

УДК 539.3:534.1

©2003. В.И. Сторожев, А.В. Бай

ЧАСТОТЫ ЗАПИРАНИЯ СВЯЗАННЫХ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛН ДЛЯ СЛОЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО СРЕЗА ПЬЕЗОКРИСТАЛЛА

Построено трансцендентное уравнение для определения частот запираания нормальных электроупругих волн в пьезоактивном кристаллическом слое произвольной сингонии со свободными электродированными гранями, а также соотношения для расчета форм волновых движений на частотах запираания. На основе численного анализа частотного уравнения для пластин из применяемых в акустоэлектронике стандартных срезов пьезокристалла кварца охарактеризованы особенности в распределениях частот запираания и формах волновых движений при толщинных колебаниях.

Анализ частот запираания является необходимой начальной фазой при анализе полных дисперсионных спектров нормальных волн в волноводах с различной геометрией и свойствами. Для упругих и электроупругих волноводов в виде анизотропного плоскопараллельного слоя орторомбической и гексагональной систем, ограниченного плоскостями, параллельными координатным плоскостям кристаллографической системы координат, исследование частот запираания не представляет принципиальной трудности и эти результаты достаточно широко известны [1 - 5]. В то же время исследование частот запираания для пьезокристаллического слоя сложного среза, например, для различных используемых в акустоэлектронике срезов пьезокристалла α -кварца с применением пространственных соотношений теории связанного электроупругого деформирования является во многом открытой задачей.

Частоты запираания бегущих электроупругих волн для волновода в виде упругого слоя толщины $2h$ произвольного среза пьезокристалла триклинной системы, имеющие тонкие безинерционные короткозамкнутые электроды на свободных от напряжений плоских гранях и занимающего в декартовых координатах Ox_j область

$$V = \{ |x_3| \leq h, \quad -\infty < x_1, x_2 < \infty \},$$

определяются из соответствующей спектральной задачи. Эта задача включает уравнения стационарной динамики пьезоактивной среды относительно амплитудных функций $f_j(x_3)$ волновых перемещений $U_j(x_1, x_2, x_3, t)$ ($j = \overline{1,3}$) и амплитудной функции $f_4(x_3)$ квазистатического потенциала $\varphi(x_1, x_2, x_3, t)$ связанного электрического поля при однородных краевых условиях

$$\sigma_{3j} \Big|_{x_3=\pm h} = 0, \quad \varphi \Big|_{x_3=\pm h} = 0. \quad (1)$$

Уравнения стационарной динамики для рассматриваемой пьезоактивной среды являются следствием полной системы уравнений электроупругости, включающей записываемые в тензорной форме определяющие соотношения для компонент тензора механических напряжений σ_{ij} и вектора индукции электрического поля D_i

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{kij} \partial_k \varphi, \quad (2)$$

$$D_i = \frac{\varepsilon_{ij}^S}{4\pi} \partial_j \varphi + e_{ikl} \varepsilon_{kl}, \quad (3)$$

уравнения движения

$$\partial_i \sigma_{ji} = \rho \ddot{U}_j, \quad (4)$$

соотношения связи деформаций и перемещений

$$\varepsilon_{ii} = \partial_i U_i, \quad \varepsilon_{ij} = \partial_i U_j + \partial_j U_i \quad (5)$$

и квазистатическое уравнение Максвелла

$$\partial_i D_i = 0. \quad (6)$$

Предполагается, что тензоры c_{ijkl}^E , e_{ijk} , ε_{ij} ($i, j, k, l = \overline{1, 3}$) имеют наиболее общий вид и не содержат нулевых постоянных.

Вводя исходные представления для комплексных функций перемещений U_j и потенциала φ при толщинных колебаниях (при колебаниях на частотах запираия), для которых указанные характеристики зависят только от координаты x_3 и времени t

$$\begin{aligned} U_j &= f_j(x_3) e^{-i\omega t}, \\ \varphi &= f_4(x_3) e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (7)$$

из соотношений (2)-(6) получаем спектральную задачу, включающую систему четырех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и восемь краевых условий для функций $f_j(x_3)$. В случае слоя произвольного среза пьезокристалла, то есть слоя, обладающего в координатах $Ox_1x_2x_3$ анизотропией триклинной системы, система уравнений относительно $f_j(x_3)$ имеет структуру

$$\begin{cases} \rho\omega^2 f_1(x_3) + c_{55} f_1''(x_3) + c_{45} f_2''(x_3) + c_{35} f_3''(x_3) + e_{35} f_4''(x_3) = 0, \\ \rho\omega^2 f_2(x_3) + c_{45} f_1''(x_3) + c_{44} f_2''(x_3) + c_{34} f_3''(x_3) + e_{34} f_4''(x_3) = 0, \\ \rho\omega^2 f_3(x_3) + c_{35} f_1''(x_3) + c_{34} f_2''(x_3) + c_{33} f_3''(x_3) + e_{33} f_4''(x_3) = 0, \\ 4\pi e_{35} f_1''(x_3) + 4\pi e_{34} f_2''(x_3) + 4\pi e_{33} f_3''(x_3) - \epsilon_{33} f_4''(x_3) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

В уравнениях (8) и последующих соотношениях верхний индекс E у констант c_{ij}^E опущен.

Полученное методом Эйлера решение системы (8) имеет вид

$$f_j(x_3) = \sum_{k=1}^6 A_{jk} e^{ip_k x_3} + A_{j7} x_3 + A_{j8}, \quad (9)$$

где p_k ($k = \overline{1, 6}$) – ненулевые корни характеристического уравнения системы (8)

$$z (\alpha_4 z^3 + \alpha_3 z^2 + \alpha_2 z + \alpha_1) = 0, \quad (10)$$

$$z = p^2 / \rho\omega^2, \quad p_{2i-1} = \omega \sqrt{\rho z_i}, \quad p_{2i} = -\omega \sqrt{\rho z_i};$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \epsilon_{33}, \\ \alpha_2 &= -4\pi(e_{33}^2 + e_{34}^2 + e_{35}^2) - (c_{33} + c_{44} + c_{55})\epsilon_{33}, \\ \alpha_3 &= 4\pi(e_{34}(-2c_{34}e_{33} + c_{33}e_{34}) + c_{55}(e_{33}^2 + e_{34}^2) - \\ &\quad - 2(c_{35}e_{33} + c_{45}e_{34})e_{35} + c_{33}e_{35}^2 + c_{44}(e_{33}^2 + e_{35}^2)) - \\ &\quad - (c_{34}^2 + c_{35}^2 - c_{33}c_{44} + c_{45}^2 - (c_{33} + c_{44})c_{55})\epsilon_{33}, \\ \alpha_4 &= 4\pi((c_{35}^2 - c_{33}c_{55})e_{34}^2 + c_{34}^2 e_{35}^2 + 2c_{34}e_{34}(c_{55}e_{33} - c_{35}e_{35}) - \\ &\quad - c_{44}(c_{55}e_{33}^2 + e_{35}(-2c_{35}e_{33} + c_{33}e_{35}))) + \\ &\quad + (c_{35}^2 c_{44} + (c_{34}^2 - c_{33}c_{44})c_{55})\epsilon_{33} + c_{45}^2(4\pi e_{33}^2 + c_{33}\epsilon_{33}) - \\ &\quad - 2c_{45}(4\pi(c_{34}e_{33} - c_{33}e_{34})e_{35} + c_{35}(4\pi e_{33}e_{34} + c_{34}\epsilon_{33})). \end{aligned}$$

Корни уравнения (10) могут быть найдены в явном виде по формулам Кардано, что создает дополнительные возможности для анализа их параметрических зависимостей от физико-механических постоянных слоя.

Константы A_{ij} в выражениях (9) связаны между собой соотношениями, устанавливаемыми при применении метода Эйлера к системе (8) и приводящимися к виду $A_{ij} = \beta_{ij}A_j$ ($i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,8}$). Величины β_{ij} определяются путем приравнивания нулю коэффициентов при A_j в соотношениях, получаемых подстановкой решений (9) в систему (8). Анализируя последние соотношения, устанавливаем, что $\beta_{17} = \beta_{18} = \beta_{27} = \beta_{28} = \beta_{37} = \beta_{38} = 0$, а для нахождения остальных β_{ij} используем системы линейных алгебраических уравнений, получаемые в результате приравнивания нулю коэффициентов при конкретном A_j в первом, втором и третьем соотношениях. Таким образом, находим

$$\begin{aligned}\beta_{11} &= \beta_{12} = \Delta_{11}/\Delta_1, & \beta_{21} &= \beta_{22} = \Delta_{21}/\Delta_1, \\ \beta_{31} &= \beta_{32} = \Delta_{31}/\Delta_1, & \beta_{13} &= \beta_{14} = \Delta_{12}/\Delta_2, \\ \beta_{23} &= \beta_{24} = \Delta_{22}/\Delta_2, & \beta_{33} &= \beta_{34} = \Delta_{32}/\Delta_2, \\ \beta_{15} &= \beta_{16} = \Delta_{13}/\Delta_3, & \beta_{25} &= \beta_{26} = \Delta_{23}/\Delta_3, \\ \beta_{35} &= \beta_{36} = \Delta_{33}/\Delta_3,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\Delta_{1i} &= e_{35}z_i + (c_{35}e_{33} + c_{45}e_{34} - (c_{33} + c_{44})e_{35})z_i^2 + \\ &\quad + ((c_{34}c_{45} - c_{35}c_{44})e_{33} + (c_{34}c_{35} - c_{33}c_{45})e_{34} + (c_{33}c_{44} - c_{34}^2)e_{35})z_i^3, \\ \Delta_{2i} &= e_{34}z_i + (c_{34}e_{33} - (c_{33} + c_{55})e_{34} + c_{45}e_{35})z_i^2 + \\ &\quad + ((c_{35}c_{45} - c_{34}c_{55})e_{33} + (c_{33}c_{55} - c_{35}^2)e_{34} + (c_{34}c_{35} - c_{33}c_{45})e_{35})z_i^3, \\ \Delta_{3i} &= e_{33}z_i - ((c_{44} + c_{55})e_{33} + c_{34}e_{34} + c_{35}e_{35})z_i^2 + \\ &\quad + ((c_{44}c_{55} - c_{45}^2)e_{33} + (c_{35}c_{45} - c_{34}c_{55})e_{34} + (c_{34}c_{45} - c_{35}c_{44})e_{35})z_i^3, \\ \Delta_i &= (c_{33}c_{44} - c_{34}^2 - c_{35}^2 - c_{45}^2 + c_{33}c_{55} + c_{44}c_{55})z_i^2 - (c_{33} + c_{44} + c_{55})z_i + \\ &\quad + (c_{35}^2c_{44} - 2c_{34}c_{35}c_{45} + c_{33}c_{45}^2 + c_{34}^2c_{55} - c_{33}c_{44}c_{55})z_i^3 + 1 \quad (i = \overline{1,3}).\end{aligned}$$

Искомое частотное уравнение для рассматриваемой спектральной задачи получим, подставляя выражения

$$f_j(x_3) = \sum_{k=1}^6 \beta_{jk}A_k e^{ip_k x_3} \quad (j = \overline{1,3}), \quad f_4(x_3) = \sum_{k=1}^6 A_k e^{ip_k x_3} + A_7 x_3 + A_8 \quad (11)$$

в граничные условия (1). Это уравнение представляет собой равенство нулю определителя следующей из граничных условий системы однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_j

$$a_{ij}A_j = 0 \quad (i, j = \overline{1,8})$$

и записывается в виде

$$\Delta(\omega) = |a_{ij}| = 0, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned}a_{1j} &= i e^{ip_j} (e_{35} + c_{55} \beta_{1j} + c_{45} \beta_{2j} + c_{35} \beta_{3j}) p_j, \\ a_{2j} &= i e^{ip_j} (e_{33} + c_{35} \beta_{1j} + c_{34} \beta_{2j} + c_{33} \beta_{3j}) p_j, \\ a_{3j} &= i e^{ip_j} (e_{34} + c_{45} \beta_{1j} + c_{44} \beta_{2j} + c_{34} \beta_{3j}) p_j, \\ a_{5j} &= i e^{-ip_j} (e_{35} + c_{55} \beta_{1j} + c_{45} \beta_{2j} + c_{35} \beta_{3j}) p_j, \\ a_{6j} &= i e^{-ip_j} (e_{33} + c_{35} \beta_{1j} + c_{34} \beta_{2j} + c_{33} \beta_{3j}) p_j, \\ a_{7j} &= i e^{-ip_j} (e_{34} + c_{45} \beta_{1j} + c_{44} \beta_{2j} + c_{34} \beta_{3j}) p_j, \\ a_{4j} &= e^{ip_j}, \quad a_{8j} = e^{-ip_j} \quad (j = \overline{1,6}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{17} &= a_{57} = e_{35}, & a_{27} &= a_{67} = e_{34}, \\
 a_{37} &= a_{77} = e_{33}, \\
 a_{18} &= a_{28} = a_{38} = a_{58} = a_{68} = a_{78} = 0, \\
 a_{47} &= a_{48} = a_{88} = 1, & a_{78} &= -1.
 \end{aligned}$$

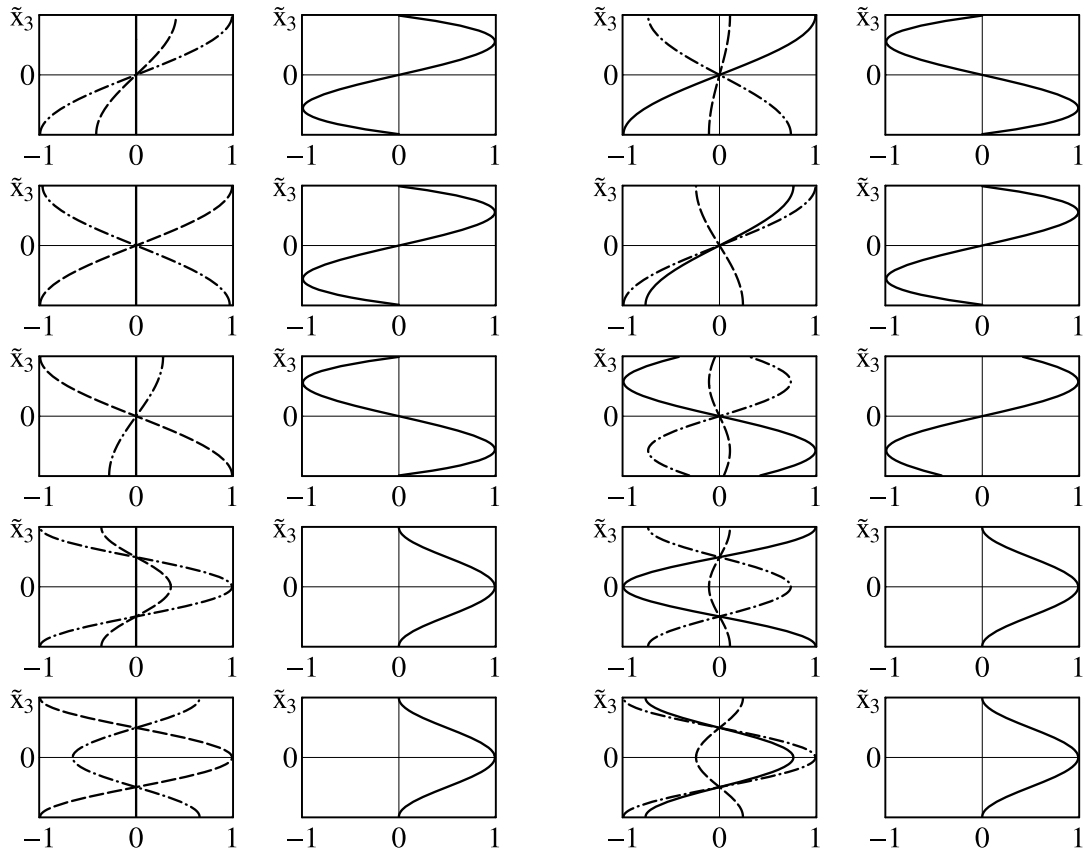
Численный анализ построенного частотного уравнения (12) проведен для пластин АТ-, ВТ-, GT-, МТ- и NT-среза α -кварца, широко применяющихся в радиотехнике и обладающих низким температурным коэффициентом [1]. Рассчитанные значения десяти низших ненулевых частот запираания представлены в таблице. Наименьшее значение низшей критической частоты ω_1 свойственно для слоя GT - среза, а наибольшее - для слоя АТ - среза, причем $\max\{\omega_1\}/\min\{\omega_1\}=1,23$. Для других представленных частот запираания ω_n отношение $\max\{\omega_n\}/\min\{\omega_n\}$ колеблется в пределах от 1,09 до 1,36.

Значения частот запираания, $\omega \cdot 10^{-6}$ рад/с

Срез α -кварца	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9	ω_{10}
АТ	0.646	0.777	0.965	1.302	1.633	1.821	1.951	2.429	2.604	2.756
ВТ	0.555	0.650	1.116	1.129	1.299	1.690	1.949	2.196	2.257	2.598
GT	0.524	0.597	1.063	1.100	1.197	1.593	1.795	2.127	2.209	2.395
МТ	0.595	0.681	1.029	1.190	1.361	1.785	2.042	2.058	2.381	2.723
NT	0.596	0.767	1.026	1.192	1.535	1.789	2.052	2.302	2.385	2.981

Анализ форм волновых колебательных движений на частотах запираания реализован для пьезокристаллических пластин АТ- и NT-срезов. На иллюстрирующем эти формы рисунке отдельно представлены рассчитанные для пяти низших частот запираания распределения амплитудных функций $\tilde{f}_j(x_3) = \text{Re} \left[f_j(x_3) / \max_{j, x_3 \in V} |f_j(x_3)| \right]$ ($j = \overline{1, 3}$) и амплитудной функции $\tilde{f}_4(x_3) = \text{Re} \left[f_4(x_3) / \max_{x_3 \in V} |f_4(x_3)| \right]$ по безразмерной толщинной координате волновода $\tilde{x}_3 = x_3/h$.

В слое, имеющем параллельную плоским граням плоскость симметрии физико-механических свойств, частоты запираания распадаются на множества $\{\omega_n^{(j)}\}$ ($j = \overline{1, 3}$), которым соответствуют однопарциальные волновые движения вдоль координатного направления Ox_j . В слое же, не имеющем плоскости симметрии физико-механических свойств, формы колебаний на частотах запираания в системе координат $Ox_1x_2x_3$ не являются однопарциальными. Так, например, для пластин АТ-среза механические колебания на критических частотах являются двухпарциальными (рисунок 1), а для пластины NT-среза — трехпарциальными (рисунок 2). В двухпарциальных формах наблюдается поочередное преобладание перемещений U_2 и U_3 , изображаемых соответственно пунктирными и штрих пунктирными линиями. На частоте ω_2 эти перемещения являются примерно равнозначными. Для пластины NT-среза на всех формах толщинных колебаний перемещения U_2 являются малыми по сравнению с перемещениями U_1, U_3 , преобладание перемещений U_1 свойственно колебаниям с частотами $\omega_1, \omega_3, \omega_4$, преобладание перемещений U_3 — колебаниям с частотами ω_2, ω_5 . Распределения по толщине квазистатического потенциала электрического поля для рассматриваемых срезов идентичны как по виду, так и по порядку чередования.



1) AT-срез

2) NT-срез

Формы волновых перемещений и потенциала φ на частотах запираания в пластине α -кварца.

Исследованные зависимости в строении спектров частот запираания бегущих нормальных волн и форм волновых движений на критических частотах для пластин из основных технологических срезов α -кварца могут быть применены для проектирования и расчета рабочих параметров ультразвуковых устройств.

1. Мэзон У. Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультразвуке: Пер. с англ. – М.: ИЛ, 1952. – 448 с.
2. Микер Т., Мейтцлер А. Волновое распространение в протяженных цилиндрах и пластинках // Физическая акустика / Под ред. Мэзона У. П. – М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 140–203.
3. Auld В.А. Acoustic fields and waves in solids. – New York: Wiley, 1973. – Vol. 1. – 423 p. – Vol. 2. – 346 p.
4. Абрамова О. П., Сторожев В. И., Шпак В. А. Дисперсия нормальных волн в ортотропном слое с закрепленными границами // Акуст. журнал. – 1996. – 42, №1 – С. 5–9.
5. Сторожев В.И., Бай А.В. Нормальные волны в ортотропной пьезоактивной пластине // Теор. и прикл. механика. – 2001. – Вып. 33. – С. 164–169.

Донецкий нац. ун-т
 storogev@dongu.donetsk.ua
 alexeybaj@mail.ru

Получено 17.03.03