**ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2004. Вып. 34**

УДК 531.36; 531.38

©2004. **В.Н. Тхай**

# О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЯХ СИММЕТРИЧНОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ[1]

Показано, что симметричные периодические движения (СПД) в задаче Эйлера с центром тяжести тела в главной плоскости инерции всегда допускают пару простых нулевых характеристических показателей (ХП), пару нулевых ХП с жордановой клеткой и два ХП противоположного знака. Установлено, что такие ХП в общем случае обеспечивают принадлежность СПД к двухпараметрическому семейству, а также – отсутствие дополнительного гладкого интеграла.

**Введение.** Движение тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой описывается уравнениями Эйлера-Пуассона

$$\begin{aligned} A\dot{p} &= (B-C)qr + P(z_0\gamma_2 - y_0\gamma_3), & \dot{\gamma}_1 &= \gamma_2 r - \gamma_3 q, \\ B\dot{q} &= (C-A)rp + P(x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1), & \dot{\gamma}_2 &= \gamma_3 p - \gamma_1 r, \\ C\dot{r} &= (A-B)pq + P(y_0\gamma_1 - x_0\gamma_2), & \dot{\gamma}_3 &= \gamma_1 q - \gamma_2 p \end{aligned} \tag{1}$$

($A, B, C$ – главные моменты инерции тела, $P$ – вес тела, $x_0, y_0, z_0$ – координаты центра тяжести, $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$ – угловая скорость, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ – единичный вектор вертикали, направленный вверх).

Система (1) допускает классические интегралы

$$\begin{aligned} V_1 &= Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2P(x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\gamma_3) = 2h(\mathrm{const}), \\ V_2 &= Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = \sigma(\mathrm{const}), \\ V_3 &= \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \end{aligned}$$

Характерной особенностью системы (1) является ее инвариантность относительно замены $G : (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}, t) \to (-\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}, -t)$. Значит, система (1) принадлежит [1] к классу обратимых механических систем с неподвижным множеством $M = \{\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma} : \boldsymbol{\omega} = 0\}$. Интегралы $V_{1,3}$ симметричны относительно $M$, то есть

$$V_{1,3}(-p, -q, -r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = V_{1,3}(p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3),$$

а для интеграла $V_2$ имеем

$$V_2(-p, -q, -r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = -V_2(p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3).$$

В случае расположения центра тяжести в главной плоскости эллипсоида инерции ($y_0 = 0$) система (1) также инвариантна относительно замены

$$G_y : (p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, t) \to (p, -q, r, \gamma_1, -\gamma_2, \gamma_3, -t),$$

[1] В статье изложен фрагмент лекции, прочитанной на конференции "Классические задачи динамики твердого тела", посвященной 80-летию П.В. Харламова.

то есть допускает второе неподвижное множество

$$M_y = \{p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : q = 0, \gamma_2 = 0\}.$$

В этом случае все классические интегралы становятся симметричными

$$V_j(p, -q, r, \gamma_1, -\gamma_2, \gamma_3) = V_j(p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3).$$

Случаю $y_0 = 0$ принадлежат [2] почти все известные точные решения задачи Эйлера, кроме перманентных вращений. Так к симметричным, относительно множества $M_y$, относятся, например, маятниковые движения, прецессии Гриоли и др.

ХП периодических решений системы (1) вычислялись в работах [3-12]. Отмечалось наличие не менее четырех нулевых ХП из шести [3,4], для прецессий Гриоли указывалось [5,6] наличие трех групп решений, отвечающих нулевым ХП.

**1. Характеристические показатели для СПД обратимой механической системы.** Обратимая механическая система имеет вид [13]

$$\begin{aligned} &\dot{u} = U(u, v), \quad \dot{v} = V(u, v); \quad u \in R^{\,l}, \ v \in R^{\,n} \quad (l \geq n), \\ &U(u, -v) = -U(u, v), \quad V(u, -v) = V(u, v). \end{aligned} \tag{2}$$

Множество $M_* = \{u, v : v = 0\}$ называется неподвижным множеством системы (2). Первый интеграл $V(u, v) = \mathrm{const}$, удовлетворяющий условию

$$V(u, -v) = V(u, v), \tag{3}$$

называется симметричным.

Движение $u = u(t), \ v = v(t)$ системы (2), пересекающее неподвижное множество $M_*$ в некоторый момент $t_*$, называется симметричным. На таком движении $v(t_*) = 0$. Симметричное периодическое движение (СПД) пересекает множество $M_*$ по крайней мере дважды и задается периодическими функциями времени $t$: четной – $u = \varphi(t)$ и нечетной – $v = \psi(t)$.

Аналогичные понятия вводятся для системы (2), периодической по всем или части компонент вектора $v$.

Составим уравнения в вариациях для СПД :

$$\begin{aligned} &\delta\dot{u} = A_-(t)\delta u + A_+(t)\delta v, \quad \delta\dot{v} = B_+(t)\delta u + B_-(t)\delta v, \\ &\delta u \in R^{\,l}, \quad \delta v \in R^{\,n}. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь и всюду ниже индексом плюс (минус) обозначены матричные, векторные и скалярные четные (нечетные) функции; период функций $A_\pm(t), B_\pm(t)$ положим равным $2\pi$.

Метод вычисления характеристических показателей (ХП) разработан в [5]. Если фундаментальная матрица решений системы (4) записана в виде [14]

$$S(t) = \begin{vmatrix} \delta u^+(t) & \delta u^-(t) \\ \delta v^-(t) & \delta v^+(t) \end{vmatrix}, \qquad S(0) = I_{l+n}$$

($I_j$ – единичная $j$-матрица), то справедлива теорема.

Теорема 1. [5]. Система (4) всегда имеет $l-n$ простых ХП. Остальные ХП разбиваются на пары $\pm\varkappa$ и определяются по формулам

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Arch}\alpha, \quad \det(\delta v^{+}(2\pi) - \alpha I_n) = 0. \tag{5}$$

Существование $l-n$ простых ХП следует из того, что $\mathrm{rank}\ \delta v^{-}(\pi) \le n$, а в результате элементарного преобразования $l-n$ столбцов матрицы $\delta v^{-}(\pi)$ можно полагать нулевыми. Значит, $l-n$ решений начинаются при $t=0$ на неподвижном множестве $M_1 = \{\delta u, \delta v : \delta v = 0\}$, $\delta u \neq 0$ и достигают этого множества в момент, равный $\pi$ ($\delta v(\pi) = 0$). Такие решения представляют СПД.

Подобные $2\pi$-периодические движения

$$x = x^{+}(t), \quad y = y^{-}(t) \tag{6}$$

имеет также и сопряженная к (4) система. Поэтому, используя решения (6), найдем не меньше $l-n$ симметричных интегралов

$$W = x_1^{+}(t)\delta u_1 + \ldots + x_l^{+}\delta u_l + y_1^{-}(t)\delta v_1 + \ldots + y_n^{-}\delta v_n = \mathrm{const} \tag{7}$$

системы (1). Эти интегралы позволяют "уравнять" размерности векторов $\delta u$ и $\delta v$ в (4).

Укажем, что приведение системы (4) к системе с постоянными коэффициентами осуществляется посредством замены вида

$$\begin{aligned} \xi_j &= \alpha_{j1}^{+}(t)\delta u_1 + \ldots + \alpha_{jl}^{+}(t)\delta u_l + \beta_{j1}^{-}(t)\delta v_1 + \ldots + \beta_{jn}^{-}(t)\delta v_n, \quad j = 1, \ldots, l; \\ \eta_k &= \alpha_{k1}^{-}(t)\delta u_1 + \ldots + \alpha_{kl}^{-}(t)\delta u_l + \beta_{k1}^{+}(t)\delta v_1 + \ldots + \beta_{kn}^{+}\delta v_n, \quad k = 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{8}$$

с переходом $M_1$ в неподвижное множество $\{\xi, \eta : \eta = 0\}$.

Выводы получены для линейной обратимой системы (4) без связи с СПД конкретной системы (2).

По теореме Пуанкаре [15] уравнения в вариациях (4) для периодического решения системы (2) обязательно имеют еще один ХП, в дополнение к $l-n$ простым нулевым ХП. В силу обратимости системы (4) таких нулевых ХП два. Выясним количество групп решений, отвечающих этим показателям.

Для СПД системы (2) уравнения (4) допускают периодическое решение

$$\delta u = \dot\varphi(t), \quad \delta v = \dot\psi(t); \quad \dot\varphi(-t) = -\dot\varphi(t), \quad \dot\psi(-t) = \dot\psi(t) \tag{9}$$

Оно симметрично относительно множества $M_2 = \{\delta u, \delta v : \delta u = 0\}$. Множество $M_2$ при преобразованиях (8) переходит в $\{\xi, \eta : \xi = 0\}$. Поэтому пара переменных $\xi, \eta$, отвечающая нулевому решению, дает уравнения

$$\dot\xi = 0, \quad \dot\eta = \xi$$

с периодическим решением: $\xi = 0, \eta = 1$. Отсюда получаем одну группу решений для двух нулевых ХП. Другой вывод заключается в существовании еще одного интеграла вида (7) и интеграла

$$tW(\delta u, \delta v, t) + x_1^{-}(t)\delta u_1 + \ldots + x_l^{-}(t)\delta u_l + y_1^{+}(t)\delta v_1 + \ldots + y_n^{+}(t)\delta v_n = \mathrm{const} \tag{10}$$

Теорема 2. Уравнения в вариациях для СПД обратимой механической системы (2), помимо $l-n$ простых нулевых ХП, имеют еще пару нулевых ХП с жордановой клеткой.

Замечание. Наличие жордановой клетки является правилом. Вырождение приводит к паре простых ХП.

Предположим теперь, что обратимая механическая система (2) допускает симметричный интеграл (3). В окрестности СПД линейная часть этого интеграла имеет вид

$$\alpha^+(t)\delta u + \beta^-(t)\delta v, \quad \alpha^+(t) = \left.\frac{\partial V}{\partial u}\right|_*, \quad \beta^-(t) = \left.\frac{\partial V}{\partial v}\right|_* \tag{11}$$

(звездочка означает подстановку в производные функций $u = \varphi(t), v = \psi(t)$). Сравнение (11) с интегралом (7) приводит к следующему выводу.

Теорема 3. Если обратимая механическая система (2) допускает СПД и уравнения в вариациях (4) для этого СПД имеют только $l-n+2$ нулевых ХП, то система (2) может допускать не более $l-n+1$ гладких симметричных интегралов.

Последний вопрос, который примыкает к расмотренным, это проблема принадлежности данного СПД к семейству СПД. Оказывается, СПД всегда образуют семейства.

Запишем необходимые и достаточные условия существования СПД в виде [16]

$$v(u^0, 0, T) = 0$$

($u^0$ – начальная точка на $M$, $T$ – полупериод СПД).

Это уравнение имеет решение: $u^0 = u^* = \varphi(0),\ T = \pi$. Следовательно, использование теоремы о неявной функции позволяет получить условие

$$\operatorname{rank}\left|\frac{\partial v(u^*, 0, \pi)}{\partial u^0}, \frac{\partial v(u^*, 0, \pi)}{\partial T}\right| = n \tag{13}$$

существования $(l-n+1)$–семейства.

Частные производные в (13) удовлетворяют уравнениям в вариациях (4). Поэтому условие (13) эквивалентно наличию $l-n$ простых нулевых ХП плюс одна пара нулевых ХП, которая содержит или жорданову клетку, или простые ХП.

Теорема 4. Всякое СПД обратимой механической системы (2) принадлежит $(l-n+1)$-семейству, если уравнения в вариациях (4) не имеют дополнительных к $(l-n+2)$ нулевых ХП.

**2. Движение тяжелого твердого тела, когда центр тяжести находится в главной плоскости инерции.** В случае $y_0 = 0$ уравнения Эйлера–Пуассона (1) можно записать в виде обратимой системы (2) с $l = 4,\ n = 2$ и векторами $u = (p, q, \gamma_1, \gamma_3)^T$, $v = (q, \gamma_2)^T$; $T$ – транспонирование. Классические интегралы становятся симметричными относительно неподвижного множества $M_y$. В окрестности любого СПД линейное приближение интегралов имеет вид (7).

Теорема 5. В случае $y_0 = 0$ любое СПД задачи имеет два простых нулевых ХП, два нулевых ХП, образующих жорданову клетку, а оставшиеся два ХП вычисляются построением только двух решений задачи Коши.

Данный вывод следует из теорем 1,2. Известные СПД описаны в [2], ХП для СПД вычислялись в [5-12]. При отсутствии вырождения два ХП не равны нулю [5-12]. Теорема 1 использовалась в работах [5-7, 11].

Формулировка теоремы 5 приведена в виде, удобном для численного вычисления ХП. Укажем, что при надлежащем линейном преобразовании вектора $\delta v$ в системе (2) для нахождения оставшихся двух ХП достаточно построить только одно решение задачи Коши.

Без каких-либо дополнительных ограничений на моменты инерции и точку крепления тела маятниковые движения Млодзиевского [17]

$$\begin{aligned} &B\dot{q} = P(x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1), \quad \dot{\gamma}_1 = -\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1, \\ &p = r = 0, \quad \gamma_2 = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

представляют наиболее простое СПД. ХП для решения (14) вычислялись в [7]. Оказалось (исследовались вращения), что в случае отсутствия вырождения два ХП отличны от нуля. Следовательно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. В случае $y_0 = 0$, при отсутствии дополнительных ограничений на моменты инерции и точку крепления тела, не существует дополнительного к классическим гладкого симметричного интеграла.

Наконец, последний вывод обобщает на любое СПД результат [5, 6], полученный впервые для прецессий Гриоли. Применяя теорему 4, имеем:

Теорема 7. При фиксированных $A, B, C, x_0, z_0$ в типичном случае СПД задачи Эйлера с $y_0 = 0$ образуют двухпараметрическое от $h$ и $\sigma$ семейство.

В самом деле, понятно, что два простых ХП связаны с интегралами кинетического момента и геометрическим; в окрестности СПД получим линейные интегралы вида (7). Эти интегралы дают один параметр $\sigma$. Другой параметр $h$ дает интеграл энергии и связанная с ним пара нулевых ХП с жордановой клеткой; и этот интеграл в окрестности СПД также имеет вид (7).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (03-01-00052) и программы “Государственная поддержка ведущих научных школ” (НШ- 2000.2003.01).

1. *Тхай В.Н.* Обратимость механических систем// Прикл. математика и механика. – 1991. – **55**, вып.4. – С.578-586.
2. *Горр Г.В., Кудряшова Л.А., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. – Киев: Наук. думка, 1978. – 296 с.
3. *Брюм А.З.* Исследование регулярной прецессии тяжелого твердого тела с неподвижной точкой первым методом Ляпунова// Механика твердого тела. – 1987. – Вып.19. – С.68-72.
4. *Вархалев Ю.П., Горр Г.В.* Первый метод Ляпунова в исследовании асимптотических движений в динамике твердого тела// Там же. – 1992. – Вып.24. – С.25-41.
5. *Тхай В.Н.* Об устойчивости регулярных прецессий Гриоли// Прикл. математика и механика. – 2000. – **64**, вып.5. – С.848-857.
6. *Тхай В.Н.* Периодические движения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой, близкие к регулярным прецессиям Гриоли// Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. – М.: ВЦ РАН, 2000. – Ч.1. – С.60-67.
7. *Тхай В.Н., Швыгин А.Л.* Об устойчивости вращений вокруг горизонтальной оси тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой// Там же. – Ч. 2. – С.149-160.
8. *Маркеев А.П.* О регулярной прецессии несимметричного гироскопа (случай Гриоли)// Докл. РАН. – 2002. – **387**, № 3. – С.338-342.
9. *Маркеев А.П.* Алгоритм нормализации гамильтоновой системы в задаче об орбитальной устойчивости периодических движений// Прикл. математика и механика. – 2002. – **66**, вып.6. – С.929-938.
10. *Маркеев А.П.* Об устойчивости прецессий Гриоли// Там же. – 2003. – **67**, вып.4. – С.557-572.
11. *Гашененко И.Н., Кучер Е.Ю.* Характеристические показатели периодических решений уравнений Эйлера-Пуассона// Механика твердого тела. – 2002. – Вып.32. – С.50-59.

12. *Кучер Е.Ю.* Характеристические показатели периодических решений Стеклова и Чаплыгина// Там же. – 2003. – Вып.33. – С.33-39.
13. *Тхай В.Н.* Обратимые механические системы// Нелинейная механика. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – С.131-146.
14. *Тхай В.Н.* Нелинейные колебания обратимых систем // Прикл. математика и механика. – 1995. – **59**, вып.1. – С.38-50.
15. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. – Избр. труды. В 3-х т. – М.: Наука, 1971. – Т.1.– 771 с.
16. *Тхай В.Н.* Периодические движения системы, близкой к обратимой периодической системе// Прикл. математика и механика. – 2001. – **65**, вып.4. – С.661-680.
17. *Млодзиевский Б.К.* О перманентных осях в движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки// Тр. отд. физ. наук о-ва любит. естеств., антропол. и этнограф. – 1894. – **7**, вып.1. – С.46-48.

*Ин-т проблем управления РАН, Москва, Россия*
tkhai@ccas.ru

Получено 30.08.2004