

УДК 531.38

©2004. Н.В. Хлыстунова

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ СТЕКЛОВА ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ЭЙЛЕРА-ПУАНСО

Методами резонансной теории возмущений исследовано хаотическое поведение динамической системы в окрестности решения Стеклова задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. В качестве невозмущенной системы рассмотрен осесимметричный случай Эйлера движения свободного твердого тела. Решению Стеклова соответствует резонанс второго порядка между собственными частотами невозмущенной системы. Каноническим преобразованием к новой медленной переменной гамильтониан задачи в окрестности решения Стеклова приведен к стандартной форме. Изучены свойства отображения последования, получены уравнения малых колебаний возмущенной задачи, с помощью интеграла Мельникова исследован эффект расщепления сепаратрис резонанса.

1. Решение В.А.Стеклова. В предположении, что центр масс твердого тела находится на первой главной оси инерции, рассмотрим периодическое решение В.А. Стеклова [1] задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Движение тела вокруг неподвижной точки при этом описывается уравнениями Эйлера-Пуассона

$$A\dot{p} = (B - C)qr, \quad B\dot{q} = (C - A)rp - \Gamma\nu_3, \quad C\dot{r} = (A - B)pq + \Gamma\nu_2, \quad (1)$$

$$\dot{\nu}_1 = \nu_2r - \nu_3q, \quad \dot{\nu}_2 = \nu_3p - \nu_1r, \quad \dot{\nu}_3 = \nu_1q - \nu_2p, \quad (2)$$

где p, q, r – компоненты угловой скорости тела, ν_i – компоненты единичного вектора направления силы тяжести, A, B, C – главные моменты инерции тела, дифференцирование по времени обозначено точкой, Γ – произведение веса тела на расстояние от центра масс до неподвижной точки. Уравнения (1),(2) допускают первые интегралы

$$\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) - \Gamma\nu_1 = h, \quad Ap\nu_1 + Bq\nu_2 + Cr\nu_3 = g, \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1. \quad (3)$$

При условии $(2B - A)(2C - A) < 0$ инвариантные алгебраические соотношения для решения Стеклова имеют вид

$$q^2 = a_0 + a_1p^2, \quad r^2 = b_0 + b_1p^2, \quad \nu_1 = \delta + \zeta p^2, \quad \nu_2 = \eta pq, \quad \nu_3 = \xi pr, \quad (4)$$

где $\delta = \pm 1$ и постоянные коэффициенты $a_0, a_1, b_0, b_1, \zeta, \eta, \xi$ заданы соотношениями

$$a_0 = \frac{A(A - 2C)\delta\Gamma}{(B - C)(A - B)(A - C)}, \quad a_1 = \frac{A(C - A)}{(2B - A)(B - C)}, \quad b_0 = \frac{A(2B - A)\delta\Gamma}{(B - C)(A - B)(A - C)}, \quad (5)$$

$$b_1 = \frac{A(B - A)}{(A - 2C)(B - C)}, \quad \zeta = \frac{A(A - B)(A - C)}{\Gamma(A - 2B)(A - 2C)}, \quad \eta = \frac{(2B - A)\zeta}{A}, \quad \xi = \frac{(2C - A)\zeta}{A}.$$

Подстановкой (4) в (3) найдем значения интегральных постоянных

$$g = 0, \quad h = \delta\Gamma \left(\frac{A^2}{2(B - A)(C - A)} - 1 \right) \in (\Gamma, \infty).$$

Тогда зависимость p, q, r от времени выражается эллиптическими функциями Якоби для двух возможных случаев соотношения между моментами инерции.

Случай I: $C + A > B > A > 2C$, $\delta = -1$, $p = p_0 \operatorname{cn} \varkappa t$, $q = q_0 \operatorname{sn} \varkappa t$, $r = r_0 \operatorname{dn} \varkappa t$,

$$\begin{aligned} p_0^2 &= \frac{(A-2C)(2B-A)\Gamma}{(A-C)^2(B-A)}, & q_0^2 &= \frac{A(A-2C)\Gamma}{(A-C)(B-A)(B-C)}, \\ r_0^2 &= \frac{A(2B-A)\Gamma}{(A-C)^2(B-A)}, & \varkappa^2 &= \frac{(B-C)\Gamma}{(A-C)(B-A)}, & k^2 &= \frac{(B-A)}{(B-C)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Случай II: $A/2 > C > A - B > 0$, $\delta = 1$, $p = p_0 \operatorname{sn} \varkappa t$, $q = q_0 \operatorname{cn} \varkappa t$, $r = r_0 \operatorname{dn} \varkappa t$,

$$\begin{aligned} p_0^2 &= \frac{(A-2C)(2B-A)\Gamma}{(A-C)^2(A-B)}, & q_0^2 &= \frac{A(A-2C)\Gamma}{(A-C)(A-B)(B-C)}, \\ r_0^2 &= \frac{A(2B-A)\Gamma}{(A-C)(B-C)(A-B)}, & \varkappa^2 &= \frac{\Gamma}{(A-B)}, & k^2 &= \frac{(A-B)}{(A-C)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Полное геометрическое истолкование решения В.А. Стеклова методом годографов дано Е.И. Харламовой и Г.В. Мозалевской [2]. В работе Е.Ю. Кучер [3] проведено вычисление характеристических показателей Ляпунова уравнений в вариациях, соответствующих решению Стеклова, что позволило определить области динамической неустойчивости в пространстве параметров задачи. Было установлено, что в случае I возмущенные траектории в окрестности решения Стеклова неустойчивы во всей области допустимых параметров. В случае II в окрестности решения Стеклова возмущенные траектории, как правило, орбитально устойчивы, исключение могут составлять кривые параметрического резонанса, построенные численно в [3]. А.П. Маркеев [4] изучил условия орбитальной устойчивости решения В.А. Стеклова на основе процедуры исследования специальным образом построенного симплектического отображения, порождаемого дифференциальными уравнениями возмущенного движения. Если $|\varepsilon| = |B-A| \ll 1$ и $\Gamma \ll 1$, то энергия тела бесконечно возрастает $h \rightarrow \infty$, что затрудняет анализ результатов вычислительных экспериментов. Поэтому этот случай требует дополнительного исследования, которое является основной целью данной работы.

2. Предельный случай. Когда ε и Γ малы, тогда решение Стеклова стремится к частному решению случая Эйлера движения по инерции осесимметричного твердого тела. Для случая I имеем $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon < 0$ для случая II. Положим $\varepsilon < 0$, тогда из соотношений (4), (5) получим

$$p^2 + q^2 = \frac{A(A-2C)}{\gamma_0^2(A-C)^2}, \quad r^2 = \frac{A^2}{\gamma_0^2(A-C)^2}, \quad \gamma_0^2 = -\frac{\varepsilon}{\Gamma}, \quad (8)$$

$$\nu_1 = 1 - \frac{\gamma_0^2(A-C)}{(A-2C)} p^2, \quad \nu_2 = -\frac{\gamma_0^2(A-C)}{(A-2C)} pq, \quad \nu_3 = \gamma_0 p. \quad (9)$$

Введем переменные Андуайе-Депри по формулам

$$\begin{aligned} p &= \frac{\sin l}{A} \sqrt{\Phi^2 - L^2}, & q &= \frac{\cos l}{B} \sqrt{\Phi^2 - L^2}, & r &= \frac{L}{C}, & \nu_1 &= \frac{L}{\Phi} \sin l \cos \varphi + \cos l \sin \varphi, \\ \nu_2 &= \frac{L}{\Phi} \cos l \cos \varphi - \sin l \sin \varphi, & \nu_3 &= -\sqrt{1 - \frac{L^2}{\Phi^2}} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (10)$$

С учетом (10) гамильтониан задачи (1), (2) запишем так

$$H^G = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B} \right) (\Phi^2 - L^2) + \frac{L^2}{2C} - \Gamma \left[\frac{L}{\Phi} \sin l \cos \varphi + \cos l \sin \varphi \right]. \quad (11)$$

В случае Эйлера гамильтониан (11) зависит только от L и Φ , канонические переменные (L, Φ, l, φ) являются переменными действие-угол. В дальнейшем рассмотрим

$$H_0 = \frac{(\Phi^2 - L^2)}{2A} + \frac{L^2}{2C} \quad (12)$$

в качестве гамильтониана невозмущенной интегрируемой системы.

Для построения фазовых портретов используем метод сечений Пуанкаре. Учитывая (10), заключаем, что на сечении Пуанкаре $\varphi = \pi/2$ при $t = 0$ периодическому решению (8), (9) соответствует неподвижная точка

$$L_0^S = \frac{CA}{\gamma_0(A-C)}, \quad l_0^S = 0, \quad \Phi_0^S = \frac{A}{\gamma_0}, \quad \varphi_0^S = \frac{\pi}{2}. \quad (13)$$

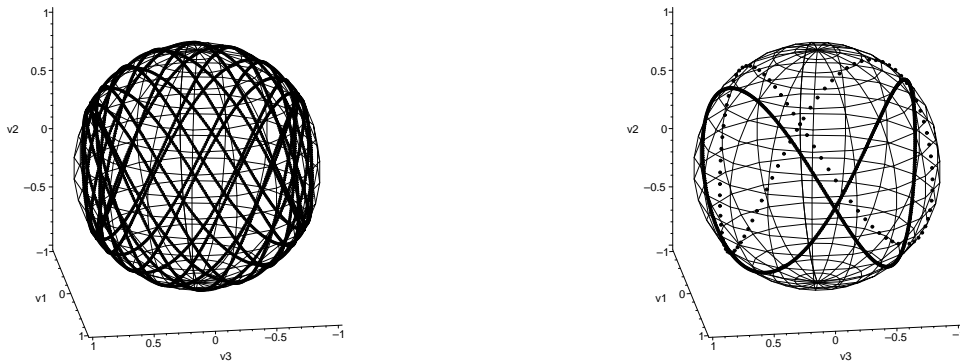
В силу (9), (10) при малых значениях ε и любых $t \geq 0$ получим соотношение для угловых переменных

$$\varphi^S - l^S = \frac{\pi}{2}. \quad (14)$$

Зависимость p, q, r от t определяет замкнутую кривую – полодию (8) в пространстве угловых скоростей. В четырехмерном пространстве переменных действие-угол этим зависимостям отвечает двумерный инвариантный тор, заполненный квазипериодическими или периодическими траекториями. Как следует из (14), решение Стеклова принадлежит резонансному тору в \mathbb{R}^4 . Проекцией этого тора на сферу Пуассона является ограниченная подобласть (рис. 1, а), принадлежащая области возможных конфигураций. Из формул (9), (10) следует, что соответствие между двумя кривыми, одна из которых удовлетворяет (14), а другая при любых $t \geq 0$ удовлетворяет

$$\varphi^N - l^N = -\frac{\pi}{2}, \quad (15)$$

задано координатным преобразованием $(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \rightarrow (-\nu_1, -\nu_2, -\nu_3)$. Соответствующие (14), (15) замкнутые симметричные годографы вектора $\boldsymbol{\nu}$ показаны на рис. 1, б: $\boldsymbol{\nu}^S$ – линия, $\boldsymbol{\nu}^N$ – пунктир.



а) $\varphi = l - \pi/2 + 2\pi k/10$ ($k = 0, \dots, 9$)

б) $\varphi = l - \pi/2 + \pi k$ ($k = 0, 1$)

Рис. 1. Годографы вектора $\boldsymbol{\nu}$ на сфере Пуассона.

На основании (10), (15) заключаем, что при $t = 0$ симметричному решению уравнений (1), (2) соответствует на сечении Пуанкаре $\varphi = \pi/2$ неподвижная точка

$$L_0^N = L_0^S, \quad l_0^N = \pi, \quad \Phi_0^N = \Phi_0^S, \quad \varphi_0^N = \frac{\pi}{2}. \quad (16)$$

Дифференцированием (12) найдем собственные частоты невозмущенной системы

$$\omega_1 = \frac{\partial H_0}{\partial L} = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) L, \quad \omega_2 = \frac{\partial H_0}{\partial \Phi} = \frac{\Phi}{A}. \quad (17)$$

Согласно теореме Пуанкаре – Биркгофа ([6], с. 195), если отношение частот тора невозмущенной системы рационально, то под действием возмущения такой тор разрушается, и в его малой окрестности остается конечное число замкнутых фазовых траекторий. Возникает так называемый “остров” – резонансная структура, в центре которой находится устойчивая периодическая траектория. Решение Стеклова возникает именно в такой ситуации, и в силу равенств (13), (17) ему соответствует резонанс

$$\omega_1 - \omega_2 = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) L_0^S - \frac{\Phi_0^S}{A} \equiv 0,$$

при этом число $N = |k_1| + |k_2| = 2$ определяет порядок резонанса $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 = 0$. Указанное свойство определяет структуру сечения Пуанкаре при малых ε и Γ . На сечении имеются две неподвижные точки (13), (16), соответствующие периодическим решениям, одно из которых является решением Стеклова, а для другого решения аналитические формулы неизвестны.

3. Усредненный гамильтониан возмущенной задачи. С помощью производящей функции $F_2 = (l - \varphi + \pi/2)J_1 + (l + \varphi - \pi/2)J_2$ введем канонические переменные

$$\theta_1 = l - \varphi + \frac{\pi}{2}, \quad \theta_2 = l + \varphi - \frac{\pi}{2}, \quad J_1 = \frac{L - \Phi}{2}, \quad J_2 = \frac{L + \Phi}{2}. \quad (18)$$

Переменная θ_1 характеризует медленное отклонение от резонанса, а θ_2 – быстрое. С учетом (18) гамильтониан (11) примет вид

$$H^G = \frac{(J_1 + J_2)^2}{2C} - \frac{(B + A)}{AB} J_2 J_1 - \frac{(A - B)}{AB} J_2 J_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) + \frac{\Gamma [J_1 \cos \theta_1 - J_2 \cos \theta_2]}{(J_2 - J_1)}. \quad (19)$$

Полагая $\varepsilon < 0$ и оставляя в выражении (19) только члены первого порядка малости по ε , получим

$$H = H_0(J_1, J_2) + \varepsilon H_1(\theta_1, \theta_2, J_1, J_2). \quad (20)$$

Здесь H_0 – гамильтониан интегрируемой задачи (12) и H_1 – гамильтониан, характеризующий возмущение, соответственно таковы:

$$H_0 = \frac{(J_1 + J_2)^2}{2C} - \frac{2}{A} J_1 J_2, \quad H_1 = \frac{J_1 J_2}{A^2} \left(1 + \cos(\theta_1 + \theta_2) \right) - \frac{J_1 \cos \theta_1 - J_2 \cos \theta_2}{\gamma_0^2 (J_2 - J_1)}. \quad (21)$$

Уравнения Гамильтона имеют вид

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial J_1}, \quad \frac{d\theta_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial J_2}, \quad \frac{dJ_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta_1}, \quad \frac{dJ_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta_2}. \quad (22)$$

Основываясь на резонансной теории возмущений для систем, близких к интегрируемым, усредним гамильтониан (20) по быстрой угловой переменной θ_2 :

$$\bar{H} = \frac{1}{2C}(J_1 + J_2)^2 - \frac{2}{A}J_2J_1 + \varepsilon \left(\frac{J_2J_1}{A^2} - \frac{J_1 \cos \theta_1}{\gamma_0^2(J_2 - J_1)} \right). \quad (23)$$

Теперь движение имеет одну степень свободы, так как $J_2 = \text{const}$ – новый инвариант системы вблизи резонанса. Неподвижные точки на сечении Пуанкаре $\Theta_1 = \{J_{1,2}, \theta_{1,2} : \theta_2 - \theta_1 = 0\}$, соответствующие периодическим решениям возмущенной задачи, найдем из условий

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial J_1} = 0, \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial \theta_1} = 0.$$

Решению Стеклова с точностью до членов первого порядка по ε соответствует точка

$$\theta_1^{01} = 0, \quad J_1^{01} = \frac{A(2C - A)}{2(A - C)\gamma_0}, \quad \theta_2^{01} = 0, \quad J_2^{01} = \frac{A^2}{2(A - C)\gamma_0}. \quad (24)$$

Координаты другой неподвижной точки, соответствующей симметричному решению, таковы:

$$\theta_1^{02} = \pi, \quad J_1^{02} = \frac{A(2C - A)}{2(A - C)\gamma_0}, \quad \theta_2^{02} = \pi, \quad J_2^{02} = \frac{A^2}{2(A - C)\gamma_0}. \quad (25)$$

В окрестности неподвижной точки (24) разложим гамильтониан (23) в ряд Тейлора по степеням переменной $I_1 = J_1 - J_1^{01}$, характеризующей малое отклонение от резонанса. Отбросив постоянную и сохраняя только члены первого порядка малости по ε , получим “стандартный”, по терминологии [6], гамильтониан

$$H^P = \frac{I_1^2}{2C} - \frac{\varepsilon(2C - A)}{2\gamma_0^2(A - C)} \cos \theta_1. \quad (26)$$

Для малой окрестности устойчивой неподвижной точки $\theta_1 = 0, I_1 = 0$ получим описание движения, основанное на уравнениях малых колебаний. Разложив гамильтониан (26) в ряд Тейлора и отбросив постоянную, получим

$$H^O = \frac{I_1^2}{2C} + \frac{\varepsilon(2C - A)}{4\gamma_0^2(A - C)} \theta_1^2,$$

откуда следуют уравнения Гамильтона для малых колебаний

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{D}\mathbf{x}, \quad \text{где } \mathbf{x}(t) = (\theta_1(t), I_1(t))^T, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ \frac{\varepsilon(2C - A)}{2\gamma_0^2(A - C)} & 0 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет пару мнимых сопряженных корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0^*$. Частота ω_0^* и период P_0^* колебаний системы вблизи точки $\theta_1 = 0, I_1 = 0$ определяются формулами

$$\omega_0^* = \sqrt{\frac{\varepsilon(2C - A)}{2\gamma_0^2 C(A - C)}}, \quad P_0^* = \frac{2\pi}{\omega_0^*} = 2\pi \sqrt{\frac{2\gamma_0^2 C(A - C)}{\varepsilon(2C - A)}}. \quad (28)$$

Решение задачи Коши $\mathbf{x}(t=0) = (\theta_1^0, I_1^0)^T = \mathbf{x}_0$ для системы (27) имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{D}t} \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0^* t) & \frac{1}{\omega_0^*} \sin(\omega_0^* t) \\ -\omega_0^* \sin(\omega_0^* t) & \cos(\omega_0^* t) \end{pmatrix} \mathbf{x}_0. \quad (29)$$

Проведем численное интегрирование уравнений (22) при фиксированных значениях моментов инерции $A = 2$, $C = A/3$ и различных ε , Γ . Фазовые портреты задачи для сечения Пуанкаре Θ_1 представлены на рис. 2 и соответствуют решению (29) для малой окрестности устойчивой неподвижной точки $\theta_1 = 0$, $I_1 = 0$.

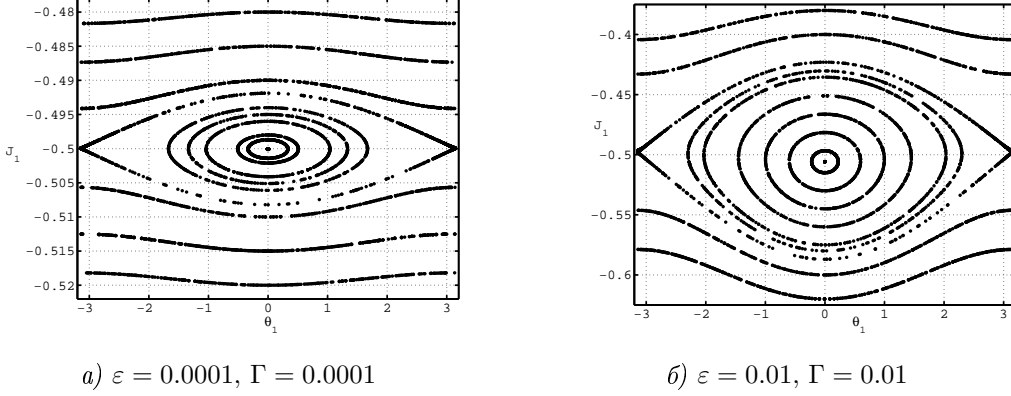


Рис. 2. Отображение последования на плоскости (θ_1, J_1) для сечения Пуанкаре Θ_1 .

Итак, вблизи резонанса медленное движение в переменных (θ_1, J_1) описывается интегрируемой системой, соответствующей гамильтониану (26). Максимальное отклонение переменной I_1 достигается при $\theta_1 = 0$ и равно половине ширины области резонанса $I_1^{max} = 2\sqrt{\varepsilon C(2C - A)/\gamma_0^2(A - C)}$. Формулы (28), (29) подтверждают полученные в [3] результаты вычисления характеристических показателей Ляпунова. Приведенные теоретические и численные результаты доказывают справедливость следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. В случае $\varepsilon < 0$ на сечении Пуанкаре Θ_1 решению Стеклова соответствует устойчивая неподвижная точка $\theta_1 = 0$, $I_1 = 0$ гамильтониана (26). Для малой окрестности решения Стеклова на сечении Пуанкаре $\varphi = \pi/2$ отображение последования в переменных Андуайе-Депри имеет вид

$$\begin{aligned}
 l(t_n) &= l(t_{n-1}) \cos(\omega_0^* t_{n-1}) + \frac{L(t_{n-1}) - \Phi(t_{n-1}) + 2J_1^{01}}{2\omega_0^*} \sin(\omega_0^* t_{n-1}), \\
 L(t_n) &= J_1^{01} + J_2^{01} - l(t_{n-1})\omega_0^* \sin(\omega_0^* t_{n-1}) + \frac{L(t_{n-1}) - \Phi(t_{n-1}) + 2J_1^{01}}{2} \cos(\omega_0^* t_{n-1}), \\
 \Phi(t_n) &= J_2^{01} - J_1^{01} + l(t_{n-1})\omega_0^* \sin(\omega_0^* t_{n-1}) - \frac{L(t_{n-1}) - \Phi(t_{n-1}) + 2J_1^{01}}{2} \cos(\omega_0^* t_{n-1}),
 \end{aligned} \tag{30}$$

где постоянные J_1^{01} , J_2^{01} , ω_0^* вычисляются согласно (24), (28).

4. Случай $\varepsilon > 0$. По аналогии с п. 1 из (4), (5) при малых ε и Γ получим

$$p^2 + q^2 = \frac{A(A - 2C)}{\gamma_0^2(A - C)^2}, \quad r^2 = \frac{A^2}{\gamma_0^2(A - C)^2}, \quad \gamma_0^2 = \frac{\varepsilon}{\Gamma}, \tag{31}$$

$$\nu_1 = \frac{\gamma_0^2(A - C)}{(A - 2C)} p^2 - 1, \quad \nu_2 = \frac{\gamma_0^2(A - C)}{(A - 2C)} pq, \quad \nu_3 = -\gamma_0 p. \tag{32}$$

На основании (10) заключаем, что в начальный момент времени на сечении Пуанкаре $\varphi = 0$ периодическому решению (31), (32) отвечает неподвижная точка

$$L_0^S = \frac{CA}{\gamma_0(A - C)}, \quad l_0^S = \frac{\pi}{2}, \quad \Phi_0^S = \frac{A}{\gamma_0}, \quad \varphi_0^S = 0, \quad \text{причем } \forall t: \varphi^S = l^S - \frac{\pi}{2}. \tag{33}$$

Симметричному решению соответствует при $t = 0$ неподвижная точка

$$L_0^N = L_0^S, \quad l_0^N = -\frac{\pi}{2}, \quad \Phi_0^N = \Phi_0^S, \quad \varphi_0^N = 0, \quad \text{причем } \forall t: \varphi^N = l^N + \frac{\pi}{2}. \quad (34)$$

По аналогии с п. 2 в данном случае также перейдем к быстрым и медленным резонансным переменным (18). Полагая $\varepsilon > 0$, с точностью до членов первого порядка малости по ε получим гамильтониан вида (20) со слагаемыми аналогичными (21) и уравнения Гамильтона (22). После усреднения по быстрой угловой переменной θ_2 гамильтониан (20) примет вид аналогичный (23). Для сечения Пуанкаре $\Theta_2 = \{J_{1,2}, \theta_{1,2} : \theta_1 - \theta_2 = \pi\}$ координаты неподвижной точки, соответствующей решению Стеклова, найдем с точностью до членов первого порядка по ε в виде

$$\theta_1^{01} = \pi, \quad J_1^{01} = \frac{A(2C - A)}{2(A - C)\gamma_0}, \quad \theta_2^{01} = 0, \quad J_2^{01} = \frac{A^2}{2(A - C)\gamma_0}, \quad (35)$$

и для другой неподвижной точки, соответствующей симметричному решению, получим

$$\theta_1^{02} = 0, \quad J_1^{02} = \frac{A(2C - A)}{2(A - C)\gamma_0}, \quad \theta_2^{02} = -\pi, \quad J_2^{02} = \frac{A^2}{2(A - C)\gamma_0}. \quad (36)$$

Вблизи резонанса $J_2 = J_2^{01}$ – инвариант системы (22). Разложив усредненный гамильтониан в ряд Тейлора в окрестности неподвижной точки (36) по степеням переменной $I_1 = J_1 - J_1^{01}$, с точностью до членов первого порядка малости по ε получим “стандартный” гамильтониан

$$H^P = \frac{I_1^2}{2C} - \frac{\varepsilon(A - 2C)}{2\gamma_0^2(A - C)} \cos \theta_1. \quad (37)$$

Итак, основанное на усреднении по быстрой переменной описание медленного движения (θ_1, J_1) интегрируемой системой уравнений движения маятника с гамильтонианом (37) приводит к уравнениям сепаратрисы

$$\hat{I}_1 = \pm 2C\omega_0^* \cos \frac{\hat{\theta}_1}{2}, \quad \hat{\theta}_1 = 4\text{arctg}[\exp(\omega_0^* t)] - \pi, \quad \omega_0^* = \sqrt{\frac{|\varepsilon|(A - 2C)}{2\gamma_0^2 C(A - C)}}, \quad (38)$$

причем плюс и минус соответствуют верхней и нижней ветвям сепаратрисы. Однако,

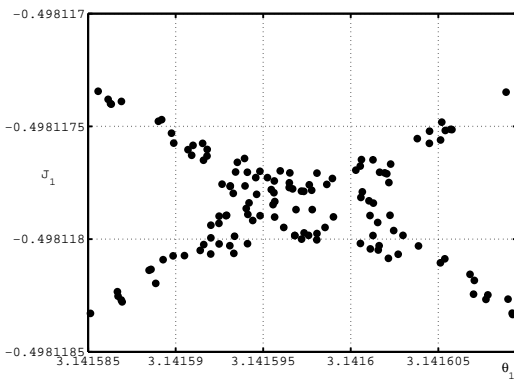


Рис. 3. Резонансный слой в случае $\varepsilon = 0.01$, $\Gamma = 0.01$.

изучим возмущенное движение в переменных (θ_2, J_2) по отношению к невозмущенному движению $J_2 = J_2^{01}$, $\theta_2 = 2\omega_2 t$.

5. Критерий Мельникова. Первые примеры численного моделирования эффекта расщепления сепаратрис резонансов в задаче о движении тяжелого твердого тела с

неподвижной точкой представлены в [7]. Разложив гамильтониан (20) в ряд Тейлора по переменным $I_1 = J_1 - J_1^{01}$, $I_2 = J_2 - J_2^{01}$ и опустив постоянные члены, представим возмущенный гамильтониан в виде

$$H_2 = 2\omega_2 I_2 + \frac{I_1^2}{2C} + \frac{\varepsilon J_1^{01} \cos \theta_1}{\gamma_0^2 (J_2^{01} - J_1^{01})} - \frac{\varepsilon J_2^{01} \cos \theta_2}{\gamma_0^2 (J_2^{01} - J_1^{01})} + \frac{\varepsilon}{A^2} J_2^{01} J_1^{01} \cos(\theta_1 + \theta_2). \quad (39)$$

Движение в резонансном слое исследуем с помощью сепаратрисного отображения, при этом изменение переменной действия I_2 мало и характеризуется с помощью интеграла Мельникова [5]

$$I_M = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ H_2^0, \frac{H_2^1}{2\omega_2} \right\} dt = \frac{1}{2\omega_2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial H_2^0}{\partial I_1} \frac{\partial H_2^1}{\partial \theta_1} - \frac{\partial H_2^0}{\partial \theta_1} \frac{\partial H_2^1}{\partial I_1} \right) dt, \quad (40)$$

где $\{H_2^0, H_2^1/2\omega_2\}$ – скобка Пуассона от полученных из (39) гамильтонианов:

$$H_2^0 = 2\omega_2 I_2 + \frac{I_1^2}{2C} + \frac{\varepsilon J_1^{01} \cos \theta_1}{\gamma_0^2 (J_2^{01} - J_1^{01})}, \quad H_2^1 = -\frac{\varepsilon J_2^{01} \cos \theta_2}{\gamma_0^2 (J_2^{01} - J_1^{01})} + \frac{\varepsilon}{A^2} J_2^{01} J_1^{01} \cos(\theta_1 + \theta_2). \quad (41)$$

Учитывая (41), вычислим интеграл (40) вдоль невозмущенной сепаратрисы (38)

$$I_M = -\frac{\varepsilon J_2^{01} J_1^{01}}{2\omega_2 C A^2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{I}_1 \sin(\hat{\theta}_1 + \theta_2) dt = \mp \frac{\varepsilon J_2^{01} J_1^{01}}{\omega_2 A^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0^* \cos \frac{\hat{\theta}_1}{2} \sin(\hat{\theta}_1 + 2\omega_2 t + \theta_2^n) dt, \quad (42)$$

причем минус соответствует верхней ветви сепаратрисы, а плюс – нижней ветви, постоянная θ_2^n равна фазе θ_2 в момент n -го пересечения плоскости сечения Пуанкаре. Переходя в (42) к переменной $s = \omega_0^* t$ и учитывая, что вклад в интеграл дает только четная часть подинтегрального выражения, получим функцию Мельникова в виде

$$I_M(\theta_2^n) = \mp \frac{\varepsilon J_2^{01} J_1^{01} \sin(\theta_2^n)}{2\omega_2 A^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\cos\left(\frac{\hat{\theta}_1}{2} + \frac{2\omega_2 s}{\omega_0^*}\right) + \cos\left(\frac{3\hat{\theta}_1}{2} + \frac{2\omega_2 s}{\omega_0^*}\right) \right] ds.$$

Откуда следует

$$I_M(\theta_2^n) = \mp \frac{\varepsilon J_2^{01} J_1^{01} \sin(\theta_2^n)}{2\omega_2 A^2} [A_1(Q_0) + A_3(Q_0)], \quad (43)$$

причем функция

$$A_m(Q_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{m}{2}\hat{\theta}_1 - Q_0 s\right) ds, \quad Q_0 = -\frac{2\omega_2}{\omega_0^*}, \quad (44)$$

называется стандартным интегралом Мельникова-Арнольда ([6], с. 239). Основываясь на теории вычетов, при $Q_0 < 0$ найдем значения интеграла (44) для $m = 1$ и $m = 3$

$$A_1(Q_0) = -\frac{2\pi \exp(-\pi\omega_2/\omega_0^*)}{\text{sh}(2\pi\omega_2/\omega_0^*)}, \quad A_3(Q_0) = (2Q_0^2 - 1)A_1(Q_0),$$

тогда из (43) получим

$$I_M(\theta_2^n) = \mp \frac{4\pi AC \exp(-\pi\omega_2/\omega_0^*)}{\gamma_0(A - C)\text{sh}(2\pi\omega_2/\omega_0^*)} \sin(\theta_2^n). \quad (45)$$

Далее, следуя ([6], с. 241), введем новую переменную u по формуле

$$u = -1 - \frac{4\gamma_0(A - C)I_2}{\varepsilon(A - 2C)}. \quad (46)$$

Используя (46) и (45), запишем сепаратрисное отображение в виде

$$u_{n+1} = u_n - u_0 \sin \theta_2^n, \quad \theta_2^{n+1} = \theta_2^n + Q_0 \ln \frac{32}{|u_n|}, \quad \text{где } u_0 = \frac{16\pi AC \exp(-\pi\omega_2/\omega_0^*)}{(A - 2C)\text{sh}(2\pi\omega_2/\omega_0^*)}. \quad (47)$$

Сформулируем критерий Мельникова: если функция Мельникова имеет простые нули $I_M(\theta_2^n) = 0$, то в окрестности неустойчивой неподвижной точки существуют трансверсальные гомоклинические орбиты и область сложной хаотической динамики, для которой характерно наличие подковы Смейла. Заметим, что значение амплитуды при $\sin(\theta_2^n)$ в выражении (45) отлично от нуля при $A \neq 0$ и $C \neq 0$. Результаты п. 4 и п. 5 доказывают справедливость утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. При условии $\varepsilon > 0$ на сечении Пуанкаре Θ_2 решению Стеклова соответствует неустойчивая неподвижная точка $\theta_1 = \pi, I_1 = 0$ гамильтониана (37). Для резонансного слоя отображение последования в переменных (u, θ_2) имеет вид (47). В пространстве параметров $A, C, \Gamma, \varepsilon$, характеризующих решение Стеклова, функция Мельникова (45) имеет простые нули только в точках $\theta_2^n = 0, \pm\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$), поэтому в окрестности неустойчивой неподвижной точки всегда существуют трансверсальные гомоклинические орбиты и область сложной хаотической динамики, для которой характерно наличие подковы Смейла.

6. Симметричное решение. На основании проведенного в пунктах 2, 3 и 4 анализа сформулируем следующие утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Для малых значений $\varepsilon < 0$ существует симметричное периодическое решение, описываемое формулами (15), (16). На сечении Пуанкаре Θ_1 ему отвечает неустойчивая неподвижная точка $\theta_1 = \pi, I_1 = 0$ гамильтониана (26), а уравнения сепаратрисы заданы формулами (38). Функция Мельникова имеет вид

$$I_M(\theta_2^n) = \pm \frac{4\pi AC \exp(-\pi\omega_2/\omega_0^*)}{\gamma_0(A - C)\text{sh}(2\pi\omega_2/\omega_0^*)} \sin(\theta_2^n). \quad (48)$$

Введем новую переменную $u = -1 - 4\gamma_0 I_2(A - C)/(\varepsilon(2C - A))$, тогда сепаратрисное отображение таково:

$$u_{n+1} = u_n - u_0 \sin \theta_2^n, \quad \theta_2^{n+1} = \theta_2^n + Q_0 \ln \frac{32}{|u_n|}, \quad \text{где } u_0 = \frac{16\pi AC \exp(-\pi\omega_2/\omega_0^*)}{(A - 2C)\text{sh}(2\pi\omega_2/\omega_0^*)}. \quad (49)$$

В пространстве параметров $A, C, \Gamma, \varepsilon$, характеризующих симметричное решение, функция Мельникова (48) имеет простые нули только в точках $\theta_2^n = 0, \pm\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$), поэтому в окрестности неустойчивой неподвижной точки всегда существуют трансверсальные гомоклинические орбиты и область сложной хаотической динамики, для которой характерно наличие подковы Смейла.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Для малых значений $\varepsilon > 0$ существует симметричное решение, описываемое формулами (34). На сечении Пуанкаре Θ_2 ему соответствует устойчивая неподвижная точка $\theta_1 = 0, I_1 = 0$ гамильтониана (37). Для малой окрестности симметричного решения на сечении Пуанкаре $\varphi = 0$ отображение последования в переменных

Андуайе-Депри имеет вид

$$\begin{aligned}
 l_n &= (l_{n-1} + \frac{\pi}{2}) \cos(\omega_0^* t_{n-1}) + \frac{L_{n-1} - \Phi^{n-1} + 2J_1^{02}}{2\omega_0^*} \sin(\omega_0^* t_{n-1}), \\
 L_n &= J_1^{02} + J_2^{02} - (l_{n-1} + \frac{\pi}{2})\omega_0^* \sin(\omega_0^* t_{n-1}) + \frac{L_{n-1} - \Phi^{n-1} + 2J_1^{02}}{2} \cos(\omega_0^* t_{n-1}), \\
 \Phi^n &= J_2^{02} - J_1^{02} + (l_{n-1} + \frac{\pi}{2})\omega_0^* \sin(\omega_0^* t_{n-1}) - \frac{L_{n-1} - \Phi^{n-1} + 2J_1^{02}}{2} \cos(\omega_0^* t_{n-1}),
 \end{aligned} \tag{50}$$

где индекс n отвечает моменту времени t_n , а $J_1^{02}, J_2^{02}, \omega_0^*$ вычислены согласно (36),(38).

7. Заключительные выводы. Итак, в рассмотренном предельном случае решению Стеклова отвечает резонансный тор невозмущенной задачи с отношением частот $\omega_1/\omega_2 = 1$. Под действием малого возмущения этот тор разрушается и остаются два периодических решения – решение Стеклова и симметричное решение. В случае $\varepsilon < 0$ на сечении Пуанкаре Θ_1 решению Стеклова соответствует устойчивая неподвижная точка $\theta_1 = 0$ гамильтониана (26), в ее малой окрестности отображение последования имеет вид (30). Симметричному решению соответствует неустойчивая неподвижная точка $\theta_1 = \pi$, для резонансного слоя сепаратрисное отображение определяется формулами (49). В случае $\varepsilon > 0$ на сечении Пуанкаре Θ_2 симметричному решению соответствует устойчивая неподвижная точка $\theta_1 = 0$ гамильтониана (37) и в ее малой окрестности отображение последования представлено в виде (50). Решению Стеклова соответствует неустойчивая неподвижная точка $\theta_1 = \pi$, для резонансного слоя сепаратрисное отображение описывается формулами (47). При $|\varepsilon| \ll 1$ в малой окрестности неустойчивой неподвижной точки, согласно критерию Мельникова, всегда существуют трансверсальные гомоклинические орбиты и область сложной хаотической динамики; а малые колебания в окрестности устойчивой неподвижной точки происходят с одинаковой частотой ω_0^* , которая принимает малые значения (см. (38)), если величина C не является бесконечно малой одного порядка по сравнению с $|\varepsilon|$.

Автор благодарит И.Н.Гашененко за постановку задачи и внимание к работе.

1. *Стежлов В.А.* Новое частное решение дифференциальных уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Тр. Отд. физ. наук О-ва любителей естествознания. – 1899. – 10, Вып. 1. – С.1-3.
2. *Харламова Е.И., Мозалевская Г.В.* Исследование решения В.А. Стеклова уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку // Мат. физика. – 1968. – Вып. 5. – С. 194-202.
3. *Кучер Е.Ю.* Характеристические показатели периодических решений Стеклова и Чаплыгина // Механика твердого тела. – 2003. – Вып. 33. – С. 33-39.
4. *Маркеев А.П.* Конструктивный способ исследования устойчивости гамильтоновых систем и его приложение в некоторых задачах классической и небесной механики // 5-й Междунар. симпозиум по классической и небесной механике (Великие Луки, 23-28 августа 2004г.): Тез. докл. – Москва; Великие Луки: Выч. центр РАН, 2004. – С. 134-135.
5. *Мельников В.К.* Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // Тр. моск. мат. общества. – 1963. – Т. 12. – С. 1-50.
6. *Лизттенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. – М.: Мир. – 1984. – 528 с.
7. *Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.M.* Chaotic motions and transition to stochasticity in the classical problem of the heavy rigid body with a fixed point // Nuovo cimento. – 1981. – V. 61B, A. 127, S. 11. – С. 1-20.