх можна застосовувати для інтерпретації сейсмічних записів.

Д.В. Малицкий, О.И. Хитряк

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В СЛОИСТОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАТРИЦ ШЕСТОГО ПОРЯДКА

Предлагается использование матриц шестого порядка для моделирования волнового поля на свободной поверхности слоистого полупространства. Показано, что данный подход значительно расширяет использование матричного метода. Полученные результаты математического моделирования являются простыми в использовании и могут применяться для интерпретации сейсмических записей.