

УДК 531.38

©2004. М.П. Харламов, Е.Г. Шведов

БИФУРКАЦИОННЫЕ ДИАГРАММЫ НА ИЗОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УРОВНЯХ ВОЛЧКА КОВАЛЕВСКОЙ В ДВОЙНОМ ПОЛЕ

Рассматривается вполне интегрируемая гамильтонова система с тремя степенями свободы, описывающая движение твердого тела в двойном силовом поле при условиях типа Ковалевской ($A = B = 2C$, центры оснащенности лежат в экваториальной плоскости эллипсоида инерции). Найдено множество на плоскости независимых существенных параметров h (постоянная интеграла энергии) и γ (отношение скалярных характеристик действия силовых полей), при пересечении которого происходят перестройки бифуркационных диаграмм двух интегралов динамических систем, индуцированных на пятимерных компактных уровнях интеграла энергии. Приведены иллюстрации для классической задачи Ковалевской ($\gamma = 0$).

1. Постановка задачи. Уравнения движения волчка Ковалевской в двойном силовом поле [1], записанные в главных осях тензора инерции, после перехода к безразмерным переменным имеют вид

$$\begin{aligned} 2\omega_1 \dot{\omega}_1 &= \omega_2 \omega_3 + \beta_3, & 2\omega_2 \dot{\omega}_2 &= -\omega_1 \omega_3 - \alpha_3, & \omega_3 \dot{\omega}_3 &= \alpha_2 - \beta_1, \\ \alpha_1 \dot{\omega}_1 &= \alpha_2 \omega_3 - \alpha_3 \omega_2, & \beta_1 \dot{\omega}_1 &= \beta_2 \omega_3 - \beta_3 \omega_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\omega_i, \alpha_i, \beta_i$ ($i = 1, 2, 3$) – компоненты в подвижной системе отсчета, соответственно, угловой скорости тела и постоянных в инерциальном пространстве векторов α, β , характеризующих направление и интенсивность действия силовых полей. Невыписанные уравнения второй группы получаются циклической перестановкой индексов.

Фазовым пространством системы (1) считаем многообразие P^6 , которое задано в $\mathbf{R}^9(\omega_i, \alpha_i, \beta_i)$ фиксированными значениями геометрических интегралов. Тогда уравнения (1) описывают динамику гамильтоновой системы с тремя степенями свободы, обладающей тремя почти всюду независимыми первыми интегралами в инволюции [1, 2].

Как показано в [3], векторы α, β без ограничения общности можно считать взаимно ортогональными. Обозначения силовых полей, порядок и направления осей подвижного триэдра при этом выбираем так, что

$$|\alpha| \geq |\beta|. \quad (2)$$

У системы (1) на P^6 в действительности имеется лишь один существенный параметр, выражающий отношение числовых характеристик силовых полей

$$\gamma = |\beta| / |\alpha|. \quad (3)$$

Распорядясь оставшимся в (1) произволом в выборе единицы измерения длин α, β , положим

$$|\alpha| = 1. \quad (4)$$

Тогда фигурирующий в [3] параметр $|\alpha \times \beta|$ совпадает с величиной (3), которая, согласно (2), лежит в пределах

$$0 \leq \gamma \leq 1. \quad (5)$$

При $\gamma = 0$ система (1) описывает движение волчка С.В. Ковалевской в поле силы тяжести [4], а при $\gamma = 1$ имеем случай Х.М. Яхья [5]. Эти предельные задачи обладают группой симметрий S^1 , действующей на конфигурационном пространстве $SO(3)$, и потому стандартной техникой сводятся к однопараметрическому семейству интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Далее, если не оговорено противное, предполагается, что

$$0 < \gamma < 1. \quad (6)$$

Геометрические интегралы системы (1) запишем теперь так

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = \gamma^2, \\ \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Строго говоря, само фазовое пространство P^6 при этом зависит от γ , однако все многообразия $P^6(\gamma)$ канонически диффеоморфны пространству касательного расслоения $TSO(3)$, потому ниже эту зависимость явно не указываем.

Полный инволютивный набор интегралов образуют функции: интеграл энергии – гамильтониан системы (1)

$$H = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{1}{2}\omega_3^2 - (\alpha_1 + \beta_2) \quad (8)$$

и интегралы, найденные в [1, 2],

$$\begin{aligned} K &= (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \alpha_1 - \beta_2)^2 + (2\omega_1\omega_2 + \alpha_2 + \beta_1)^2, \\ G &= \frac{1}{4}(2\alpha_1\omega_1 + 2\alpha_2\omega_2 + \alpha_3\omega_3)^2 + \frac{1}{4}(2\beta_1\omega_1 + 2\beta_2\omega_2 + \beta_3\omega_3)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2}\omega_3(2\gamma_1\omega_1 + 2\gamma_2\omega_2 + \gamma_3\omega_3) - \alpha_1\gamma^2 - \beta_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Через γ_i обозначены компоненты в подвижных осях постоянного в инерциальном пространстве вектора $\alpha \times \beta$.

Рассмотрим интегральные отображения

$$I = G \times K \times H : P^6 \rightarrow \mathbf{R}^3 \quad (10)$$

и

$$I_h = G \times K|_{E_h} = \pi \circ I|_{E_h} : E_h \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad (11)$$

где $E_h = \{H = h\} \subset P^6$, а $\pi : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ – проекция вдоль третьей координатной оси. Зависимость I, E_h, I_h от γ так же, как для P^6 , подразумевается.

Ниже решается сформулированная в [3] задача классификации по параметрам γ, h бифуркационных диаграмм $\Sigma_h(\gamma)$ отображений (11).

ЗАМЕЧАНИЕ. Под бифуркационной диаграммой отображения гладких многообразий $f : M \rightarrow N$, имеющего компактный характер, понимают множество критических значений f . При рассмотрении ограничений $f_L : L \rightarrow N$ на некоторое подмножество $L \subset M$ в бифуркационную диаграмму отображения f_L естественно включить и образ тех точек, в которых область определения L теряет структуру гладкого многообразия. В таком понимании для сформулированной выше задачи диаграмма $\Sigma_h(\gamma)$ представляет собой сечение бифуркационной диаграммы $\Sigma(\gamma)$ отображения (10) соответствующей

плоскостью, параллельной координатной плоскости (g, k) , независимо от того, является ли h регулярным или критическим значением интеграла энергии.

2. Уравнения бифуркационных диаграмм. Согласно теореме 2 работы [3], бифуркационная диаграмма отображения (10) является подмножеством объединения поверхностей $\Gamma_1 - \Gamma_3$ в пространстве констант $\mathbf{R}^3(g, k, h)$ интегралов (9), (8). Полученные в [3] уравнения этих поверхностей с учетом (3), (4) преобразуем к виду, естественному для поставленной задачи

$$\Gamma_1 : k = 0; \quad (12)$$

$$\Gamma_2 : k = \frac{1}{(1 - \gamma^2)^2} [2g - (1 + \gamma^2)h]^2; \quad (13)$$

$$\Gamma_3 : \begin{cases} g = -s^3 + hs^2 + \frac{\gamma^2}{s} \\ k = 3s^2 - 4hs + h^2 + 1 + \gamma^2 - \frac{\gamma^2}{s^2} \end{cases}, \quad s \in \mathbf{R} \setminus \{0\}. \quad (14)$$

По сделанному выше замечанию, при фиксированном h уравнения (12)–(14) определяют кривые в плоскости (g, k) , объединение которых $\tilde{\Sigma}_h(\gamma)$ содержит в себе диаграмму $\Sigma_h(\gamma)$. Очевидно,

$$\Sigma_h(\gamma) = \tilde{\Sigma}_h(\gamma) \cap \Delta_h(\gamma),$$

где $\Delta_h(\gamma)$ есть образ E_h при отображении (11) – область существования движений с заданной энергией в плоскости констант интегралов (9) при фиксированном значении параметра γ .

Полное аналитическое описание $\Delta_h(\gamma)$ выходит за рамки данной работы. Отметим лишь, что $\Delta_h(\gamma)$ заведомо включено в область, определенную неравенствами

$$k \geq 0, \quad (15)$$

$$2g \leq (1 - \gamma^2)\sqrt{k} + (1 + \gamma^2)h \quad (16)$$

(значение \sqrt{k} арифметическое). Неравенство (15) очевидно в силу структуры функции K в представлении (9), а (16) следует из того, что на открытом всюду плотном подмножестве фазового пространства выражение

$$(1 + \gamma^2)h - 2g + (1 + \gamma^2)\sqrt{k}$$

является суммой квадратов двух гладких функций (представление (44) работы [3]). Для волчка Ковалевской в поле силы тяжести ($\gamma = 0$) неравенство, вытекающее из (16), было получено Г.Г. Апфельротом [6].

Кроме того, $\Delta_h(\gamma)$ не пусто лишь для значений

$$h \geq -1 - \gamma \quad (17)$$

и стягивается в точку в случае равенства в (17), соответствующего абсолютному минимуму энергии на решениях системы (1), подчиненных условиям (7).

3. Разделяющие кривые в плоскости (γ, h) . Назовем разделяющим множеством на плоскости (γ, h) совокупность точек, при переходе через которые диаграмма $\Sigma_h(\gamma)$ претерпевает качественные изменения. Это может выражаться в изменении количества областей, на которые компактное множество $\Sigma_h(\gamma)$ разбивает плоскость (g, k) ,

расположения относительно этих областей точек пересечения или касания гладких отрезков кривых (12)–(14).

Ввиду простой структуры множеств Γ_1, Γ_2 , можно заранее перечислить случаи, в которых происходят такие изменения:

- 1°) прохождение h через критическое значение интеграла энергии;
- 2°) возникновение особых точек (точек возврата) кривой Γ_3 ;
- 3°) изменение количества и взаимного расположения на Γ_3 точек пересечений $\Gamma_2 \cap \Gamma_3$ и $\Gamma_1 \cap \Gamma_3$ (в частности, попадание точек возврата Γ_3 на Γ_1 или Γ_2);
- 4°) изменение структуры множества $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3$.

Изучим эти возможности.

1°. Критические значения H достигаются в положениях равновесия тела (неподвижных точках системы (1) на множестве (7)). Последние заданы формулами (11) работы [3]. Соответствующие значения h таковы: $-1 - \gamma$; $-1 + \gamma$; $1 - \gamma$; $1 + \gamma$.

Это порождает разделяющие кривые

$$\begin{aligned} Q_1 : \quad h &= -1 - \gamma; \\ Q_2 : \quad h &= -1 + \gamma; \\ Q_3 : \quad h &= 1 - \gamma; \\ Q_4 : \quad h &= 1 + \gamma. \end{aligned}$$

Далее без дополнительных комментариев отбрасываются зависимости h и γ , не удовлетворяющие условиям (5), (17).

2°. Обозначим функции параметра s в правых частях (14) через $g(s), k(s)$. Имеем

$$g'(s) = -\frac{1}{s^2}(3s^4 - 2hs^3 + \gamma^2), \quad k'(s) = \frac{2}{s^3}(3s^4 - 2hs^3 + \gamma^2),$$

поэтому $g'(s)$ и $k'(s)$ могут обращаться в нуль лишь одновременно, в особой точке кривой Γ_3 , и соответствующее s есть корень уравнения

$$3s^4 - 2hs^3 + \gamma^2 = 0. \quad (18)$$

Изменение структуры множества особых точек (возникновение пары точек возврата) происходит при наличии кратного корня уравнения (18), что приводит к разделяющим случаям

$$\begin{aligned} Q_5 : \quad h &= 2\sqrt{\gamma}; \\ Q_6 : \quad h &= -2\sqrt{\gamma}. \end{aligned}$$

Отметим, что уравнение (18) не может иметь больше двух вещественных корней и они существуют при $h^2 \geq 4\gamma$.

3°. Найдем пересечение Γ_2 с Γ_3 . Подставляя (14) в (13), получаем

$$(s^2 - 1)(s^2 - \gamma^2)[2s^2 - 2hs + 1 + \gamma^2]^2 = 0. \quad (19)$$

Таким образом, эти кривые имеют четыре точки пересечения, отвечающие значениям

$$s = \pm 1, \quad s = \pm \gamma. \quad (20)$$

Последний сомножитель в (19) отвечает за точки касания Γ_2 и Γ_3 , в которых

$$s = \frac{1}{2}[h \pm \sqrt{h^2 - 2(1 + \gamma^2)}]. \quad (21)$$

Условие вещественности этих значений дает разделяющую кривую

$$Q_7: \quad h = \sqrt{2(1 + \gamma^2)},$$

а возможность совпадения какого-либо из значений (20) с одним из значений (21) приводит к следующим разделяющим случаям:

$$Q_8: \quad h = \frac{1}{2}(3 + \gamma^2);$$

$$Q_9: \quad h = \frac{1}{2\gamma}(1 + 3\gamma^2).$$

К этим же зависимостям приходим в предположении о наличии общего корня у уравнений (18), (19), то есть в случае попадания на Γ_2 особой точки кривой Γ_3 .

Условие изменения структуры пересечения $\Gamma_1 \cap \Gamma_3$ имеет вид

$$k(s) = 0, \quad k'(s) = 0. \quad (22)$$

Однако, как отмечено выше, при этом и $g'(s) = 0$. Следовательно, точек касания Γ_1 и Γ_3 быть не может, а равенства (22) означают попадание на Γ_1 точки возврата кривой Γ_3 .

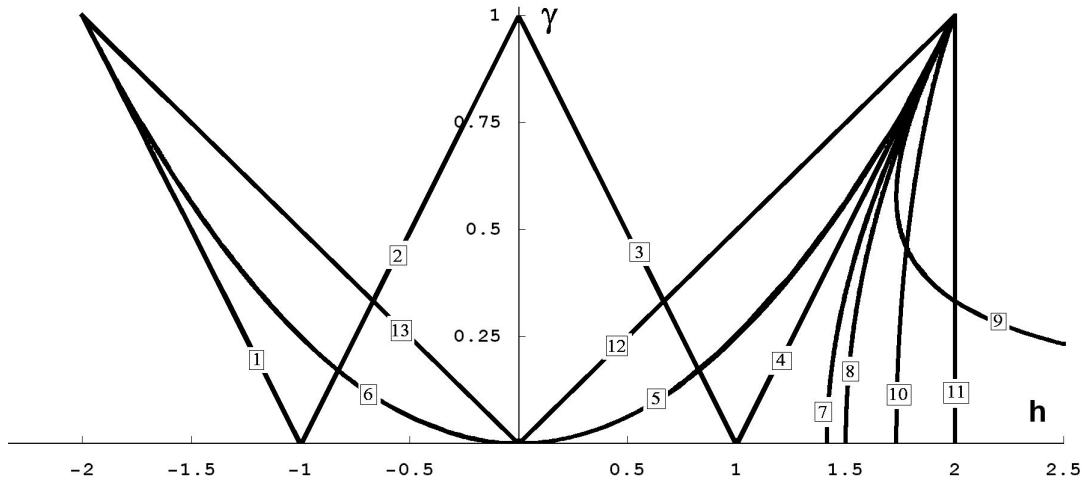


Рис. 1. Разделяющее множество на плоскости (γ, h) .

Исключение s из (22) приводит к неявному уравнению для $h(\gamma)$ высокой степени. Удобней разрешить систему (22) относительно h, γ и записать новую разделяющую кривую в параметрической форме

$$Q_{10}: \quad \begin{cases} h = s(3 - s^2) - \sqrt{(s^2 - 1)^3} \\ \gamma = \sqrt{s^3[s(3 - 2s^2) - 2\sqrt{(s^2 - 1)^3}]} \end{cases}, \quad s \in [1, \frac{2}{\sqrt{3}}]. \quad (23)$$

Область изменения параметра и знаки радикалов в (23) выбраны из условий (5), (17).

4°. Условие $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3 \neq \emptyset$ означает выполнение равенства

$$k(s) = 0 \quad (24)$$

на одном из значений (20), (21). Непосредственно проверяется, что в точках (21) этого быть не может, то есть точки касания Γ_2 с Γ_3 выхода на Γ_1 не имеют. Подставляя (20) в (24), приходим к разделяющим кривым

$$\begin{aligned} Q_{11} : & h = 2; \\ Q_{12} : & h = 2\gamma; \\ Q_{13} : & h = -2\gamma. \end{aligned}$$

На рис. 1 показана совокупность кривых $Q_1 - Q_{13}$ на плоскости (γ, h) в допустимой области (5), (17) (ось h изображена горизонтальной ввиду специфики рисунка).

4. Примеры диаграмм. Построение диаграмм $\Sigma_h(\gamma)$ может быть выполнено численно для всех областей, на которые разделяющее множество разбивает плоскость параметров. В каждой области достаточно взять по одной точке, так как качественных изменений структуры $\Sigma_h(\gamma)$ внутри областей не происходит. При различных γ из интервала (6) имеем от 11 до 13 структурно устойчивых диаграмм $\Sigma_h(\gamma)$.

В предельном случае $\gamma = 1$ (случай Яхья) перестройки диаграмм отвечают лишь переходам через критические значения энергии $h = -2; 0; 2$ и устойчивых диаграмм всего три. При $\gamma = 0$ (тело в поле силы тяжести – случай Ковалевской) разделяющими значениями h служат

$$-1; 0; 1; \sqrt{2}; 3/2; \sqrt{3}; 2. \quad (25)$$

В частности, на ось $\gamma = 0$ имеют выход семь областей общего случая. На рис. 2

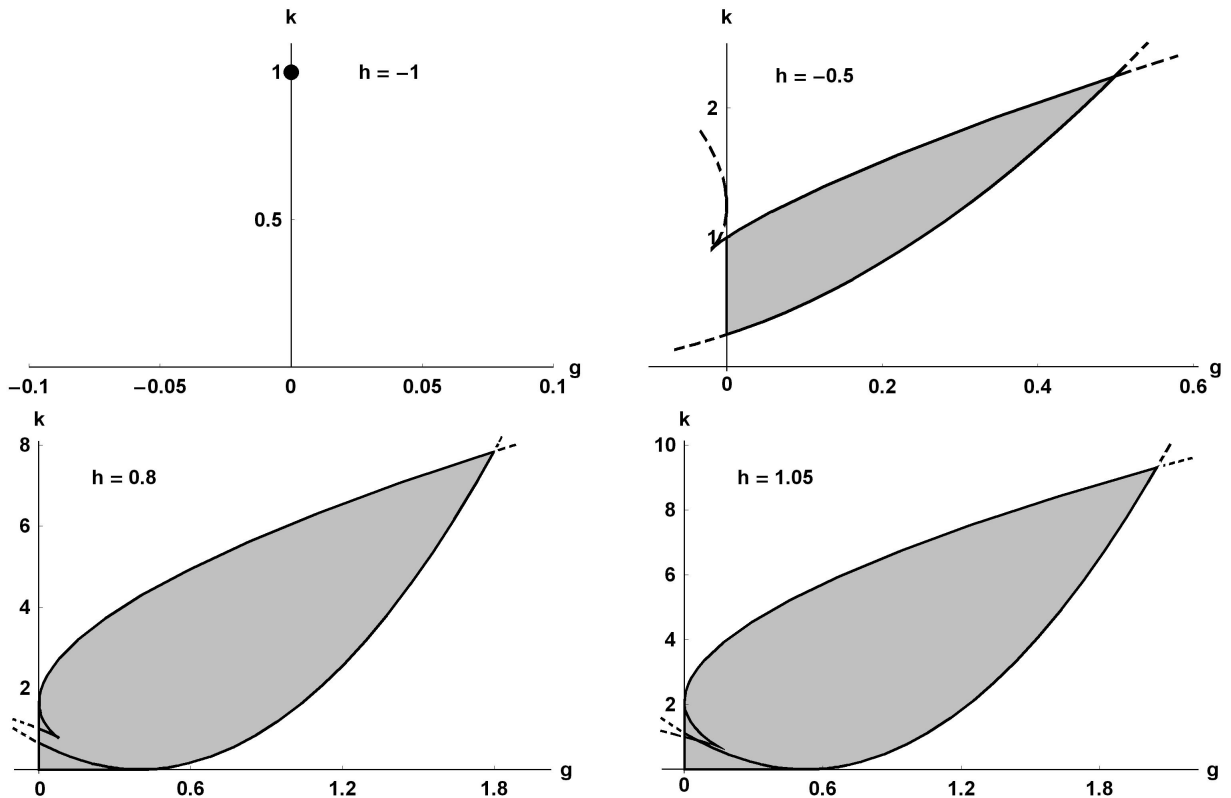


Рис. 2. Примеры бифуркационных диаграмм для случая $\gamma = 0$.

изображены диаграммы $\Sigma_h(0)$, демонстрирующие переходы через значения $h = -1; 0; 1$: при $h < -1$ многообразие E_h пусто; при $h = -1$ диаграмма вместе с областью существо-

вания движений представляет собой точку (уровень E_{-1} состоит только из устойчивых положений равновесия); при переходе через значение $h = 0$ в области существования движений возникает новая подобласть, то есть меняется структура лиувиллева слоения; значение $h = 1$ является критическим значением интеграла энергии (отвечает возникновению в составе E_h неустойчивых положений равновесия), поэтому здесь изменяется топологический тип самого многообразия E_h . Область Δ_h затенена, пунктиром показаны продолжения кривых за пределы Δ_h .

При дальнейших пересечениях значений (25) изменения происходят в малой окрестности вершины параболы Γ_2 и связаны с продвижениями точки возврата кривой Γ_3 . На рис. 3 приведены диаграмма и ее увеличенный фрагмент в указанной окрестности для

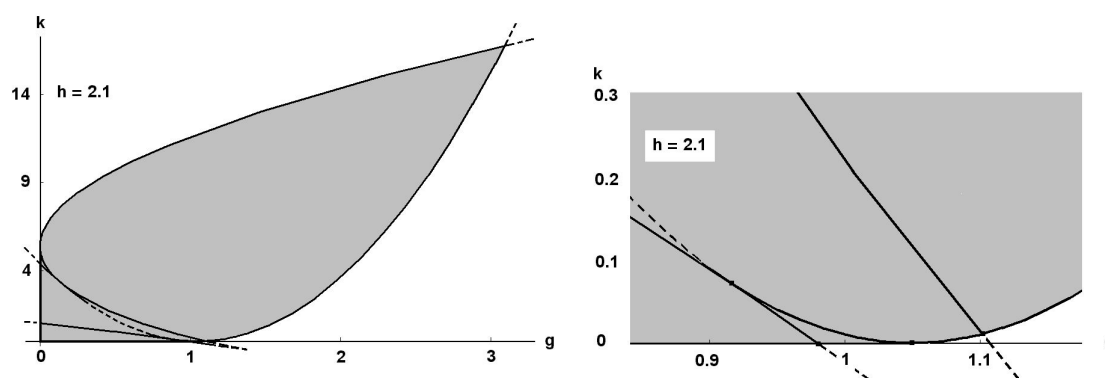


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма для случая $\gamma = 0$, $h > 2$.

значений $h > 2$. Здесь показана пунктиром и часть параболы Γ_2 , лежащая строго внутри Δ_h , точки которой являются, несмотря на это, регулярными значениями интегрального отображения (11). Ее существование следует из исследования так называемых особо замечательных движений [6].

В общем случае в области параметров (6), (17) имеется 19 структурно устойчивых и 30 разделяющих типов диаграмм. Ввиду ограниченности места полный набор иллюстраций здесь не приводится.

1. *Богоявленский О.И.* Два интегрируемых случая динамики твердого тела в силовом поле // Докл. АН СССР. – 1984. – **275**, № 6. – С. 1359–1363.
2. *Vobenko A.I., Reyman A.G., Semenov-Tian-Shansky M.A.* The Kowalewski top 99 years later: a Lax pair, generalizations and explicit solutions // Commun. Math. Phys. – 1989. – **122**, № 2. – P. 321–354.
3. *Харламов М.П.* Критическое множество и бифуркационная диаграмма задачи о движении волчка Ковалевской в двойном поле. – См. наст. сб. – С. 47–58.
4. *Ковалевская С.В.* Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки // Научные работы. – М.: Изд-во АН СССР, 1948. – С. 153–220.
5. *Yehia H.* New integrable cases in the dynamics of rigid bodies // Mech. Res. Commun. – 1986. – **13**, № 3. – P. 169–172.
6. *Аппельрот Г.Г.* Не вполне симметричные тяжелые гироскопы. – В кн.: Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1940. – С. 61–156.