

УДК 531.38

©2003. И.А. Болграбская, Б.И. Коносевиц, В.Т. Яковенко

ВЛИЯНИЕ НЕСИММЕТРИИ РАСПОЛОЖЕНИЯ ДВИЖИТЕЛЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ РЕЖИМА ВИСЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

Записаны уравнения движения летательного аппарата (ЛА), состоящего из корпуса, моделируемого твердым телом, к которому с каждой стороны прикреплены по два движителя типа "винт в кольце". Оси винтов параллельны вертикальной оси корпуса. Выбрана схема управления ЛА, включающая автоматическую систему улучшения устойчивости. Определено положение равновесия ЛА, которому соответствует режим висения аппарата. Исследовано влияние несимметрии расположения движителей на устойчивость режима висения.

Введение. В настоящее время имеется потребность в летательных аппаратах (ЛА), которые не нуждаются в специально оборудованных площадках для взлета и посадки, могут использоваться как для доставки грузов в труднодоступные места, так и для спасательных работ. При этом желательно иметь такой аппарат, который мог бы причалить к стене здания без риска повредить несущий винт, как это имеет место в случае вертолета. Этот аппарат может применяться для спасения людей при стихийных бедствиях и пожарах, служить в качестве воздушного такси. Перспективным типом такого ЛА является аппарат, в котором для создания подъемной силы в качестве движителей используются воздушные винты, заключенные в кольцевые каналы специального профиля.

Разработка новых ЛА требует решения ряда научных проблем. Сюда в первую очередь относятся вопросы о создании адекватной математической модели и разработке автоматического управления, которое позволяет реализовать и стабилизировать необходимые рабочие режимы. В данной работе рассматривается ЛА, в качестве движителей которого использованы четыре винта, помещенные в специальные каналы и прикрепленные к корпусу. При этом очевидна возможность несимметричного расположения винтов по отношению к центру масс ЛА. Поскольку эта несимметрия в ряде случаев может привести к нежелательным эффектам потери устойчивости и невозможности стабилизации рабочего режима, необходимо исследовать влияние несимметрии на динамику аппарата.

В данной работе записаны уравнения движения летательного аппарата, моделируемого тяжелым твердым телом, к которому жестко прикреплены четыре движителя. Выбрана схема управления этим аппаратом и получены условия существования у него режима висения. Исследована устойчивость этого режима в предположении, что существует несимметрия в креплении движителей к ЛА. Определены значения конструктивных параметров ЛА, при которых даже малая несимметрия в креплении движителей приводит к возникновению неустойчивости режима висения.

1. Постановка задачи. Уравнения движения. Рассмотрим ЛА, состоящий из корпуса, к которому с обеих сторон прикреплены по два движителя. Полагаем, что ЛА имеет плоскость симметрии. На вертикальных режимах полета подъемная сила создается тягами винтов.

Пусть винты имеют следующие номера: 1 - передний правый, 2 - передний левый,

3 - задний левый, 4 - задний правый (рис. 1). Они приводятся во вращение двигателем, расположенным внутри корпуса. Угловые скорости вращения всех четырех винтов одинаковы и не меняются в полете. Поэтому величина силы тяги P_i ($i = 1, \dots, 4$), создаваемая каждым винтом, регулируется только путем изменения угла α_i установки лопастей винта (то есть угла между хордой лопасти и плоскостью, ортогональной оси винта). Полагаем далее, как и в [1], что тяга винта пропорциональна углу α_i установки лопастей и равна

$$P_i = k_p \alpha_i \quad (i = \overline{1,4}), \quad (1)$$

здесь $k_p = k_p(\rho, V) > 0$, где V – скорость полета, $\rho(h)$ – плотность воздуха на высоте h .

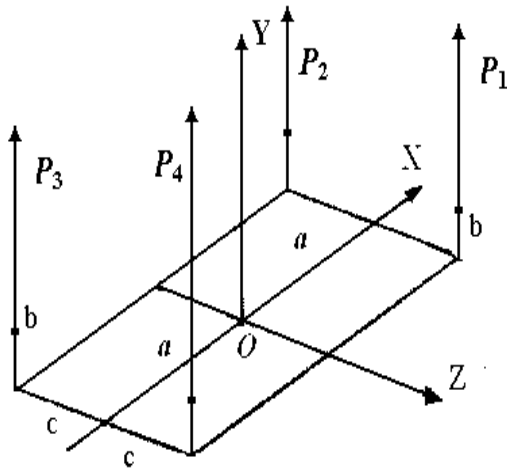


Рис. 1. Схема приложения сил тяги.

При составлении уравнений движения ЛА будем пренебрегать медленным изменением его массово-инерционных характеристик, происходящим из-за выгорания топлива, а также изменением его формы вследствие относительного движения и упругой деформации различных элементов его конструкции. С учетом сказанного ЛА моделируется абсолютно твердым телом, которое движется в пространстве под действием внешних сил и моментов.

Поскольку в данной работе предполагается исследование режима висения ЛА и его окрестности, то в уравнениях движения ЛА аэродинамические силы и моменты не будут учитываться.

Для описания динамики ЛА используются следующие правые декартовы системы координат, связанные с Землей и с корпусом ЛА.

Нормальная земная система координат $O_0X_gY_gZ_g$. Ее начало фиксировано по отношению к Земле, а ось O_0Y_g направлена противоположно вектору силы тяжести.

Связанная система координат $OXYZ$ (орты $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$). Начало этой системы полагаем совмещенным с центром масс ЛА, а оси направленными вдоль главных осей инерции аппарата, при этом ось OX лежит в плоскости симметрии аппарата и направлена к его носовой части, а ось OY также лежит в плоскости симметрии и направлена к верхней части аппарата.

Ориентацию связанной системы координат по отношению к нормальной земной определим углами рыскания ψ , тангажа ϑ и крена γ [1,2].

При вращении каждого винта возникает момент \mathbf{L}_i ($i = \overline{1,4}$), который действует на корпус в направлении, противоположном направлению вращения винта. Если винты вращаются в одну сторону, то возникает значительный суммарный момент $\sum_{i=1}^4 \mathbf{L}_i$. Чтобы избежать этого, одной паре винтов придается направления вращения, противоположные направлениям вращения другой пары винтов. Так как угловые скорости вращения винтов одинаковы, то суммарный гиросtatический момент вращающихся винтов равен нулю. В таком случае ЛА можно рассматривать как твердое тело, не содержащее вращающихся масс.

Уравнения движения ЛА запишем, исходя из законов изменения количества движения и момента количества движения аппарата относительно его центра масс. В векторной форме эти уравнения имеют следующий вид:

$$m\dot{\mathbf{V}} = m\mathbf{g} + \mathbf{P} + \mathbf{F}, \quad \dot{\mathbf{K}} = \mathbf{M}_P + \mathbf{M}_F. \quad (2)$$

Здесь m – масса ЛА; \mathbf{g} – ускорение свободного падения; \mathbf{P} – тяга, то есть главный вектор сил, действующих на ЛА со стороны движителей; \mathbf{M}_P – момент тяги относительно центра масс ЛА; \mathbf{F} и \mathbf{M}_F – управляющая сила, создаваемая рулем направления и соответствующий момент; \mathbf{K} – кинетический момент ЛА относительно его центра масс.

Проектируя уравнения (2) на оси связанной системы координат, получим

$$\begin{aligned} m(\dot{V}_x + \omega_y V_z - \omega_z V_y) &= -mg \sin \vartheta + P_x + F_x, \\ m(\dot{V}_y + \omega_z V_x - \omega_x V_z) &= -mg \cos \vartheta \cos \gamma + P_y + F_y, \\ m(\dot{V}_z + \omega_x V_y - \omega_y V_x) &= mg \cos \vartheta \sin \gamma + P_z + F_z; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z &= M_{P_x} + M_{F_x}, \\ I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z &= M_{P_y} + M_{F_y}, \\ I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y &= M_{P_z} + M_{F_z}. \end{aligned} \quad (4)$$

В формулах (3), (4) индексы x, y, z обозначают проекции соответствующих переменных на оси связанной системы координат, а компоненты вектора абсолютной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ в связанной системе координат равны [2]

$$\omega_x = \dot{\gamma} + \dot{\psi} \sin \vartheta, \quad \omega_y = \dot{\vartheta} \sin \gamma + \dot{\psi} \cos \vartheta \cos \gamma, \quad \omega_z = \dot{\vartheta} \cos \gamma - \dot{\psi} \cos \vartheta \sin \gamma. \quad (5)$$

2. Система управления летательным аппаратом. Система управления летательным аппаратом должна обеспечивать возможность такого изменения силы P_i тяги i -того винта ($i = \overline{1,4}$), чтобы аппарат был способен совершать как вертикальные, так и горизонтальные перемещения. Этого можно достичь разными способами. Рассмотрим здесь способ, аналогичный вертолетному, когда горизонтальная составляющая силы тяги создается путем наклона корпуса ЛА вместе с винтами в требуемом направлении.

Пусть оси винтов неподвижны относительно корпуса и направлены коллинеарно оси OY . Тогда, с учетом (1), сила тяги равна

$$\mathbf{P}_i = k_p \alpha_i \mathbf{Y} \quad (i = \overline{1,4}). \quad (6)$$

Общую тягу винтов будем регулировать путем изменения углов установки всех винтов на одну и ту же величину. Тогда соответствующие приращения углов α_i равны

$$\Delta \alpha_i^{u_0} = k_{u_0} u_0 \quad (i = \overline{1,4}), \quad (7)$$

здесь $u_0 > 0$ – управляющий параметр (например угол поворота специальной ручки управления общей тягой), $k_{u_0} > 0$ – передаточный коэффициент.

Для управления наклонами корпуса ЛА по тангажу и крену будем с помощью другой ручки управления уменьшать на одну и ту же величину углы установки для одной пары винтов (передней или задней, правой или левой), одновременно увеличивая

на эту же величину углы установки винтов другой пары. Пусть, например, наклон этой ручки вперед на угол u_1 приводит к следующему уменьшению углов установки передних винтов при одновременном увеличении углов установки задних винтов

$$-\Delta\alpha_1^{u_1} = -\Delta\alpha_2^{u_1} = \Delta\alpha_3^{u_1} = \Delta\alpha_4^{u_1} = k_{u_1}u_1 \quad (k_{u_1} > 0). \quad (8)$$

Наклон этой ручки влево на угол u_2 дает следующее уменьшение углов установки левой пары винтов при одновременном увеличении углов установки для винтов правой пары

$$\Delta\alpha_1^{u_2} = -\Delta\alpha_2^{u_2} = -\Delta\alpha_3^{u_2} = \Delta\alpha_4^{u_2} = k_{u_2}u_2 \quad (k_{u_2} > 0). \quad (9)$$

Полагая, что значения каждого из углов α_i равны сумме всех его приращений (7)–(9), получаем в соответствии с (6)

$$\begin{aligned} P_1 &= k_p(k_{u_0}u_0 - k_{u_1}u_1 + k_{u_2}u_2), & P_2 &= k_p(k_{u_0}u_0 - k_{u_1}u_1 - k_{u_2}u_2), \\ P_3 &= k_p(k_{u_0}u_0 + k_{u_1}u_1 - k_{u_2}u_2), & P_4 &= k_p(k_{u_0}u_0 + k_{u_1}u_1 + k_{u_2}u_2). \end{aligned} \quad (10)$$

Далее считаем, что для управлением поворотом по углу рыскания ψ в задней части корпуса имеется газовый руль направления, который создает силу \mathbf{F} , действующую на корпус коллинеарно оси OZ и пропорциональную углу δ поворота заслонки, так что $\mathbf{F} = -k_F\delta\mathbf{Z}$ ($k_F > 0$). Заслонка управляется двумя педалями направления, имеющимися у летчика. Поворот правой педали на угол u_3 вызывает отклонение заслонки на угол

$$\Delta\delta^{u_3} = k_{u_3}u_3 \quad (k_{u_3} > 0). \quad (11)$$

В результате на ЛА действует сила реакции газовой струи, равная

$$\mathbf{F} = -k_F k_{u_3} u_3 \mathbf{Z}. \quad (12)$$

Описанный способ организации системы управления ЛА аналогичен вертолетному. Однако управление таким ЛА требует больше корректирующих действий, чем управление вертолетом. Для вертолета некоторый эффект стабилизации его положения по углам крена и тангажа достигается за счет гироскопических сил, возникающих при вращении несущего винта. Рассматриваемый ЛА таким свойством не обладает, так как на нем одной паре винтов дается направление вращения, противоположное направлению вращения другой пары. Поэтому для облегчения управления ЛА рассматриваемого типа на него необходимо установить автоматическую систему улучшения устойчивости и управляемости [1,2]. Следуя [1,2], представим простейший вид такой системы.

Рассмотрим сначала автомат устойчивости для углов тангажа ϑ и крена γ . Будем предполагать, что требуемые значения $\bar{\vartheta}, \bar{\gamma}$ задаются летчиком с помощью ручки управления винтами. При смещении этой ручки вперед (то есть при $u_1 > 0$) аппарат должен наклониться вперед, и при этом угол тангажа станет отрицательным ($\bar{\vartheta} < 0$). Если же эту ручку сместить влево ($u_2 > 0$), то аппарат должен наклониться влево, то есть угол крена станет отрицательным ($\bar{\gamma} < 0$). Таким образом, требуемые значения углов тангажа и крена имеют знаки, противоположные u_1, u_2 , и полагая эти значения пропорциональными смещению ручек управления, имеем для них

$$\bar{\vartheta} = -l_{u_1}u_1, \quad \bar{\gamma} = -l_{u_2}u_2 \quad (l_{u_1}, l_{u_2} > 0). \quad (13)$$

Если фактическое значение угла тангажа ϑ , измеренное гиросприбором, отличается в полете от требуемого значения $\bar{\vartheta}$, то автомат устойчивости должен так изменить углы установки винтов передней и задней пары, чтобы создать момент сил P_i , приводящий угол ϑ к значению $\bar{\vartheta}$. Пусть для определенности $\vartheta > \bar{\vartheta}$. Тогда при отсутствии автомата устойчивости летчик дает положительное приращение параметру u_1 . В соответствии с формулами (8) это приводит к изменениям углов α_i ($i = \overline{1,4}$), которые вызывают увеличение тяги задних винтов по сравнению с передними, и в результате угол ϑ начнет уменьшаться. При наличии автомата устойчивости из неравенства $\vartheta > \bar{\vartheta}$ для соответствующих значений управления u_1 имеем $u_1 = -\bar{\vartheta}/l_{u_1} > -\vartheta/l_{u_1}$. Таким образом, положительным приращением параметра u_1 является сумма $u_1 + \vartheta/l_{u_1}$. Следовательно, по аналогии с (8), автомат должен дать следующие приращения углам α_i :

$$-\Delta\alpha_1^\vartheta = -\Delta\alpha_2^\vartheta = \Delta\alpha_3^\vartheta = \Delta\alpha_4^\vartheta = k_{u_1}(u_1 + \vartheta/l_{u_1}). \quad (14)$$

Очевидно, что эта формула верна и при $\vartheta < \bar{\vartheta}$.

Точно так же, по аналогии с (9), автомат устойчивости для угла крена должен обеспечить следующие приращения:

$$\Delta\alpha_1^\gamma = -\Delta\alpha_2^\gamma = -\Delta\alpha_3^\gamma = \Delta\alpha_4^\gamma = k_{u_2}(u_2 + \gamma/l_{u_2}). \quad (15)$$

С учетом (14), (15) формулы (10), дающие выражения для сил тяги винтов, приобретают вид

$$\begin{aligned} P_1 &= k_0 u_0 - k_1 u_1 + k_2 u_2 - k_\vartheta \vartheta + k_\gamma \gamma, & P_2 &= k_0 u_0 - k_1 u_1 - k_2 u_2 - k_\vartheta \vartheta - k_\gamma \gamma, \\ P_3 &= k_0 u_0 + k_1 u_1 - k_2 u_2 + k_\vartheta \vartheta - k_\gamma \gamma, & P_4 &= k_0 u_0 + k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_\vartheta \vartheta + k_\gamma \gamma. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$k_0 = k_p k_{u_0}, \quad k_1 = k_p k_{u_1}, \quad k_2 = k_p k_{u_2}, \quad k_\vartheta = k_p k_{u_1}/l_{u_1}, \quad k_\gamma = k_p k_{u_2}/l_{u_2}. \quad (17)$$

Все коэффициенты $k_0, k_1, k_2, k_\vartheta, k_\gamma$, определяемые формулами (17), положительны.

Рассмотрим теперь автомат устойчивости по углу рыскания. По аналогии с предыдущим, можно было бы принять, что требуемое значение $\bar{\psi}$ угла рыскания определяется установленным летчиком значением параметра u_3 (угла поворота педали направления) по формуле $\bar{\psi} = -l_{u_3} u_3$ ($l_{u_3} > 0$), и автомат стремится привести фактическое значение угла ψ к значению $\bar{\psi}$. Но такой подход явно неудовлетворителен, так как для полета в требуемом направлении летчик все время должен будет держать педаль нажатой. Кроме того, из-за ограничения хода педалей достаточно большие значения $\bar{\psi}$ окажутся нереализуемыми.

В действительности более удобно, чтобы процесс поворота продолжался все время, пока педаль нажата ($u_3 \neq 0$), и прекращался при ненажатой педали. Тогда при нажатой педали автомат устойчивости по каналу рыскания должен отключаться, а при выходе на нужный курс и отпущенной педали автомат должен включиться и поддерживать ЛА на заданном курсе. Осуществить это можно, полагая всякий раз $\psi = 0$ в момент, когда летчик отпустит педаль, и выбирая в качестве требуемого нулевое значение угла ψ .

С учетом сказанного, управляющая сила \mathbf{F} , описывающая работу автомата устойчивости по углу рыскания ψ , выбирается следующим образом. Если $u_3 \neq 0$, то угол

δ поворота заслонки газового руля направления по-прежнему определяется формулой (11), а управляющая сила – формулой (12). Если же $u_3 = 0$, то автомат устойчивости по ψ должен придать углу δ значение $\delta^\psi = l_\psi \psi$, пропорциональное фактическому значению угла ψ . Поэтому проекция силы \mathbf{F} на ось OZ равна

$$F = \begin{cases} -k_\psi \psi, & \text{если } u_3 = 0, \\ -k_3 u_3, & \text{если } u_3 \neq 0, \end{cases} \quad (18)$$

где $k_3 = k_F k_{u_3}$, $k_\psi = k_F l_\psi$ – положительные величины.

Подставляя (16) в (6) и учитывая, что сила тяги $\mathbf{P} = \sum_1^4 \mathbf{P}_i$, получим компоненты силы тяги в связанной системе координат

$$P_x = 0, \quad P_y = 4k_0 u_0 = P, \quad P_z = 0. \quad (19)$$

Компоненты силы \mathbf{F} , согласно (12), равны

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = F, \quad (20)$$

где F определена в (18).

Пусть a_i, b_i, c_i ($i = \overline{1,4}$) – координаты точек приложения сил тяги в связанной системе координат. В случае симметричного расположения движителей на корпусе ЛА имеем (см. рис.1)

$$a_1 = a_2 = -a_3 = -a_4 = a, \quad b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b, \quad c_1 = -c_2 = -c_3 = c_4 = c. \quad (21)$$

Если же симметрия нарушена, то считаем, что эти координаты отличаются от определенных в (21) слагаемыми $\varepsilon e_i^a, \varepsilon e_i^b, \varepsilon e_i^c$ ($i = \overline{1,4}$).

Учитывая эти поправки, а также формулы (16), (19), (21), получаем, что моменты силы тяги движителей относительно центра масс равны

$$\begin{aligned} M_{P_x} &= -\varepsilon E^c P/4 + \varepsilon E_1^c (k_1 u_1 + k_\vartheta \vartheta) + (-4c + \varepsilon E_2^c) (k_2 u_2 + k_\gamma \gamma), \quad M_{P_y} = 0, \\ M_{P_z} &= \varepsilon E^a P/4 + \varepsilon E_2^a (k_2 u_2 + k_\gamma \gamma) + (-4a + \varepsilon E_1^a) (k_1 u_1 + k_\vartheta \vartheta). \end{aligned} \quad (22)$$

В (22) приняты обозначения

$$\begin{aligned} E^c &= e_1^c + e_2^c + e_3^c + e_4^c, \quad E_1^c = e_1^c + e_2^c - e_3^c - e_4^c, \quad E_2^c = -e_1^c + e_2^c + e_3^c - e_4^c, \\ E^a &= e_1^a + e_2^a + e_3^a + e_4^a, \quad E_1^a = -e_1^a - e_2^a + e_3^a + e_4^a, \quad E_2^a = e_1^a - e_2^a - e_3^a + e_4^a. \end{aligned} \quad (23)$$

Координаты точки приложения управляющей силы \mathbf{F} в связанной системе координат равны $-d_1, d_2, 0$ ($d_1 > 0$), а ее проекции на оси связанной системы координат определены в (20). Тогда компоненты момента этой силы относительно центра масс ЛА равны

$$M_{F_x} = F d_2, \quad M_{F_y} = F d_1, \quad M_{F_z} = 0. \quad (24)$$

В (24) F определяется согласно (18).

Формулы (19), (20), (22), (24) определяют управляющие силы и моменты, действующие на ЛА, и после их подстановки в уравнения движения (3), (4) с учетом (5) получаем замкнутую систему относительно переменных $V_x, V_y, V_z, \psi, \vartheta, \gamma$.

3. Режим висения ЛА и его устойчивость по части переменных. Характерным для изучаемого ЛА является режим висения. Этому режиму соответствует положение равновесия аппарата, в котором

$$V_x = V_y = V_z = 0, \quad \bar{\vartheta} = \bar{\gamma} = \bar{\psi} = 0. \quad (25)$$

Полагая, что на заданном режиме фактические значения углов тангажа, крена и рыскания ϑ, γ, ψ должны совпадать с требуемыми значениями углов $\bar{\vartheta}, \bar{\gamma}, \bar{\psi}$, из уравнений (4) с учетом (5) находим начальные положения ручек управления винтами u_1°, u_2° , при которых уравновешиваются моменты тяг P_i относительно продольной и поперечной осей OX, OY . Имеем

$$\varepsilon E_1^c k_1 u_1^{\circ} + (-4c + \varepsilon E_2^c) k_2 u_2^{\circ} = \varepsilon E^c P/4, \quad (26)$$

$$(-4a + \varepsilon E_1^a) k_1 u_1^{\circ} + \varepsilon E_2^a k_2 u_2^{\circ} = -\varepsilon E^a P/4.$$

Из (26) следует, что при симметричном расположении винтов ($\varepsilon = 0$) будет $u_1^{\circ} = u_2^{\circ} = 0$.

Далее считаем, что выполнены соотношения

$$\gamma = \bar{\gamma} = 0, \quad \vartheta = \bar{\vartheta} = 0, \quad \psi = \bar{\psi} = 0. \quad (27)$$

После подстановки (27) в (3) получаем, что изучаемый режим равновесия (25) существует при условии

$$P = mg. \quad (28)$$

Итак, как следует из (26), (28), условием существования режима висения является равенство силы тяги и силы веса, а также выбор таких начальных положений ручек управления винтами, при которых выполнено соотношение (27), то есть истинные значения углов крена, тангажа и рыскания равны нулю.

Для практической реализации режима висения необходимо определить условия, при которых введенное управление обеспечивает его устойчивость. Как следует из (3), (4), уравнения вращательного движения не зависят от скорости движения центра масс системы. Поэтому для изучения устойчивости системы по угловым переменным достаточно рассмотреть только уравнения (4). Эти уравнения после подстановки в них (5) и линеаризации в окрестности решения (25) с учетом (27) и при выполнении (26), (28) имеют вид

$$\begin{aligned} I_x \ddot{\gamma} &= \varepsilon k_{\vartheta} E_1^c \vartheta + k_{\gamma} (-4c + \varepsilon E_2^c) \gamma - k_{\psi} d_2 \psi, \\ I_y \ddot{\psi} &= -k_{\psi} d_1 \psi, \\ I_z \ddot{\vartheta} &= k_{\vartheta} (-4a + \varepsilon E_1^a) \vartheta + k_{\gamma} \varepsilon E_2^a \gamma. \end{aligned} \quad (29)$$

Характеристическое уравнение системы (29) таково

$$(\lambda^4 + (m_1 + m_2)\lambda^2 + m_1 m_2 + m_3)(\lambda^2 + m_4) = 0. \quad (30)$$

В (30) введены обозначения

$$m_1 = \frac{k_{\vartheta}(4a - \varepsilon E_1^a)}{I_z}, \quad m_2 = \frac{k_{\gamma}(4c - \varepsilon E_2^c)}{I_x}, \quad m_3 = -\frac{\varepsilon^2 E_1^c E_2^a k_{\vartheta} k_{\gamma}}{I_x I_z}, \quad m_4 = \frac{k_{\psi} d_1}{I_y} > 0. \quad (31)$$

Коэффициенты m_1, m_2 в (31) при малых ε больше нуля.

Из теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению [3] следует, что решение (25) системы уравнений (4) неустойчиво, если характеристическое уравнение (30) имеет корни с положительной вещественной частью.

ЗАМЕЧАНИЕ. Следует отметить, что коэффициенты характеристического уравнения не зависят от параметров e_i^b , то есть несимметрия размещения фенестронов вдоль оси Y не влияет на устойчивость режима висения ЛА.

Квадраты корней уравнения (30) равны

$$\lambda_{1,2}^2 = -(m_1 + m_2) \pm \sqrt{\Delta}/2, \quad \lambda_3^2 = -m_4 < 0. \quad (32)$$

Из (32) следует, что положительные вещественные части могут быть только у корней уравнения $\lambda^4 + (m_1 + m_2)\lambda^2 + m_3 = 0$. Сначала рассмотрим случай симметричного размещения фенестронов на корпусе ЛА ($\varepsilon = 0$). Тогда $\Delta = (m_1 - m_2)^2$ и, следовательно, $\lambda_1^2 = -m_2 < 0$, $\lambda_2^2 = -m_1 < 0$ ($\Delta = (m_1 - m_2)^2 - 4m_3$).

Таким образом, при отсутствии несимметрии нет областей неустойчивости режима висения.

При малом $\varepsilon > 0$ имеем $m_1 > 0$, $m_2 > 0$, $m_3 = O(\varepsilon^2)$. Тогда, если m_1 значительно отличается от m_2 , то Δ по-прежнему больше нуля, и корни характеристического уравнения, как и в симметричном случае, остаются чисто мнимыми.

Если же параметры системы таковы, что выполнено соотношение

$$m_1 - m_2 = O(\varepsilon), \quad (33)$$

то при $m_3 = O(\varepsilon^2) > 0$ возможна ситуация, когда

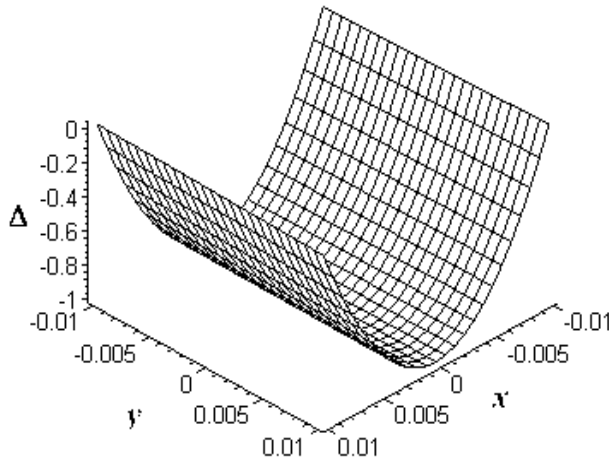


Рис. 2. Зависимость Δ от x, y .

$$\Delta = (m_1 - m_2)^2 - 4m_3 = O(\varepsilon^2) - O(\varepsilon^2) < 0. \quad (34)$$

В этом случае $\lambda_{1,2}^2 = -(m_1 + m_2)/2 \pm iO_+(\varepsilon^2)$, и после извлечения квадратного корня получим четыре корня с малыми действительными частями, две из которых больше нуля.

Действительно, пусть

$$4k_\vartheta/I_z = k, \quad 4k_\gamma/I_x = k + y, \quad a = c + x. \quad (35)$$

Тогда из (35), (31) следует

$$m_1 = k(c + x) - \varepsilon k E_1^a/4, \quad m_2 = c(k + y) - \varepsilon(k + y) E_2^c/4, \quad m_3 = \varepsilon^2 k(k + y) E_1^c E_2^a/16.$$

Подставляя эти значения в (34), получим

$$\Delta = [kx - (c - \varepsilon E_2^c/4)y + \varepsilon k(E_2^c - E_1^a)/4]^2 - \varepsilon^2 k(k + y)E_1^c E_2^a/4.$$

Очевидно, что при достаточно малых значениях x и y это выражение может быть меньше нуля. На рис. 2 такая ситуация продемонстрирована при следующих значениях геометрических и массовых параметров изучаемой системы: $I_x = 1000 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $I_z = 2000 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $c = 1 \text{ м}$; $\varepsilon = 0.02$; $E_1^a = E_2^a = E_1^c = E_2^c = 1 \text{ м}$. Величина k , характеризующая управление, вычисленная согласно (35), полагалась равной $100 \text{ м}^{-1} \text{ сек}^{-2}$.

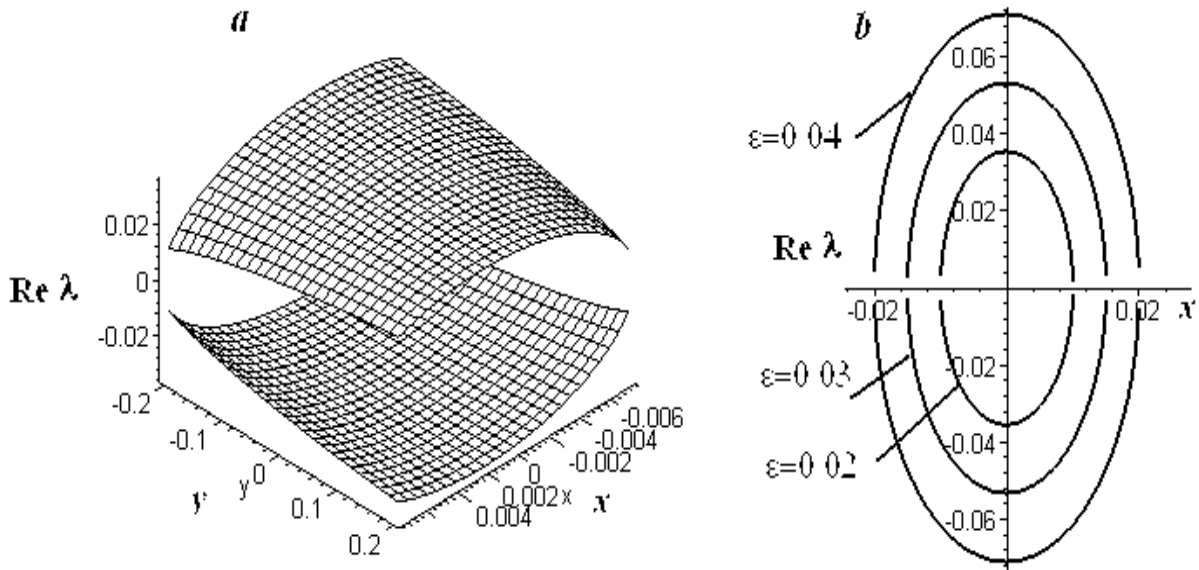


Рис. 3. Зависимость $Re(\lambda) > 0$ от а) x, y ; б) x, ε .

В предположении, что параметры выбраны из области, в которой $\Delta < 0$, были определены значения $Re \lambda$. На рис. 3, а показана зависимость полученных значений от x, y при $\varepsilon = 0.02$. А на рис. 3, б показана зависимость $Re(\lambda)$ от x при условии, что $y = 0$, а ε принимает значения 0.02, 0.03 и 0.04.

Таким образом, если параметры системы таковы, что величины m_1, m_2 , определенные согласно (31), удовлетворяют соотношению (33), и при этом выполнено условие (34), то режим висения даже при условии малой несимметрии в креплении винтов к ЛА оказывается неустойчивым.

В заключение рассмотрим случай, когда дисбаланс возникает не из-за несимметричного крепления фенестронов к корпусу ЛА, а из-за несимметричного распределения грузов, перевозимых на ЛА, что приводит к некоторому смещению центра масс ЛА по отношению к идеальному уравновешенному положению. В этом случае имеем $e_1^c = e_2^c = e_3^c = e_4^c = e^c$, $e_1^a = e_2^a = e_3^a = e_4^a = e^a$, и из (23) следует

$$E^c = 4e^c, E^a = 4e^a, E_1^c = E_2^c = E_1^a = E_2^a = 0. \quad (36)$$

После подстановки (36) в (31) получаем такие же значения m_i ($i = \overline{1, 4}$), как и в симметричном случае. То есть в случае смещения центра масс неустойчивость режима висения не возникает. Однако, как следует из (26), эта несимметрия должна учитываться при

нахождении начальных положений ручек управления винтами, позволяющих реализовать изучаемый режим.

Итак, установлено, что в случае симметричного крепления фенестронов к корпусу ЛА в вершинах квадрата ($a = c$) малое смещение (порядка ε) при их установке может привести к неустойчивости режима висения аппарата. Следует отметить, что неустойчивость при этом слабая, так как положительные вещественные части имеют порядок ε , а значит, эффект неустойчивости проявится на интервале времени порядка $1/\varepsilon$. За это время летчик успеет вручную исправить ориентацию. Однако, факт наличия неустойчивости усложняет управление ЛА вследствие того, что автомат устойчивости не обеспечивает стабилизацию объекта.

1. *Мхитарян А.М., Лазнюк П.С., Максимов В.С. и др.* Динамика полета. – М.: Машиностроение, 1978. – 424 с.
2. *Бочкарев А.Ф., Андреевский В.В., Белоконов В.М. и др.* Аэромеханика самолета. – М.: Машиностроение, 1985. – 360 с.
3. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. – М: Наука, 1966. – 530 с.

*Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
Вертолетное КБ, Енакиево
bolg@iamm.ac.donetsk.ua*

Получено 19.06.03