УДК 531.38

©2004. **М.П. Харламов**

КРИТИЧЕСКОЕ МНОЖЕСТВО И БИФУРКАЦИОННАЯ ДИАГРАММА ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ВОЛЧКА КОВАЛЕВСКОЙ В ДВОЙНОМ ПОЛЕ

Для вполне интегрируемой системы с тремя степенями свободы, описывающей движение твердого тела в двойном силовом поле, подчиненного условиям типа Ковалевской ($A = B = 2C$, центры оснащенности лежат в экваториальной плоскости эллипсоида инерции), найдено множество критических точек интегрального отображения, порожденного тремя интегралами в инволюции. Оно состоит из инвариантных подмножеств, на которых индуцированная динамическая система почти всюду гамильтонова с двумя степенями свободы. Критическому множеству сопоставлен его образ – бифуркационная диаграмма в пространстве констант первых интегралов, которая лежит в объединении трех поверхностей. Две из них заданы явными уравнениями, а последняя – параметрическими, в которых роль параметров играют постоянная одного из общих интегралов и кратный корень многочлена, обобщающего резольвенту Эйлера второго многочлена Ковалевской. Проведена аналогия с классами Аппельрота в задаче о движении волчка Ковалевской в поле силы тяжести.

Введение. Рассматривается твердое тело с неподвижной точкой O в потенциальном поле, порождающем момент сил относительно O вида

$$\mathbf{e}_1 \times \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{e}_2 \times \boldsymbol{\beta}, \tag{1}$$

где векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ фиксированы в теле, а $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ – неизменны в пространстве. Полагаем, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ – это орты в составе главных осей тензора инерции в неподвижной точке, выбранных в качестве подвижной системы отсчета, а главные моменты инерции связаны соотношением Ковалевской $A = B = 2C$. Переходя к безразмерным величинам, запишем уравнения движения в подвижных осях:

$$\begin{gathered} 2\dot{\omega_1} = \omega_2\omega_3 + \beta_3,\ 2\dot{\omega_2} = -\omega_1\omega_3 - \alpha_3,\ \dot{\omega_3} = \alpha_2 - \beta_1, \\ \dot{\alpha_1} = \alpha_2\omega_3 - \alpha_3\omega_2,\ \dot{\beta_1} = \beta_2\omega_3 - \beta_3\omega_2. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – компоненты угловой скорости, смысл остальных обозначений очевиден. Невыписанные уравнения второй группы получаются циклической перестановкой индексов.

Момент (1) инвариантен относительно подстановки

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e_1} \\ \mathbf{e_2} \end{pmatrix} \mapsto \Theta \begin{pmatrix} \mathbf{e_1} \\ \mathbf{e_2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} \mapsto \Theta \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix},$$

где $\Theta \in SO(2)$ – постоянная матрица. При этом сохраняется свойство ортонормированности пары $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ в экваториальной плоскости эллипсоида инерции, то есть эти векторы по-прежнему включаются в подвижную систему отсчета, составленную из главных осей тензора инерции. В то же время, произволом в выборе Θ можно распорядиться так, чтобы векторы $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ оказались взаимно перпендикулярны.

Следовательно, без ограничения общности геометрические интегралы системы (2) можно записать в виде

$$\begin{gathered} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = a^2,\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = b^2, \\ \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

При $a = b$ задача (2), (3) обладает циклическим интегралом [8] и сводится обычной процедурой к гамильтоновой системе с двумя степенями свободы. В дальнейшем рассматривается общий случай, в котором $a \neq b$. Направления осей для определенности выбираем так, чтобы выполнялось неравенство

$$a > b. \tag{4}$$

Известно [7], что в этом предположении уравнения (2) описывают вполне интегрируемую гамильтонову систему с фазовым пространством P^6, диффеоморфным $TSO(3)$ (в данном случае оно задано в $\mathbf{R}^9(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ соотношениями (3)), но она глобально не сводима, в отличие от задач динамики твердого тела с осесимметричным потенциалом, к системе с двумя степенями свободы. Систему (2) с условиями (3), (4) ниже, для краткости, называем обобщенным волчком Ковалевской.

Полный инволютивный набор интегралов системы (2) на P^6 составляют функции:

$$\begin{aligned}
&H = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{1}{2}\omega_3^2 - (\alpha_1 + \beta_2),\\
&K = (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \alpha_1 - \beta_2)^2 + (2\omega_1\omega_2 + \alpha_2 + \beta_1)^2,\\
&G = \frac{1}{4}(2\alpha_1\omega_1 + 2\alpha_2\omega_2 + \alpha_3\omega_3)^2 + \frac{1}{4}(2\beta_1\omega_1 + 2\beta_2\omega_2 + \beta_3\omega_3)^2 +\\
&\qquad + \frac{1}{2}\omega_3(2\gamma_1\omega_1 + 2\gamma_2\omega_2 + \gamma_3\omega_3) - \alpha_1 b^2 - \beta_2 a^2.
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь через γ_i обозначены компоненты в подвижных осях постоянного в инерциальной системе вектора $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$.

Интеграл K впервые указан в работе [2], а интеграл G (в более общей форме для задачи о движении гиростата) – в работе [7]. В [7] также намечен путь построения аналитического решения для обобщенного волчка Ковалевской, основанный на методе конечнозонного интегрирования, до настоящего времени так и не реализованный. Топологический анализ задачи в целом также не проводился.

Рассмотрим интегральное отображение

$$I = H \times K \times G : \; P^6 \to \mathbf{R}^3. \tag{6}$$

Далее значения функций (5) (постоянные интегралов) обозначаем соответствующими строчными буквами, а значение отображения (6), для краткости, – через c, так что $c = (h, k, g)$.

Топологический анализ предполагает описание слоения фазового пространства на интегральные многообразия

$$I_c = I^{-1}(c) \tag{7}$$

(или, в более тонкой постановке, описание семейств их связных компонент – торов Лиувилля и их вырождений).

Обозначим через $\sigma \subset P^6$ множество критических точек отображения (6), а через Σ – бифуркационную диаграмму, то есть множество точек $c \in \mathbf{R}^3$, над которыми отображение (6) не является локально-тривиальным.

В случае $c \notin \Sigma$ многообразие (7) есть объединение трехмерных торов, траектории на которых условно-периодические. Их бифуркации происходят при возникновении критических движений – траекторий, целиком лежащих в σ. В критическом случае общего положения для точки $c \in \Sigma$ множество $I_c \cap \sigma$ будет состоять из двумерных торов, а на объединении семейства таких торов, параметризованного точкой некоторого открытого подмножества Σ, индуцированная динамическая система будет гамильтоновой с двумя степенями свободы.

Нахождение критического множества σ (и соответствующей бифуркационной диаграммы), исследование индуцированной на нем динамики и возникающих слоений на двумерные торы Лиувилля являются необходимым этапом топологического анализа задачи в целом.

В настоящей работе множество σ найдено в виде объединения трех поверхностей, каждая из которых инвариантна относительно фазового потока (2), почти всюду является гладким четырехмерным многообразием, на котором индуцированная система гамильтонова. Найдены и уравнения бифуркационной диаграммы отображения (6).

1. Некоторые особые движения. В классических задачах динамики твердого тела особую роль играют положения равновесия, маятниковые движения и равномерные вращения (соответствующие траектории всегда лежат в множестве точек зависимости первых интегралов). Непосредственно проверяется, что в данной задаче равномерных вращений не существует. Указанная выше возможность ортогонализации осей силовых полей сразу же выявляет семейства маятниковых движений – момент внешних сил будет направлен по постоянной в пространстве оси вращения тела в следующих случаях:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\alpha} \equiv \pm a\mathbf{e}_1, \quad \boldsymbol{\omega} = \varphi^{\cdot}\mathbf{e}_1, \quad \boldsymbol{\beta} = b(\mathbf{e}_2\cos\varphi - \mathbf{e}_3\sin\varphi), \\ 2\varphi^{\cdot\cdot} = -b\sin\varphi;\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\beta} \equiv \pm b\mathbf{e}_2, \quad \boldsymbol{\omega} = \varphi^{\cdot}\mathbf{e}_2, \quad \boldsymbol{\alpha} = a(\mathbf{e}_1\cos\varphi + \mathbf{e}_3\sin\varphi), \\ 2\varphi^{\cdot\cdot} = -a\sin\varphi;\end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\gamma} \equiv \pm ab\mathbf{e}_3, \quad \boldsymbol{\omega} = \varphi^{\cdot}\mathbf{e}_3, \\ \boldsymbol{\alpha} = a(\mathbf{e}_1\cos\varphi - \mathbf{e}_2\sin\varphi), \quad \boldsymbol{\beta} = \pm b(\mathbf{e}_1\sin\varphi + \mathbf{e}_2\cos\varphi), \\ \varphi^{\cdot\cdot} = -(a \pm b)\sin\varphi.\end{gathered} \tag{10}$$

Общими для решений (8) - (10) являются положения равновесия

$$\boldsymbol{\alpha} \equiv \pm a\mathbf{e}_1, \quad \boldsymbol{\beta} \equiv \pm b\mathbf{e}_2, \quad \boldsymbol{\omega} \equiv 0 \tag{11}$$

(здесь комбинация знаков произвольна). Из уравнений (2), (3) следует, что, кроме четырех точек (11), других положений равновесия в данной задаче нет (в [5] ошибочно указано, что положений равновесия два).

В точках траекторий (8), (9) ранг отображения (6) равен единице, то есть градиенты всех трех первых интегралов (5) коллинеарны. Отметим, что, кроме этих точек и критических точек самой функции K, других случаев зависимости *двух* функций H и K нет. Действительно, если в некоторой точке пространства P^6 дифференциалы dH, dK линейно зависимы и при этом $dK \neq 0$, то на траектории, проходящей через эту точку, $\partial H/\partial\omega_3 = \omega_3 \equiv 0$ (функция K не зависит от ω_3). Дифференцируя это соотношение в силу системы (2), придем к маятниковым движениям вида (8) или (9).

2. Критическое множество. К настоящему моменту известны два четырехмерных многообразия, входящих в состав множества σ критических точек отображения (6), на которых динамическая система (2) является почти всюду гамильтоновой с двумя степенями свободы. Первое указано в [2] – это множество нулевого уровня найденного в [2] интеграла K. Условие $K = 0$, очевидно, записывается двумя независимыми уравнениями, и определяемое ими многообразие $M^4 \subset \sigma$ всюду гладкое. Однако, как показано в [9], 2-форма, индуцированная на M^4 симплектической структурой фазового пространства P^6, невырождена лишь почти всюду. Динамические системы такого рода автор [9] назвал почти гамильтоновыми.

Второе критическое многообразие $N^4 \subset \sigma$ найдено в [5] и также определено системой двух независимых уравнений, но входящие в эти уравнения функции имеют неустранимые особенности в точках, заданных условием

$$\alpha_1 = \beta_2, \quad \alpha_2 = -\beta_1. \tag{12}$$

Как показано в [6], N^4 является множеством критических точек нулевого уровня некоторой гладкой функции на P^6, выражающейся через интегралы (5), и теряет структуру гладкого четырехмерного многообразия в определенных точках вида (12). В частности, его нельзя глобально задать системой двух независимых уравнений. И в этом случае индуцированная система является лишь почти гамильтоновой в гладкой части N^4.

Следующий результат завершает описание критического множества, добавляя к нему еще одно инвариантное подмножество O^4, почти всюду являющееся гладким многообразием. Отметим, что попарные пересечения множеств M^4, N^4, O^4 не пусты и соответствуют бифуркациям критических интегральных многообразий внутри индуцированных почти гамильтоновых систем с двумя степенями свободы.

Обозначим

$$\begin{gathered} p^2 = a^2 + b^2, \quad r^2 = a^2 - b^2; \\ \xi_1 = \alpha_1 - \beta_2, \quad \xi_2 = \alpha_2 + \beta_1, \quad \eta_1 = \alpha_1 + \beta_2, \quad \eta_2 = \alpha_2 - \beta_1. \end{gathered}$$

Теорема 1. Множество критических точек отображения (6) состоит из следующих подмножеств:

1) множества M^4, определенного системой уравнений

$$Z_1 = 0, \ Z_2 = 0, \tag{13}$$

где

$$Z_1 = \omega_1^2 - \omega_2^2 + \xi_1, \ Z_2 = 2\omega_1\omega_2 + \xi_2; \tag{14}$$

2) множества N^4, определенного системами уравнений

$$F_1 = 0, \ F_2 = 0, \quad \xi_1^2 + \xi_2^2 \neq 0, \tag{15}$$

где

$$\begin{gathered} F_1 = (\xi_1^2 + \xi_2^2)\omega_3 - 2[(\xi_1\omega_1 + \xi_2\omega_2)\alpha_3 + (\xi_2\omega_1 - \xi_1\omega_2)\beta_3], \\ F_2 = 2\xi_1\xi_2(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \xi_1) - (\xi_1^2 - \xi_2^2)(2\omega_1\omega_2 + \xi_2) \end{gathered} \tag{16}$$

и

$$\begin{gathered} \xi_1 = \xi_2 = 0, \ \alpha_3 = \pm r, \ \beta_3 = 0, \ \eta_1^2 + \eta_2^2 = 2(p^2 - r^2), \\ (\omega_1^2 + \omega_2^2)(\alpha_3\omega_3 + \eta_1\omega_1 + \eta_2\omega_2) + r^2\omega_1 = 0; \end{gathered} \tag{17}$$

3) множества O^4, определенного системой уравнений

$$R_1 = 0, \ R_2 = 0, \tag{18}$$

где

$$
\begin{array}{l}
R_1 = (\alpha_3\omega_2 - \beta_3\omega_1)\omega_3 + 2\xi_1\omega_1\omega_2 - \xi_2(\omega_1^2 - \omega_2^2) + \eta_2(\omega_1^2 + \omega_2^2), \\
R_2 = (\alpha_3\omega_1 + \beta_3\omega_2)\omega_3^2 + [\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \xi_1(\omega_1^2 - \omega_2^2) + 2\xi_2\omega_1\omega_2 + \\
\qquad + \eta_1(\omega_1^2 + \omega_2^2)]\omega_3 + 2[\xi_1(\alpha_3\omega_1 - \beta_3\omega_2) + \xi_2(\alpha_3\omega_2 + \beta_3\omega_1)].
\end{array} \tag{19}
$$

Доказательство. Для упрощения выражений удобно воспользоваться комплексной заменой переменных [5], обобщающей замену, предложенную С. В. Ковалевской для волчка в поле силы тяжести [3]:

$$
\begin{array}{c}
x_1 = \xi_1 + i\xi_2, \quad x_2 = \xi_1 - i\xi_2, \\
y_1 = \eta_1 + i\eta_2, \quad y_2 = \eta_1 - i\eta_2, \\
z_1 = \alpha_3 + i\beta_3, \quad z_2 = \alpha_3 - i\beta_3, \\
w_1 = \omega_1 + i\omega_2, \quad w_2 = \omega_1 - i\omega_2, \quad w_3 = \omega_3.
\end{array} \tag{20}
$$

Обозначая штрихом дифференцирование по it, запишем систему (2) в виде

$$
\begin{array}{c}
x_1' = -x_1w_3 + z_1w_1, \quad x_2' = x_2w_3 - z_2w_2, \\
y_1' = -y_1w_3 + z_2w_1, \quad y_2' = y_2w_3 - z_1w_2, \\
2z_1' = x_1w_2 - y_2w_1, \quad 2z_2' = -x_2w_1 + y_1w_2, \\
2w_1' = -(w_1w_3 + z_1), \quad 2w_2' = w_2w_3 + z_2, \quad 2w_3' = y_2 - y_1.
\end{array} \tag{21}
$$

Геометрические интегралы (3) дают

$$
\begin{array}{c}
z_1^2 + x_1y_2 = r^2, \quad z_2^2 + x_2y_1 = r^2, \\
x_1x_2 + y_1y_2 + 2z_1z_2 = 2p^2.
\end{array} \tag{22}
$$

В переменных (20) первые интегралы (5) запишутся так

$$
\begin{array}{l}
H = \dfrac{1}{2}w_3^2 + w_1w_2 - \dfrac{1}{2}(y_1 + y_2), \\
K = (w_1^2 + x_1)(w_2^2 + x_2), \\
G = \dfrac{1}{4}(p^2 - x_1x_2)w_3^2 + \dfrac{1}{2}(x_2z_1w_1 + x_1z_2w_2)w_3 + \\
\qquad + \dfrac{1}{4}(x_2w_1 + y_1w_2)(y_2w_1 + x_1w_2) - \dfrac{1}{4}p^2(y_1 + y_2) + \dfrac{1}{4}r^2(x_1 + x_2).
\end{array} \tag{23}
$$

Всюду ниже под критическими точками функций, если не оговорено противное, подразумеваются их критические точки на P^6. В частности, для функций, выраженных в переменных (20), необходимо учитывать ограничения (22). То же относится и к фигурирующим далее дифференциалам.

1. Критические точки функции K удовлетворяют одному из двух условий: либо

$$
w_1^2 + x_1 = 0, \; w_2^2 + x_2 = 0, \tag{24}
$$

либо

$$
w_1 = w_2 = 0, \; z_1 = z_2 = 0. \tag{25}
$$

Система (24) совпадает с (13), а множество (25) состоит из точек траекторий (10), которые, очевидно, удовлетворяют системе (18). Поэтому далее рассматриваем точки, не являющиеся критическими для K.

2. Точки зависимости H и K, как отмечено выше, состоят из точек траекторий (8), (9), а они удовлетворяют как одной из систем (15), (17), так и системе (18). Далее полагаем дифференциалы функций H и K независимыми.

3. Для исследования остальных случаев линейной зависимости дифференциалов функций (23) введем функцию с неопределенными множителями Лагранжа τ, s:

$$L = 2G + (\tau - p^2)H + sK \tag{26}$$

(в силу предположения о независимости H, K множитель при G может быть выбран любым ненулевым, слагаемое с p^2 введено для удобства).

Множество $\sigma_0 \subset \sigma$ точек, удовлетворяющих при каких-либо τ, s условию

$$2dG + (\tau - p^2)dH + sdK = 0, \tag{27}$$

инвариантно относительно фазового потока системы (21). Применяя к (27) производную Ли вдоль соответствующего векторного поля, получим

$$\tau' dH + s' dK = 0,$$

а так как H, K предполагаются независимыми, то на σ_0

$$\tau' = 0, \; s' = 0, \tag{28}$$

то есть τ, s являются частными интегралами движения на инвариантной поверхности σ_0.

Выпишем часть скалярных уравнений, отвечающих в (26) частным производным по w_1, w_2, w_3 (при этом ограничения (22) учитываются лишь после вычисления производных):

$$\begin{array}{l} x_2 z_1 w_3 + x_2 y_2 w_1 + (\tau - z_1 z_2) w_2 + 2 s w_1 (w_2^2 + x_2) = 0, \\ x_1 z_2 w_3 + (\tau - z_1 z_2) w_1 + x_1 y_1 w_2 + 2 s w_2 (w_1^2 + x_1) = 0, \end{array} \tag{29}$$

$$(\tau - x_1 x_2) w_3 + x_2 z_1 w_1 + x_1 z_2 w_2 = 0. \tag{30}$$

Рассмотрим вначале случай (12). Для переменных (20) имеем из (22)

$$x_1 = x_2 = 0, \; z_1^2 = z_2^2 = r^2, \; y_1 y_2 = 2(p^2 - r^2). \tag{31}$$

Так как z_1, z_2 комплексно сопряжены, то здесь они вещественны и равны между собой. Обозначим их общее значение через $z = \pm r$.

Уравнения (29)–(31) совместны, если $w_1 w_2 = 0$ или $w_3 = 0$. Выполнение какого-либо из этих равенств на некотором интервале времени (а тогда и тождественно по t) приводит к одному из уже известных решений (8)–(10).

Пусть при условии (31) $w_1 w_2 \neq 0, w_3 \neq 0$. Тогда из (29), (30) находим

$$\tau = 0, \; s = r^2/(2 w_1 w_2).$$

Подстановка этих значений в условия зависимости дифференциала функции (26) по всем девяти переменным (20) и таких же дифференциалов функций, стоящих в левых частях соотношений (22), дает

$$w_1 w_2 [2 z w_3 + (w_2 y_1 + w_1 y_2)] + r^2 (w_1 + w_2) = 0. \tag{32}$$

В исходных фазовых переменных уравнения (31), (32) принимают вид (17). Интересно отметить, что эти же уравнения получаются предельным переходом в системе (15) к началу координат на плоскости $\xi_1\xi_2$ вдоль прямых $\xi_1/\xi_2 = \mathrm{const}$ лишь после сокращения на максимально возможную степень величины $\rho = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$. Таким образом, система (15) без предположения $\rho \neq 0$ имеет в точках вида (12) решения, не принадлежащие σ.

Далее полагаем

$$x_1 x_2 \neq 0. \tag{33}$$

Определитель системы (29) по τ, s равен $\delta = 2(x_1 w_2^2 - x_2 w_1^2)$. Если предположить, что на некотором временном интервале $\delta \equiv 0$, то последовательное дифференцирование этого тождества в силу уравнений (21) приводит к одному из уже отмеченных случаев (24), (25). Поэтому далее полагаем $\delta \neq 0$. Тогда из (29) находим

$$s = \frac{1}{2(x_1 w_2^2 - x_2 w_1^2)}[(x_2 z_1 w_1 - x_1 z_2 w_2) w_3 + x_2 y_2 w_1^2 - x_1 y_1 w_2^2], \tag{34}$$

$$\begin{aligned} \tau = z_1 z_2 + \frac{1}{x_1 w_2^2 - x_2 w_1^2}\{[x_1 x_2 (z_2 w_1 - z_1 w_2) - w_1 w_2 (x_2 z_1 w_1 - x_1 z_2 w_2)] w_3 - \\ - w_1 w_2 (x_2 y_2 w_1^2 - x_1 y_1 w_2^2) + x_1 x_2 w_1 w_2 (y_1 - y_2)\}. \end{aligned} \tag{35}$$

Условие совместности (30) и (35) по τ имеет вид

$$S_1 = 0,$$

где

$$\begin{aligned} S_1 = {} & [x_1 x_2 (z_2 w_1 - z_1 w_2) - w_1 w_2 (x_2 z_1 w_1 - x_1 z_2 w_2)] w_3^2 + \\ & + [(x_1 x_2 - z_1 z_2)(x_2 w_1^2 - x_1 w_2^2) - w_1 w_2 (x_2 y_2 w_1^2 - x_1 y_1 w_2^2) + \\ & + x_1 x_2 w_1 w_2 (y_1 - y_2)] w_3 - (x_2 w_1^2 - x_1 w_2^2)(x_2 z_1 w_1 + x_1 z_2 w_2). \end{aligned}$$

Выразим τ из (30) и, согласно (28), приравняем к нулю производную полученного выражения в силу уравнений (21). Получим

$$S_2 = 0,$$

где

$$\begin{aligned} S_2 = {} & (x_2 z_1 w_1 - x_1 z_2 w_2) w_3^2 + (x_2 y_2 w_1^2 - x_1 y_1 w_2^2 + x_2 z_1^2 - x_1 z_2^2) w_3 - \\ & - (y_1 - y_2)(x_2 z_1 w_1 + x_1 z_2 w_2). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$S_1 + w_1 w_2 S_2 = F_1 R,$$

где

$$F_1 = x_1 x_2 w_3 - (x_2 z_1 w_1 + x_1 z_2 w_2)$$

есть выражение в переменных (20) первой функции (16), а функция

$$R = (z_2 w_1 - z_1 w_2) w_3 + x_2 w_1^2 - x_1 w_2^2 + w_1 w_2 (y_1 - y_2) \tag{36}$$

связана с первой функцией (19) равенством $R = 2iR_1$. Таким образом, на траекториях, состоящих из искомых критических точек, должно быть либо $F_1 \equiv 0$, либо $R_1 \equiv 0$. Дифференцируя эти соотношения по времени в силу системы (2), приходим к уравнениям

(15) и (18) соответственно. Следовательно, указанные уравнения служат необходимым условием принадлежности точки фазового пространства множеству σ_0.

Для доказательства достаточности приведем цепочку рассуждений для системы (15) (соответствующие формулы имеются в [6]). На множестве (33) функции (16) независимы, поэтому определяемое системой (15) открытое подмножество $N_0^4 \subset N^4$ является гладким четырехмерным многообразием. Вычислим скобку Пуассона $\{F_1, F_2\}$ и убедимся, что почти всюду на N_0^4 она отлична от нуля. Поэтому 2-форма, индуцированная на N_0^4 исходной симплектической структурой, невырождена всюду, за исключением подмножества $\{F_1, F_2\} = 0$ коразмерности один. Следовательно, ограничение динамической системы (2) на N_0^4 почти всюду является гамильтоновой системой с двумя степенями свободы, обладающей двумя почти всюду независимыми первыми интегралами. В частности, размерность ее интегральных многообразий не превышает двух, что возможно лишь на множестве критических точек отображения (6). Аналогичные рассуждения применимы и к системе (18), однако выкладки весьма громоздки. Мы их здесь не приводим, поскольку ниже будет указана явная зависимость первых интегралов (5) на множестве (18) в виде уравнений бифуркационной диаграммы. □

Замечание. Фазовая топология почти гамильтоновой системы на инвариантном многообразии M^4, указанном в [2], изучена в работе [9]. Система инвариантных соотношений (15), найденная в [5], включена в глобально определенное инвариантное множество критических точек N^4 в работе [6], при этом уравнения движения на N^4 разделены и исходные фазовые переменные выражены через две вспомогательные переменные, зависимость которых от времени задается эллиптическими функциями Якоби. Движения на M^4 обобщают движения 1-го класса Аппельрота (класса Делоне) задачи Ковалевской, а предельным случаем движений на N^4 при $\boldsymbol{\beta} \to 0$, как показано в [5], являются особо замечательные движения 2-го и 3-го классов Аппельрота [1]. Система (18) ранее не отмечалась.

Укажем классический аналог критического множества O^4. Положим в определении функций (19) $\boldsymbol{\beta} = 0$. Тогда, учитывая, что при этом $\xi_1 = \eta_1 = \alpha_1$, $\xi_2 = \eta_2 = \alpha_2$, получим

$$R_1 = 2\ell\omega_2, \quad R_2 = 2\ell(\omega_1\omega_3 + \alpha_3),$$

где

$$2\ell = 2\alpha_1\omega_1 + 2\alpha_2\omega_2 + \alpha_3\omega_3$$

есть постоянная интеграла площадей, существующего в случае наличия лишь одного силового поля.

Таким образом, уравнения (18) будут выполнены либо при $\ell = 0$, либо на множестве

$$\omega_2 = 0, \ \omega_1\omega_3 + \alpha_3 = 0. \tag{37}$$

Появление условия $\ell = 0$ связано с тем, что при $\boldsymbol{\beta} = 0$ значение интеграла G обращается в ℓ^2. Условия (37) определяют особо замечательные движения 4-го класса Аппельрота [1].

3. Бифуркационная диаграмма. Поскольку все совместные уровни (7) первых интегралов компактны, бифуркационная диаграмма Σ совпадает с множеством критических значений отображения (6): $\Sigma = I(\sigma)$.

Положим $\gamma = |\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}|$. В силу (3) имеем $\gamma = ab$.

Обозначим через Δ область существования движений – множество точек в пространстве констант первых интегралов, для которых многообразия (7) не пусты.

Теорема 2. Бифуркационная диаграмма интегрального отображения $H \times K \times G$ системы (2) состоит из лежащих в Δ точек поверхностей

$$\Gamma_1: \quad k = 0; \tag{38}$$

$$\Gamma_2: \quad (2g - p^2h)^2 - r^4k = 0; \tag{39}$$

$$\Gamma_3: \quad \begin{cases} h = s + \dfrac{g}{s^2} - \dfrac{\gamma^2}{s^3} \\ k = p^2 - \dfrac{2g}{s} + \dfrac{\gamma^2}{s^2} + \dfrac{g^2}{s^4} - \dfrac{2g\gamma^2}{s^5} + \dfrac{\gamma^4}{s^6} \end{cases}. \tag{40}$$

В параметрической записи поверхности Γ_3 параметр s играет роль кратного корня многочлена

$$\Phi(s) = s^4 - 2hs^3 + (h^2 + p^2 - k)s^2 - 2gs + \gamma^2. \tag{41}$$

Доказательство. 1. Уравнение поверхности (38) сразу же следует из (13), (14) и формы интеграла K.

2. Введем функцию

$$F = (p^2H - 2G)^2 - r^4K.$$

Уравнение ее нулевого уровня распадается на два

$$\begin{gathered} p^2H - 2G + r^2\sqrt{K} = 0, \\ p^2H - 2G - r^2\sqrt{K} = 0. \end{gathered} \tag{42}$$

Здесь значение $\sqrt{K}$ – арифметическое.

В переменных (20) при условии (33) введем комплексно сопряженные функции

$$U_1 = \sqrt{\frac{x_2}{x_1}(w_1^2 + x_1)}, \quad U_2 = \sqrt{\frac{x_1}{x_2}(w_2^2 + x_2)}. \tag{43}$$

Левая часть первого уравнения (42) примет вид суммы квадратов вещественных величин

$$F_1^2 + 2r^2(\mathtt{Im}\, U_1)^2 = 0, \tag{44}$$

а второго – разности квадратов

$$F_1^2 - 2r^2(\mathtt{Re}\, U_1)^2 = 0. \tag{45}$$

При этом, согласно (16), (43), имеем

$$F_2 = U_1^2 - U_2^2 = 4\mathtt{Im}\, U_1 \mathtt{Re}\, U_1.$$

Поэтому решения системы (15) удовлетворяют либо (44), либо (45), и, следовательно, лежат на нулевом уровне функции F, а соответствующие постоянные интегралов удовлетворяют равенству (39). Из выражений первых интегралов в виде (23) получим, что это же равенство выполнено во всех точках фазового пространства, где $x_1x_2 = 0$ (независимо от свойства критичности), а значит, оно выполняется и в точках (17).

3. Обратимся к системе (18). В переменных (20) она эквивалентна следующей:

$$R = 0, \quad R_* = 0. \tag{46}$$

Здесь R – функция (36), а

$$\begin{aligned} R_* = (z_2w_1 + z_1w_2)w_3^2 + [x_2w_1^2 + x_1w_2^2 + w_1w_2(y_1 + y_2) + 2z_1z_2]w_3 + \\ + 2(x_2z_1w_1 + x_1z_2w_2). \end{aligned} \tag{47}$$

Заметим, что возможность $z_2^2w_1^2 - z_1^2w_2^2 \equiv 0$ приводит после дифференцирований в силу уравнений (21) к условиям (25), то есть к особым движениям (10). Подстановка (25) в (22) дает

$$x_1x_2 = p^2 - 2q, \quad y_1y_2 = p^2 + 2q, \quad (x_1 + x_2)y_1y_2 = r^2(y_1 + y_2)$$
$$(q = \pm\gamma).$$

Соответствующие значения постоянных интегралов (23)

$$h = \frac{1}{2}w_3^2 - \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad k = p^2 - 2q, \quad g = qh$$

удовлетворяют уравнениям (40) поверхности Γ_3, если в качестве значения параметра s взять корень уравнения $qs^2 - gs + q^2 = 0$. Необходимые при этом условия вещественности на траекториях (10) выполнены.

Рассматривая далее лишь такие траектории, на которых равенства (25) не выполняются тождественно, можем выразить w_3 из первого уравнения (46):

$$w_3 = -\frac{1}{z_2w_1 - z_1w_2}[x_2w_1^2 - x_1w_2^2 + w_1w_2(y_1 - y_2)]. \tag{48}$$

Подставив найденное значение в $(z_2w_1 - z_1w_2)^2R_*$, получим выражение $2w_1w_2Q$ (результант (36), (47) по w_3), где Q – неоднородный многочлен третьей степени по w_1, w_2, коэффициенты которого – многочлены степени не выше 4 по переменным x_i, y_i, z_i. Поскольку возможность (25) уже исключена из рассмотрения, то система (18) заменяется на условие (48) и равенство

$$Q = 0. \tag{49}$$

Значения (34), (35) удовлетворяют в силу (48), (49) следующим тождествам

$$\begin{aligned} &\tau - p^2 - 2s(s - H) = 0, \\ &(\tau - p^2)^2 + 4(p^2 - K)s^2 - 8Gs + (p^4 - r^4) = 0, \\ &(\tau - p^2)(2s - H) + 2(p^2 - K)s - 2G = 0. \end{aligned} \tag{50}$$

Последовательность вычислений такова. Подставляем в левую часть проверяемого равенства (50) значения (23), (34), (35), (48) и домножаем на общий знаменатель, возможность обращения в нуль которого уже изучена. Полученное выражение оказывается произведением некоторого многочлена от переменных (20) на многочлен Q, равный нулю в силу (49).

Заменяя в (50) функции H, K, G их произвольными постоянными h, k, g и исключая τ с помощью первого соотношения, приведем два оставшихся к виду

$$\Phi(s) = 0, \quad d\Phi(s)/ds = 0, \tag{51}$$

где Φ – многочлен (41). Равенства (40) равносильны системе (51). $\square$

Заключение. Результаты данной работы представляют собой базу для дальнейшего исследования фазовой топологии вполне интегрируемой системы с тремя степенями свободы, описывающей движение волчка типа Ковалевской в двойном силовом поле. Опыта такого исследования пока нет. Все интегрируемые задачи динамики твердого тела, подвергавшиеся топологическому анализу, имели осесимметричный потенциал и сводились в целом к однопараметрическому семейству систем с двумя степенями свободы.

Зная критические многообразия в составе интегральных поверхностей, отвечающих бифуркационным значениям (38)–(40), и характер ограничений отображения, касательного к (6), на плоскости, трансверсальные к многообразиям M^4, N^4, O^4, определенные, например, градиентами соответствующих функций (14), (16), (19), можно получить всю информацию о количестве связных компонент (трехмерных торов Лиувилля) регулярных уровней (7) и о топологическом характере происходящих бифуркаций.

Бифуркационная диаграмма Σ при $\boldsymbol{\beta} \to 0$ $(r \to p, \gamma \to 0)$ непрерывно деформируется в бифуркационную диаграмму задачи Ковалевской, найденную в [4]. В то же время пространственный вид поверхности Γ_3 принципиально более сложен, чем в предельной классической задаче.

Форма записи (40), где роль независимого параметра, наряду с s, играет постоянная общего интеграла G, выбрана для удобства сопоставления с результатами [4] для волчка Ковалевской в поле силы тяжести. При этом многочлен (41) обобщает резольвенту Эйлера второго многочлена Ковалевской [3, 1]. Целесообразно изучить сечения Σ_h множества Σ плоскостями $h = \text{const}$, поскольку они представляют собой бифуркационные диаграммы систем (уже не имеющих гамильтоновой структуры), индуцированных на пятимерных изоэнергетических уровнях $E_h^5 \subset P^6$. Сама диаграмма Σ_h будет компактным одномерным подмножеством плоскости с некоторой совокупностью особых точек. Надстройка над ограниченной ею областью существования движений с заданным значением h, полученная путем сопоставления отдельной точки каждой связной компоненте интегрального многообразия, представит собой "двумерный" аналог графа Фоменко, играющего важную роль для систем с двумя степенями свободы. Для задачи в целом можно ставить вопрос об исследовании сферических молекул (если в пространстве-образе отображения (6) взять малую двумерную сферу, всюду трансверсально пересекающую страты бифуркационной диаграммы Σ, то ее прообраз в P^6 будет гладким компактным многообразием размерности 5, расслоенным на семейства трехмерных торов Лиувилля). Аппарат для более детальных исследований (таких, как установление классов лиувиллевой эквивалентности систем на уровнях E_h^5 или на упомянутых прообразах малых сфер) еще не разработан (видимо, в силу того, что ранее отсутствовали содержательные примеры).

Имея четкое представление о виде сечений поверхности Σ, параллельных некоторой плоскости, можно определить область существования движений: если обозначить через $\tilde{\Sigma}$ поверхность, заданную уравнениями (38)–(40), так что $\Sigma = \tilde{\Sigma} \cap \Delta$, то в $\mathbf{R}^3 \backslash \tilde{\Sigma}$ необходимо отбросить связные компоненты, в которых либо координата h неограничена снизу, либо координата k может принимать отрицательные значения. Для поверхностей Γ_1, Γ_2 те их части, где $I_c \neq \emptyset$, известны [9, 6]. С этой точки зрения поверхность Γ_3 требует дополнительного исследования.

1. *Аппельрот Г.Г.* Не вполне симметричные тяжелые гироскопы // В кн.: Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1940. – С. 61 –156.
2. *Богоявленский О.И.* Два интегрируемых случая динамики твердого тела в силовом поле // Докл. АН СССР. – 1984. – **275**, № 6. – С. 1359 – 1363.
3. *Ковалевская С.В.* Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки // Науч. работы. – М.: Изд-во АН СССР, 1948. – С. 153 – 220.
4. *Харламов М.П.* Бифуркации совместных уровней первых интегралов в случае Ковалевской // Прикл. матем. и механика. – 1983. – **47**, вып. 6. – С. 922 – 930.
5. *Харламов М.П.* Один класс решений с двумя инвариантными соотношениями задачи о движении волчка Ковалевской в двойном постоянном поле // Механика твердого тела. – 2002. – Вып. 32. – С. 32 – 38.
6. *Харламов М.П., Савушкин А.Ю.* Разделение переменных и интегральные многообразия в одной частной задаче о движении обобщенного волчка Ковалевской // Укр. мат. вестник. – 2004. – **1**, вып. 4. – С. 548 – 565.
7. *Bobenko A.I., Reyman A.G., Semenov-Tian-Shansky M.A.* The Kowalewski top 99 years later: a Lax pair, generalizations and explicit solutions // Commun. Math. Phys. – 1989. – **122**, № 2. – P. 321 – 354.
8. *Yehia H.* New integrable cases in the dynamics of rigid bodies // Mech. Res. Commun. – 1986. – **13**, № 3. – P. 169 – 172.
9. *Zotev D.B.* Fomenko-Zieschang invariant in the Bogoyavlenskyi case // Regular and chaotic dynamics. – 2000. – **5**, № 4. – P. 437–458.

Волгоградская академия государственной службы, Россия
mharlamov@vags.ru

Получено 01.09.04