ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2004. Вып. 34

УДК 531.38

©2004. **А.М. Ковалев, Д.А. Данилюк**

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В ПАРАМЕТРАХ РОДРИГА-ГАМИЛЬТОНА

Получена функция Гамильтона движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, когда в качестве обобщенных координат приняты три из четырех параметров Родрига-Гамильтона, и построено ее разложение в окрестности нижнего положения равновесия. В случае, когда центр масс тела принадлежит главной оси, с помощью преобразования Биркгофа получено нелинейное приближение нормальных колебаний с точностью до членов четвертого порядка.

Движение тяжелого твердого тела в окрестности нижнего положения равновесия привлекает внимание исследователей потому, что оно, наряду с равномерными вращениями, дает представление о движении тела при произвольном распределении масс. Основными методами исследования являются методы теории колебаний и асимптотические методы. Нелинейным колебаниям твердого тела около устойчивого положения равновесия в общих предположениях посвящена работа [1], в которой использован метод последовательных приближений и указана схема их получения. Рассмотрены резонансы и вопросы сходимости предложенного варианта последовательных приближений. В работе [2] методом нормальных форм изучены колебания около нижнего положения равновесия приведенной системы, соответствующей функции Гамильтона твердого тела с неподвижной точкой, в которой положено $p_\psi = 0$ (p_ψ– циклический импульс). Построенное решение с точностью до членов четвертого порядка описывает условно-периодические движения приведенной системы, которые всюду плотно заполняют некоторую окрестность положения равновесия.

В работе [3] для исследования нормальных колебаний предложено использовать параметры Родрига-Гамильтона. Благодаря специальному введению неподвижной системы координат получено простое выражение потенциальной энергии, что позволило установить связь нормальных колебаний с движениями физического маятника и равномерными вращениями. Изучено расположение осей нормальных колебаний в теле в зависимости от значений моментов инерции и положения центра масс. Настоящая работа продолжает исследование [3]. Получена функция Гамильтона, когда в качестве обобщенных координат приняты три из четырех параметров Родрига-Гамильтона, и построено ее разложение в окрестности нижнего положения равновесия. В случае, когда центр масс тела принадлежит главной оси, с помощью преобразования Биркгофа [4] построено нелинейное приближение нормальных колебаний с точностью до членов четвертого порядка. Анализ осложняется тем, что в рассматриваемом случае для линейной системы имеется двойной нулевой корень с непростыми элементарными делителями.

1. Функция Гамильтона. Изучим нелинейные колебания твердого тела около нижнего положения равновесия. В качестве подвижной системы координат выберем главные оси инерции с началом в неподвижной точке. Обозначим через A_1, A_2, A_3 главные моменты инерции; ω_i, ν_i, e_i $(i = 1, 2, 3)$ – проекции на подвижные оси вектора угловой скорости ω, единичного вектора вертикали ν, направленного вверх, и единичного вектора $\mathbf{e}$, идущего из неподвижной точки в центр масс тела, Γ – произведение веса тела и расстояния до центра масс. Следуя работе [3], в качестве неподвижной системы выберем декартову систему координат с центром в неподвижной точке, совпадающую в начальный момент с главными осями твердого тела, то есть $\nu_i' = -e_i$, где ν_i' – проекции вектора ν на неподвижные оси. Для описания движения твердого тела выберем параметры Родрига-Гамильтона $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. В качестве обобщенных координат примем $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, а параметр λ_0 определим из равенства

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1. \tag{1}$$

Для потенциальной энергии получено следующее выражение [3]

$$\Pi = 2\Gamma\big[\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3)^2\big]. \tag{2}$$

Для кинетической энергии воспользуемся стандартным представлением

$$2T = A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2, \tag{3}$$

где величины ω_i выражаются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= 2(\lambda_0\dot\lambda_1 - \lambda_1\dot\lambda_0 + \lambda_3\dot\lambda_2 - \lambda_2\dot\lambda_3),\\
\omega_2 &= 2(\lambda_0\dot\lambda_2 - \lambda_2\dot\lambda_0 + \lambda_1\dot\lambda_3 - \lambda_3\dot\lambda_1),\\
\omega_3 &= 2(\lambda_0\dot\lambda_3 - \lambda_3\dot\lambda_0 + \lambda_2\dot\lambda_1 - \lambda_1\dot\lambda_2).
\end{aligned}$$

Выражение для функции Гамильтона получим из формулы $H = T + \Pi$, в которую вместо величин ω_i надо подставить их выражения через обобщенные импульсы

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot\lambda_i}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{4}$$

При этом во всех формулах величины $\lambda_0, \dot\lambda_0$ следует выражать через $\lambda_i, \dot\lambda_i \quad (i = 1, 2, 3)$ с помощью равенства (1) и следующего из него уравнения

$$\lambda_0\dot\lambda_0 + \lambda_1\dot\lambda_1 + \lambda_2\dot\lambda_2 + \lambda_3\dot\lambda_3 = 0.$$

С помощью формул (4) получаем выражения для импульсов

$$\begin{aligned}
\lambda_0 p_1 &= 2(\lambda_0^2 + \lambda_1^2)A_1\omega_1 + 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3\lambda_0)A_2\omega_2 + 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_0)A_3\omega_3,\\
\lambda_0 p_2 &= 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_3\lambda_0)A_1\omega_1 + 2(\lambda_0^2 + \lambda_2^2)A_2\omega_2 + 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_0)A_3\omega_3,\\
\lambda_0 p_3 &= 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_2\lambda_0)A_1\omega_1 + 2(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_0)A_2\omega_2 + 2(\lambda_0^2 + \lambda_3^2)A_3\omega_3.
\end{aligned} \tag{5}$$

Решая уравнения (5), находим зависимость угловых скоростей от импульсов

$$\begin{aligned}
2A_1\omega_1 &= \lambda_0 p_1 + \lambda_3 p_2 - \lambda_2 p_3,\\
2A_2\omega_2 &= \lambda_0 p_2 + \lambda_1 p_3 - \lambda_3 p_1,\\
2A_3\omega_3 &= \lambda_0 p_3 + \lambda_2 p_1 - \lambda_1 p_2.
\end{aligned} \tag{6}$$

С использованием формул (2), (3), (6) получаем следующее выражение для функции Гамильтона

$$H=\frac{1}{8}\Big[\frac{1}{A_1}(\lambda_0p_1+\lambda_3p_2-\lambda_2p_3)^2+\frac{1}{A_2}(\lambda_0p_2+\lambda_1p_3-\lambda_3p_1)^2+$$

$$+\frac{1}{A_3}(\lambda_0p_3+\lambda_2p_1-\lambda_1p_2)^2\Big]+2\Gamma\big[\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2-(\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3)^2\big]. \qquad (7)$$

2. Разложение функции Гамильтона. Как показано в работе [3], нижнему положению равновесия соответствуют нулевые значения λ_i,ω_i $(i=1,2,3)$ и, как следует из формул (5), нулевые значения импульсов p_i $(i=1,2,3)$. Поэтому функция (7) описывает возмущенное движение твердого тела в окрестности нижнего положения равновесия. Для получения разложения функции Гамильтона воспользуемся формулами

$$\lambda_0^2=1-\lambda_1^2-\lambda_2^2-\lambda_3^2,$$

$$\lambda_0=(1-\lambda_1^2-\lambda_2^2-\lambda_3^2)^{1/2}=1-\frac{1}{2}(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)-\frac{1}{8}(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)^2-\dots\ .$$

Для функции Гамильтона получаем разложение

$$H=H_2+H_3+H_4+H_\infty, \qquad (8)$$

$$H_2=\frac{1}{8}\Big(\frac{p_1^2}{A_1}+\frac{p_2^2}{A_2}+\frac{p_3^2}{A_3}\Big)+2\Gamma\big[\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2-(\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3)^2\big],$$

$$H_3=\frac{1}{4}\Big[\frac{p_1}{A_1}(\lambda_3p_2-\lambda_2p_3)+\frac{p_2}{A_2}(\lambda_1p_3-\lambda_3p_1)+\frac{p_3}{A_3}(\lambda_2p_1-\lambda_1p_2)\Big],$$

$$H_4=\frac{1}{8}\Big[\frac{1}{A_1}(\lambda_3p_2-\lambda_2p_3)^2+\frac{1}{A_2}(\lambda_1p_3-\lambda_3p_1)^2+\frac{1}{A_3}(\lambda_2p_1-\lambda_1p_2)^2-$$

$$-(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)\Big(\frac{p_1^2}{A_1}+\frac{p_2^2}{A_2}+\frac{p_3^2}{A_3}\Big)\Big],$$

$$H_\infty=\frac{1}{4}\Big[\frac{p_1}{A_1}(\lambda_3p_2-\lambda_2p_3)+\frac{p_2}{A_2}(\lambda_1p_3-\lambda_3p_1)+\frac{p_3}{A_3}(\lambda_2p_1-\lambda_1p_2)\Big]\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^kC_{1/2}^k(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)^k.$$

Отметим, что гамильтониан (8) упрощается, когда центр масс лежит на главной оси: $e_1=1,e_2=e_3=0$. Хотя в гамильтониане (8) изменяется только квадратичная часть, но существенно, что она принимает канонический вид

$$H_2=\frac{1}{8}\Big(\frac{p_1^2}{A_1}+\frac{p_2^2}{A_2}+\frac{p_3^2}{A_3}\Big)+2\Gamma(\lambda_2^2+\lambda_3^2). \qquad (9)$$

Именно этот случай и является предметом дальнейшего исследования.

Замена

$$Q_1=2\sqrt{A_1}\ \lambda_1,\qquad Q_2=2\sqrt[4]{\Gamma A_2}\ \lambda_2,\qquad Q_3=2\sqrt[4]{\Gamma A_3}\ \lambda_3,$$

$$P_1=\frac{p_1}{2\sqrt{A_1}},\qquad P_2=\frac{p_2}{2\sqrt[4]{\Gamma A_2}},\qquad P_3=\frac{p_3}{2\sqrt[4]{\Gamma A_3}}$$

приводит квадратичную форму (9) к нормальному виду

$$H_2 = \frac{1}{2}\big[P_1^2 + n_2(P_2^2 + Q_2^2) + n_3(P_3^2 + Q_3^2)\big],$$

где $n_2 = \sqrt{\Gamma/A_2},\ n_3 = \sqrt{\Gamma/A_3}$.

Для дальнейшего упрощения функции (8) с помощью преобразования Биркгофа [4] удобно ввести комплексные переменные

$$x_1 = Q_1, \qquad y_1 = 2iP_1, \qquad x_k = Q_k - iP_k, \qquad y_k = Q_k + iP_k, \quad k = 2,3. \tag{10}$$

В новых переменных функция Гамильтона принимает вид

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots\ , \tag{11}$$

$$H_2 = i\big(-\frac{y_1^2}{4} + n_2x_2y_2 + n_3x_3y_3\big),$$

$$H_3 = \frac{i}{8n_1\sqrt{\Gamma n_2 n_3}}\big[2n_1^2(n_3^2 - n_2^2)x_1(y_2 - x_2)(y_3 - x_3) +$$

$$+ n_2(n_1^2 - n_3^2)y_1(x_2 + y_2)(y_3 - x_3) + n_3(n_2^2 - n_1^2)y_1(x_3 + y_3)(y_2 - x_2)\big],$$

$$H_4 = \frac{i}{2^6\Gamma n_1^2 n_2 n_3}\Big\{4n_1^4x_1^2\big[(n_2^2 - n_3^2)\big(n_3(x_2 - y_2)^2 - n_2(x_3 - y_3)^2\big) +$$

$$+ n_2n_3y_1^2\big] - 4n_1^2n_2n_3x_1y_1\big[n_2^2(x_3^2 - y_3^2) + n_3^2(x_2^2 - y_2^2)\big] -$$

$$- n_2n_3y_1^2\big[n_2(n_3^2 - n_1^2)(x_2 + y_2)^2 + n_3(n_2^2 - n_1^2)(x_3 + y_3)^2\big] -$$

$$- n_1^2n_2^2(n_1^2 - n_3^2)(x_2 + y_2)^2(x_3 - y_3)^2 - n_1^2n_3^2(n_1^2 - n_2^2)(x_3 + y_3)^2(x_2 - y_2)^2 +$$

$$+ n_1^2n_2n_3\big[n_2^2(x_2^2 - y_2^2)^2 + n_3^2(x_3 - y_3)^2 + 2n_1^2(x_2^2 - y_2^2)(x_3^2 - y_3^2)\big]\Big\},$$

здесь $n_1 = \sqrt{\Gamma/A_1}$.

3. Преобразование формы H_3. Преобразование функции Гамильтона (11) к нормальной форме в членах третьего и четвертого порядков будем проводить в два этапа. На первом этапе укажем каноническое преобразование переменных $x_k, y_k \to u_k, v_k$, при котором функция Гамильтона $\widetilde{H}(u,v)$ не содержит членов третьего порядка кроме резонансных. Соответствующее преобразование Биркгофа задается производящей функцией

$$S_3 = \sum_{|\alpha|=3} S_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_2\beta_3} x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}v_1^{\beta_1}v_2^{\beta_2}v_3^{\beta_3} \tag{12}$$

и имеет вид

$$u_k = x_k + \frac{\partial S_3}{\partial v_k}, \qquad y_k = v_k + \frac{\partial S_3}{\partial x_k}. \tag{13}$$

Здесь $\alpha_i \ge 0,\ \beta_i \ge 0,\ |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$.

Для проведения вычислений с функцией H с точностью до членов четвертого порядка запишем преобразование (13) с точностью до членов третьего порядка

$$
\begin{aligned}
x_k &= u_k - \frac{\partial S_3(u,v)}{\partial v_k} + \sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{\partial^2 S_3(u,v)}{\partial u_i \partial v_k}\frac{\partial S_3(u,v)}{\partial v_i} + \frac{\partial^2 S_3(u,v)}{\partial v_i \partial v_k}\frac{\partial S_3(u,v)}{\partial u_i}\Big),\\
y_k &= v_k + \frac{\partial S_3(u,v)}{\partial u_k} - \sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{\partial^2 S_3(u,v)}{\partial u_k \partial u_i}\frac{\partial S_3(u,v)}{\partial v_i} + \frac{\partial^2 S_3(u,v)}{\partial u_k \partial v_i}\frac{\partial S_3(u,v)}{\partial u_i}\Big).
\end{aligned} \tag{14}
$$

Переходя к новым переменным по формулам (14) и находя коэффициенты формы (12) из условия $\widetilde{H}_3(u,v) = 0$, получаем следующее выражение для преобразованной функции Гамильтона

$$
\widetilde{H}(u,v) = H_2(u,v) + \widetilde{H}_3(u,v) + \widetilde{H}_4(u,v) + \dots ,
$$

где

$$
\widetilde{H}_3(u,v) = iu_1(h_{300000}u_1^2 + h_{110010}u_2v_2 + h_{101001}u_3v_3). \tag{15}
$$

Здесь $h_{\alpha\beta}$ совпадают с коэффициентами формы $\widetilde{H}_3(u,v)$, определяемыми формулами (11). Подставляя эти значения в формулу (15), находим, что в рассматриваемом случае $\widetilde{H}_3(u,v) \equiv 0$. Полное выражение формы $\widetilde{H}_4(u,v)$ не выписываем. В следующем пункте будут приведены только коэффициенты преобразованной формы $\widetilde{\widetilde{H}}_4(z,w)$ после очередного этапа.

4. Нормализация формы $\widetilde{H}_4$. Для нормализации формы $\widetilde{H}_4$ преобразование Биркгофа $u,v \to z,w$ задаем в форме

$$
u_k = z_k - \frac{\partial S_4(z,w)}{\partial w_k}, \qquad v_k = w_k + \frac{\partial S_4(z,w)}{\partial z_k}. \tag{16}
$$

Нормализованная функция Гамильтона имеет вид

$$
\widetilde{\widetilde{H}}(z,w) = H_2(z,w) + \widetilde{\widetilde{H}}_4(z,w) + \dots \ ,
$$

где

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\widetilde{H}}_4(z,w) = h_{400000}z_1^4 + h_{210010}z_1^2z_2w_2 + h_{201001}z_1^2z_3w_3 + \\
+ h_{020020}z_2^2w_2^2 + h_{002002}z_3^2w_3^2 + h_{011011}z_2w_2z_3w_3.
\end{aligned}
$$

Выполняя преобразования (14), (16), находим, что в рассматриваемом случае $h_{400000} = 0$, $h_{020020} = 0$, $h_{002002} = 0$. Для оставшихся коэффициентов получаем следующие выражения:

$$
\begin{aligned}
h_{210010} &= 2i\alpha = \frac{in_1^2(3n_2^2 - n_3^2)}{8\Gamma n_2},\\
h_{201001} &= 2i\beta = \frac{in_1^2(3n_3^2 - n_2^2)}{8\Gamma n_3},\\
h_{011011} &= 2i\gamma = -\frac{i(2n_1^2 + n_2n_3)(n_2 - n_3)^2 + 2n_1^2n_2n_3}{8\Gamma n_2 n_3}.
\end{aligned}
$$

5. Нелинейные нормальные колебания. Возвращаясь к действительным переменным $q_i, p_i \ \ (i = 1,2,3)$, аналогично формулам (12), и делая дополнительное преобразование

$$
q_1 = q, \qquad p_1 = p, \qquad q_j = \sqrt{2r_j}\ \sin\varphi_j, \qquad p_j = \sqrt{2r_j}\ \cos\varphi_j, \quad j = 2,3, \tag{17}
$$

для функции Гамильтона с точностью до членов четвертого порядка получаем выражение

$$H = \frac{p^2}{2} + n_2 r_2 + n_3 r_3 + q^2(\alpha r_2 + \beta r_3) + \gamma r_2 r_3.$$

Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} &\dot{q} = p, \qquad \dot{p} = -2q(\alpha r_2 + \beta r_3), \\ &\dot{\varphi}_2 = n_2 + \alpha q^2 + \gamma r_3, \qquad \dot{r}_2 = 0, \\ &\dot{\varphi}_3 = n_3 + \beta q^2 + \gamma r_2, \qquad \dot{r}_3 = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Уравнения (18) допускают интегралы $r_2 = r_{20} = \text{const}$, $r_3 = r_{30} = \text{const}$. С их помощью первые два уравнения (18) преобразуются в систему двух линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{q} = p, \qquad \dot{p} = -2(\alpha r_{20} + \beta r_{30})q.$$

Обозначим $\mu = \sqrt{2|\alpha r_{20} + \beta r_{30}|}$. В зависимости от знака величины $(\alpha r_{20} + \beta r_{30})$ решение системы (18) имеет различный вид.

5.1. $\alpha r_{20} + \beta r_{30} > 0$**.** Решение системы (18) таково

$$q = c_1 \sin(\mu t + c_2), \qquad p = \mu c_1 \cos(\mu t + c_2),$$

$$\varphi_2 = (n_2 + \gamma r_{30} + \frac{1}{2}\alpha c_1^2)t - \frac{1}{4}\alpha c_1^2 \sin 2(\mu t + c_2) + \varphi_{20}, \qquad r_2 = r_{20},$$

$$\varphi_3 = (n_3 + \gamma r_{20} + \frac{1}{2}\beta c_1^2)t - \frac{1}{4}\beta c_1^2 \sin 2(\mu t + c_2) + \varphi_{30}, \qquad r_3 = r_{30}.$$

5.2. $\alpha r_{20} + \beta r_{30} < 0$**.** Решение системы (18) таково

$$q = c_1 e^{\mu t} + c_2 e^{-\mu t}, \qquad p = \mu(c_1 e^{\mu t} - c_2 e^{-\mu t}),$$

$$\varphi_2 = \frac{\alpha}{2\mu}(c_1^2 e^{2\mu t} - c_2^2 e^{-2\mu t}) + (n_2 + \gamma r_{30} + 2\alpha c_1 c_2)t + \varphi_{20}, \qquad r_2 = r_{20},$$

$$\varphi_3 = \frac{\beta}{2\mu}(c_1^2 e^{2\mu t} - c_2^2 e^{-2\mu t}) + (n_3 + \gamma r_{20} + 2\beta c_1 c_2)t + \varphi_{30}, \qquad r_3 = r_{30}.$$

В соответствии с формулами (17) получаем описание нелинейных нормальных колебаний в переменных $q_i,\ p_i\ \ (i = 1, 2, 3)$. Из полученных формул заключаем, что колебания приобрели довольно сложный характер и существенно различаются для случаев 5.1, 5.2. В случае 5.1 движение сохранило некоторую периодичность, а в случае 5.2, благодаря наличию экспоненциальных членов, движение стало неустойчивым.

1. *Старжинский В.М.* Колебания тяжелого твердого тела с закрепленной точкой около нижнего положения равновесия в общем случае // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – № 4. – С. 121-128.
2. *Илюхин А.А., Ковалев А.М.* Нормальные колебания твердого тела около положения устойчивого равновесия // Механика твердого тела. – 1976. – Вып. 8. – С. 65-71.
3. *Ковалев А.М., Данилюк Д.А.* Линейные нормальные колебания твердого тела в параметрах Родрига-Гамильтона // Там же. – 2003. – Вып. 33. – С.3-9.
4. *Биркгоф Дж.Д.* Динамические системы. – М.; Л.: Гостехиздат, 1941. – 320 с.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
kovalev@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 25.10.2004