ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2003. Вып. 33

УДК 531.38, 531.36

©2003. **В.Е. Пузырев**

ПАССИВНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ СТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ МАЯТНИКА

Рассмотрен вращающийся маятник – тяжелое твердое тело, имеющее две степени свободы. Такая система допускает два вида равномерных вращений. Условия их неасимптотической устойчивости были получены в работе [1]. В настоящей статье исследуется задача о пассивной стабилизации [2, 3] этих движений. Получены ограничения на характеристики стабилизирующего устройства, обеспечивающие асимптотическую устойчивость движения.

Вопросы пассивной стабилизации движения рассматривались на протяжении последних лет в работах К. Пайфера и А.Я. Савченко (см., в частности, [2, 3]). Пассивно стабилизируемая система состоит из собственно динамической системы ("original system"[2], ниже в тексте статьи будем называть эту систему основной), движение которой устойчиво неасимптотически, и некоторых присоединенных к ней диссипирующих элементов. Целью является добиться асимптотической устойчивости для расширенной системы. В отличие от "обычной"стабилизации, используемой в теории управления, пассивная приводит к увеличению числа степеней свободы изучаемой системы.

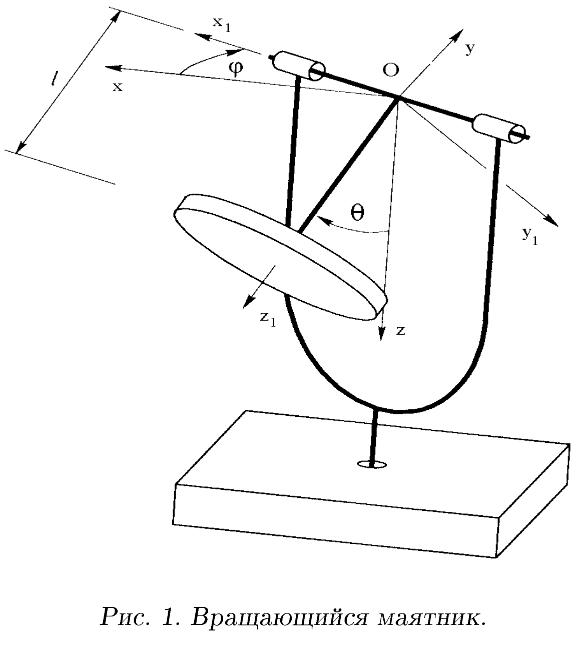

Рис. 1. Вращающийся маятник.

Для конкретной механической системы пассивная стабилизация заключается в добавлении в основную систему стабилизирующего устройства (СУ), которое может быть взято, например, в виде упругого элемента с трением. В настоящей статье рассматривается задача пассивной стабилизации системы с двумя степенями свободы, в качестве СУ взята материальная точка на пружине.

1. Основная система. Стационарные движения и их устойчивость. Рассмотрим вращающийся физический маятник – тяжелое твердое тело S, закрепленное при помощи цилиндрического шарнира в невесомой рамке, которая может вращаться вокруг вертикальной оси (рис. 1). Ось шарнира горизонтальна. Обозначим точку пересечения оси маятника с осью вращения рамки через O и введем в рассмотрение две системы координат: неподвижную $Oxyz$ и связанную с телом $Ox_1y_1z_1$. Предполагается, что центр масс O_1 тела принадлежит оси Oz_1. В качестве обобщенных координат выберем угол θ между осями Oz и Oz_1, а также угол собственного вращения рамки φ – между осями Ox

и Ox_1. Кинетическая и потенциальная энергии системы имеют вид

$$K_0 = \frac{1}{2}[I_1\dot\theta^2 + \dot\varphi^2(I_2\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta)], \quad \Pi_0 = -m_0gl\cos\theta,$$

где I_1, I_2, I_3 – главные моменты инерции тела S для полюса O, m_0 – масса тела, l – расстояние от центра масс до точки O. Данная механическая система допускает два вида стационарных движений: равномерные вращения тела вокруг главной оси инерции, несущей центр масс, которым соответствует решение

$$\dot\varphi = \omega, \quad \dot\theta = 0, \quad \theta = 0; \pi, \tag{1}$$

и, при условии $I_2 \neq I_3$, равномерные вращения тела вокруг вертикали (не совпадающей с осью Oz_1):

$$\dot\varphi = \omega, \quad \dot\theta = 0, \quad \theta = \theta_0, \quad \cos\theta_0 = \frac{m_0gl}{(I_2 - I_3)\omega^2} \quad (\sin\theta_0 \neq 0). \tag{2}$$

Условия устойчивости этих движений получены в [1]. Они удовлетворяются в случае выполнения неравенства

$$m_0gl\cos\theta_0 - \omega^2(I_2 - I_3) > 0 \tag{3}$$

для решения (1) и неравенства

$$p = m_0gl\cos\theta_0 - \omega^2(I_2 - I_3)[\cos 2\theta_0 - (I_2 - I_3)\frac{\sin^2 2\theta_0}{I_2\sin^2\theta_0 + I_3\cos^2\theta_0}] > 0 \tag{4}$$

для решения (2). В случаях, когда эти неравенства имеют противоположный знак, соответствующее движение неустойчиво.

Нетрудно видеть, что для решения (1) при $I_2 < I_3$ нижнее положение относительного равновесия маятника устойчиво при любых значениях скорости вращения рамки, а верхнее положение – только при достаточно быстром вращении $\omega^2 > m_0gl/(I_3 - I_2)$. При $I_2 = I_3$ имеем, соответственно, устойчивость и неустойчивость (для любых значений ω). Если же $I_2 > I_3$, то нижнее положение вращающегося маятника устойчиво при небыстром вращении, то есть при $\omega^2 < m_0gl/(I_3 - I_2)$, а верхнее положение неустойчиво, независимо от скорости вращения.

Для анализа условия (4) выразим, согласно (2), ω^2 через $\cos\theta_0$

$$\omega^2 = \frac{m_0gl}{(I_2 - I_3)\cos\theta_0} \tag{5}$$

и подставим в неравенство (4). Тогда

$$p = m_0gl\,\frac{\sin^2\theta_0}{\cos\theta_0}\,\frac{I_2 + 3(I_2 - I_3)\cos^2\theta_0}{I_2\sin^2\theta_0 + I_3\cos^2\theta_0} > 0. \tag{6}$$

Как следует из (5), если $I_2 > I_3$, то $\cos\theta_0 > 0$, и из (6) находим, что $p > 0$. Значит, движение устойчиво при любых скоростях вращения; при этом чем выше скорость вращения, тем больше величина угла прецессии θ_0, при $\omega \to \infty$, $\theta_0 \to \pi/2$. Если же

$I_2 < I_3$, то $\cos\theta_0 < 0$, и необходимым и достаточным условием выполнения неравенства (6) является условие

$$\cos^2\theta_0 > \frac{I_2}{3(I_3 - I_2)} \quad (\omega^2 < \sqrt{3}\, m_0 g l\ [I_2(I_3 - I_2)]^{-\frac{1}{2}}). \tag{7}$$

2. Расширенная система. Условия существования режимов (1), (2). Обозначим единичный вектор оси L_N, вдоль которой совершает колебания точка N (рис. 2), через $\boldsymbol{e}_N$, тогда ее радиус-вектор запишем как $\boldsymbol{r}_N = l(\boldsymbol{e}_{z_1} + \xi \boldsymbol{e}_N)$. Обобщенная координата ξ равняется отношению алгебраической проекции вектора $\boldsymbol{O_1 N}$ на ось L_N к расстоянию l . Учитывая, что $\boldsymbol{v}_N = l\dot{\xi}\boldsymbol{e}_N + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_N$, для выражений кинетической и потенциальной энергий материальной точки N получаем:

$$T_N = m_N l^2 \{\frac{1}{2}\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}\dot{\theta}^2[e_2^2\xi^2 + (1 + e_3\xi)^2] + \dot{\varphi}^2[e_1^2\xi^2 + (e_2\xi\cos\theta - (1 + e_3\xi)\sin\theta)^2] +$$

$$+\dot{\xi}(-e_2\dot{\theta} + e_1\dot{\varphi}\sin\theta) - \dot{\theta}\dot{\varphi}e_1\xi[e_2\xi\sin\theta + (1 + e_3\xi)\cos\theta]\},$$

$$\Pi_N = -m_N g l[e_2\xi\sin\theta + (1 + e_3\xi)\cos\theta] + \frac{1}{2}cl^2(\xi - \xi^0)^2.$$

Здесь e_1, e_2, e_3 – координаты орта $\boldsymbol{e}_N$ в связанной с телом системе координат $O_1x_1y_1z_1$, m_N – масса материальной точки, c – жесткость пружины, постоянная ξ^0 характеризует положение точки O_2 – точки закрепления пружины на прямой O_1N. Предполагая, что у расширенной механической системы сохраняются режим (1) или режим (2), определим ее положения относительного равновесия (то есть найдем соответствующие значения координаты ξ) и исследуем их на устойчивость. С этой целью воспользуемся результатами работ [4, 5]. Изложим коротко необходимые сведения.

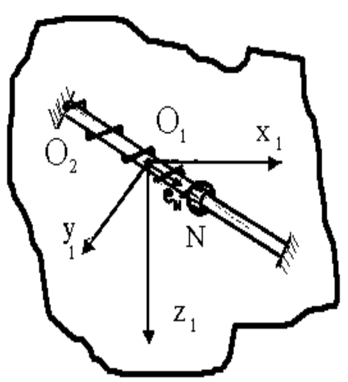

Рис. 2. Стабилизирующее устройство.

Пусть имеется механическая система с позиционными и циклическими координатами, кинетическая энергия которой имеет вид

$$K(q_j, \dot{q}_j, \dot{r}_s) = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T\widetilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} + \dot{\boldsymbol{q}}^T\widetilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^T\widetilde{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{r}},$$

где $\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2)^T$, $\boldsymbol{q}_1 \in \boldsymbol{R}^m$, $\boldsymbol{q}_2 \in \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{R}^k$; $\widetilde{\boldsymbol{A}}$, $\widetilde{\boldsymbol{C}}$ – квадратные симметрические определенно-положительные матрицы порядка $m+n$ и k соответственно; матрица $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ имеет размерность $k \times (m+n)$; верхний индекс T означает транспонирование. Предполагается, что эта система допускает стационарное движение (положение относительного равновесия)

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_0, \quad \dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{0}, \quad \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}_0. \tag{8}$$

Запишем кинетический потенциал Рауса [6] для такой системы

$$L_R = R - \Pi = \frac{1}{2}\,\dot{\boldsymbol{q}}^T\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})\,\dot{\boldsymbol{q}} \ + \ \boldsymbol{B}_\star(\boldsymbol{q})\,\dot{\boldsymbol{q}} \ - \ W(\boldsymbol{q}).$$

Здесь

$$\boldsymbol{A} = \widetilde{\boldsymbol{A}} - \widetilde{\boldsymbol{B}}^T (\widetilde{\boldsymbol{C}}^{-1})^T \widetilde{\boldsymbol{B}}, \quad \boldsymbol{B}_\star = \boldsymbol{\beta}^T \widetilde{\boldsymbol{C}}^{-1} \widetilde{\boldsymbol{B}}, \quad W = \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}^T (\widetilde{\boldsymbol{C}}^{-1})^T \boldsymbol{\beta} + \Pi(\boldsymbol{q}), \tag{9}$$

$\boldsymbol{\beta}$ – вектор циклических интегралов $(\boldsymbol{\beta} = \widetilde{\boldsymbol{B}}\dot{\boldsymbol{q}} + \widetilde{\boldsymbol{C}}\dot{\boldsymbol{r}})$. Определим матрицы $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ по формулам

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q}) = (\frac{\partial \boldsymbol{B}_\star}{\partial \boldsymbol{q}})^T - \frac{\partial \boldsymbol{B}_\star}{\partial \boldsymbol{q}}, \quad \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}) = \frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{q}^2} \tag{10}$$

и обозначим через $\boldsymbol{A}^{(0)}$, $\boldsymbol{B}^{(0)}$, $\boldsymbol{C}^{(0)}$ числовые матрицы $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}_0)$, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q}_0)$, $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}_0)$. Для произвольной квадратной матрицы $\boldsymbol{M}$ порядка $m+n$ введем блочное представление

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_{11} & \boldsymbol{M}_{12} \\ \boldsymbol{M}_{21} & \boldsymbol{M}_{22} \end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{M}_{11}$, $\boldsymbol{M}_{22}$ – квадратные матрицы размерностей m, n, соответственно; $\boldsymbol{M}_{12}$, $\boldsymbol{M}_{21}$ – прямоугольные матрицы соответствующих размерностей. Тогда для матриц $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ имеем $\boldsymbol{A}_{21}^T = \boldsymbol{A}_{12}$, $\boldsymbol{B}_{21}^T = -\boldsymbol{B}_{12}$, $\boldsymbol{C}_{21}^T = \boldsymbol{C}_{12}$. Пусть $\boldsymbol{F} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{F}_{11}, \boldsymbol{0})$, где матрица $\boldsymbol{F}_{11}$ симметрическая и положительно определенная. Обозначим через $\mathbf{d}$ и $\mathbf{d_{j2}}$ $(j = 1; 2)$ линейные дифференциальные операторы

$$\mathbf{d} = \boldsymbol{A}^{(\mathbf{0})} \frac{\mathbf{d^2}}{\mathbf{dt^2}} + (\boldsymbol{B}^{(\mathbf{0})} + \boldsymbol{F}) \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}} + \boldsymbol{C}^{(\mathbf{0})}, \quad \mathbf{d_{j2}} = \boldsymbol{A}_{\mathbf{j2}}^{(\mathbf{0})} \frac{\mathbf{d^2}}{\mathbf{dt^2}} + \boldsymbol{B}_{\mathbf{j2}}^{(\mathbf{0})} \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}} + \boldsymbol{C}_{\mathbf{j2}}^{(\mathbf{0})},$$

а через $\boldsymbol{D}(\lambda)$ и $\boldsymbol{D}_{j2}(\lambda)$ соответствующие λ-матрицы [7].

Теорема. Рассмотрим механическую систему с матрицами $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, определяемыми согласно (9), (10), и предположим, что ни одно из собственных значений оператора $\mathbf{d_{22}}$ не удовлетворяет условию

$$\boldsymbol{D}_{12}(\lambda_0) \boldsymbol{\gamma}_2 = \boldsymbol{0}, \tag{11}$$

где $\boldsymbol{\gamma}_2$ – собственный вектор $\mathbf{d_{22}}$, соответствующий λ_0. Тогда добавление к системе произвольной диссипативной силы, линейной по $\dot{\boldsymbol{q}}_1$ (с полной диссипацией энергии по $\dot{\boldsymbol{q}}_1$), приводит к следующим результатам:

I) Если все собственные значения матрицы $\boldsymbol{C}^{(0)}$ положительны, то положение равновесия (8) становится асимптотически устойчивым по отношению к позиционным координатам и скоростям. Устойчивость является экспоненциальной и равномерной. Циклические скорости устойчивы и стремятся к некоторым постоянным значениям с течением времени.

II) Если матрица $\boldsymbol{C}^{(0)}$ имеет хотя бы одно отрицательное собственное значение, то движение (8) неустойчиво. Среди частных решений уравнений движения системы хотя бы одно имеет отрицательное характеристическое число.

Определим стационарные движения расширенной системы, которые соответствуют решениям (1), (2) основной системы. Введем безразмерные параметры и время по формулам

$$\alpha = \frac{I_2}{m_0 l^2}, \quad \mu = \frac{m_N}{m_0}, \quad a = \frac{I_1}{I_2}, \quad b = \frac{I_3}{I_2}, \quad \Omega = \omega \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \kappa = \frac{cl}{m_0 g}, \quad \tau = \sqrt{\frac{g}{l}} t. \tag{12}$$

Поскольку для расширенной системы $K = K_0 + K_N$, запишем матрицы $\widetilde{\boldsymbol{A}}$, $\widetilde{\boldsymbol{B}}$, $\widetilde{\boldsymbol{C}}$ с точностью до положительного множителя $m_0 l^2$

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \mu & -\mu e_2 \\ -\mu e_2 & a\alpha + \mu[e_2^2\xi^2 + (1+e_3\xi)^2] \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\boldsymbol{B}} = \mu e_1(\sin\theta, -[e_2\xi\cos\theta + (1+e_3\xi)\sin\theta]),$$

$$\widetilde{\boldsymbol{C}} = \widetilde{C} = \alpha(\sin^2\theta + b\cos^2\theta) + \mu\{e_1^2\xi^2 + [e_2\xi\cos\theta - (1+e_3\xi)\sin\theta]^2\},\ W = \Pi_0 + \Pi_N + \frac{\beta^2}{2\widetilde{C}}.$$

Вычислим частные производные $\frac{\partial W}{\partial \xi}$, $\frac{\partial W}{\partial \theta}$ и приравняем их нулю. Учитывая, что

$$\frac{\partial \widetilde{C}}{\partial \xi} = 2\mu[e_1^2\xi + \sigma_1(e_2\cos\theta - e_3\sin\theta)], \quad \frac{\partial \widetilde{C}}{\partial \theta} = \alpha(1-b)\sin 2\theta - 2\mu\sigma_1\sigma_2,$$

где

$$\sigma_1(\xi,\theta) = e_2\xi\cos\theta - (1+e_3\xi)\sin\theta, \quad \sigma_2(\xi,\theta) = e_2\xi\sin\theta + (1+e_3\xi)\cos\theta,$$

и тот факт, что $\beta = \Omega\ \widetilde{C}(\xi_0,\theta_0)$, получаем

$$\left.\frac{\partial W}{\partial \xi}\right|_{\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_0} = -\mu e_2\sin\theta - \mu e_3\cos\theta_0 + \kappa(\xi_0 - \xi^0) -$$
$$-\Omega^2\ [e_1\xi_0 + (e_2\cos\theta_0 - e_3\sin\theta_0)\sigma_1(\xi_0,\theta_0)] = 0, \tag{13}$$
$$\left.\frac{\partial W}{\partial \theta}\right|_{\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_0} = [1 + \mu(1+e_3\xi_0)]\sin\theta_0 - \mu e_2\xi_0\cos\theta_0 -$$
$$-\Omega^2\ [\alpha(1-b)\sin\theta_0\cos\theta_0 - \mu\sigma_1(\xi_0,\theta_0)\sigma_2(\xi_0,\theta_0)] = 0. \tag{14}$$

Перепишем равенство (14) с учетом (5) и (12)

$$\mu[(1+e_3\xi_0)\sin\theta_0 - e_2\xi_0\cos\theta_0 + \Omega^2\ \sigma_1(\xi_0,\theta_0)\sigma_2(\xi_0,\theta_0)] = 0.$$

Первые два слагаемых в квадратных скобках представляют собой выражение $-\sigma_1(\xi_0,\theta_0)$, поэтому условием существования стационарного движения у расширенной системы является обращение в нуль одного из двух выражений $\sigma_1(\xi_0,\theta_0)$, $1 - \Omega^2\ \sigma_2(\xi_0,\theta_0)$.

Для режимов, соответствующих решению (1) основной системы, имеем $\sigma_1(\xi_0,\theta_0) = \pm e_2\xi_0$, $\sigma_2(\xi_0,\theta_0) = \pm(1+e_3\xi_0)$. Получаем следующие возможности расположения СУ в теле:

1) $e_2 \neq 0$. Тогда величина ξ_0 может принимать нулевое значение; если $e_3 = 0$, то это единственное положение равновесия материальной точки N, если же $e_3 \neq 0$, то существует второе значение для ξ_0, равное $(1/\Omega^2 - 1)/e_3$. При этом из равенства (13) однозначно находится величина ξ^0, которая определяет точку O_2 закрепления пружины.

2) $e_2 = 0$. Одна из величин ξ_0, ξ^0 принимает произвольное значение, вторая определяется из (13).

Для режимов, соответствующих решению (2), имеем

3) если $\boldsymbol{e}_N \cdot \boldsymbol{e}_y \neq 0$, тогда

$$e_2\cos\theta_0 - e_3\sin\theta_0 \neq 0, \quad \xi_0 = \frac{\sin\theta_0}{\boldsymbol{e}_N \cdot \boldsymbol{e}_y}, \tag{15}$$

если $\boldsymbol{e}_N\cdot\boldsymbol{e}_z\neq 0$, то

$$e_2\sin\theta_0+e_3\cos\theta_0\neq 0,\quad \xi_0=\frac{[\alpha(1-b)-1]\cos\theta_0}{\boldsymbol{e}_N\cdot\boldsymbol{e}_z}. \qquad (16)$$

4) Если же $\boldsymbol{e}_N\cdot\boldsymbol{e}_y=0$, $\boldsymbol{e}_N\cdot\boldsymbol{e}_z=0$, то есть $e_1=\pm 1$ – точка N колеблется коллинеарно оси маятника, – тогда для СУ не существует положения равновесия, сохраняющего решение (2). Исключение составляет частный случай $\alpha(1-b)-1=0$ ($I_2=I_3+ml^2$), для которого любое положение точки N является допустимым. Величина ξ^0, как и ранее, определяется из равенства (13).

3. Асимптотическая устойчивость равномерных вращений вокруг главной оси, несущей центр масс. Найдем условия асиптотической устойчивости решения (1) расширенной системы. Для этого проверим, выполняется ли условие (11), Учитывая что $m=n=1$, имеем

$$\boldsymbol{A}_{12}=a_{12}=\widetilde{a}_{12}-\frac{\widetilde{b}_{11}\,\widetilde{b}_{12}}{\widetilde{C}}=\mu\{-e_2+\frac{\mu e_1^2}{\widetilde{C}}\xi\sin\theta\;\sigma_2\},$$

$$\boldsymbol{A}_{22}=a_{22}=\widetilde{a}_{22}-\frac{\widetilde{b}_{11}^2}{\widetilde{C}}=a\alpha+\mu[e_2^2\xi^2+(1+e_3\xi)^2]-\frac{\mu^2e_1^2\xi^2}{\widetilde{C}}\sigma_2^2,$$

$$\boldsymbol{B}_{12}=b_{12}=\beta\,(\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\widetilde{b}_{11}}{\widetilde{C}}-\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\widetilde{b}_{12}}{\widetilde{C}})=\frac{\mu e_1\beta}{\widetilde{C}}\{\cos\theta-\frac{\sin\theta}{\widetilde{C}}[\alpha(1-b)\sin 2\theta-2\mu\sigma_1\sigma_2]\}-$$

$$-\frac{\mu e_1}{\widetilde{C}}\beta\{-[2e_2\xi\sin\theta+(1+2e_3\xi)\cos\theta]+\frac{2\mu\xi}{\widetilde{C}}\sigma_2[e_1^2\xi+(e_2\cos\theta-e_3\sin\theta)\sigma_1]\}=$$

$$=\frac{2\mu e_1\alpha\beta}{\widetilde{C}^2}\{\sigma_2[b+(1-b)\sin^2\theta]-(1-b)\sin^2\theta\cos\theta\}, \qquad (17)$$

$$\boldsymbol{C}_{12}=c_{12}=\mu(e_3\sin\theta-e_2\cos\theta)+\frac{\mu\beta^2}{\widetilde{C}^2}[(e_2\sin\theta+e_3\cos\theta)\sigma_1+(e_2\cos\theta-e_3\sin\theta)\sigma_2]+$$

$$+\frac{2\mu\beta^2}{\widetilde{C}^3}[\alpha(1-b)\sin 2\theta-2\mu\sigma_1\sigma_2][e_1^2\xi+(e_2\cos\theta-e_3\sin\theta)\sigma_1],$$

$$\boldsymbol{C}_{22}=c_{22}=\cos\theta-\frac{\alpha(1-b)\beta^2}{\widetilde{C}^2}[\cos 2\theta-\frac{\alpha(1-b)}{\widetilde{C}}\sin^2 2\theta]+\mu[\sigma_2+\Omega^2(\sigma_1^2-\sigma_2^2)-$$

$$-\frac{4\alpha(1-b)}{\widetilde{C}}\;\Omega^2\;\sin 2\theta\;\sigma_1\sigma_2+\frac{4\mu}{\widetilde{C}}\;\Omega^2\;\sigma_1^2\sigma_2^2].$$

Напомним, что матрица $\boldsymbol{C}^{(0)}$ должна быть определенно-положительной (теорема, пункт I). Поскольку при $\mu=0$ выражение c_{22}^0 имеет тот же знак, что и p, то есть положительно, то этого всегда можно добиться при выборе достаточно "жесткой" пружины, масса СУ при этом, вообще говоря, ограничена сверху некоторым значением. Подставляя в выражения (17) $\theta=0;\pi$, $\xi=\xi_0$, получаем

$$a_{12}^0=-\mu e_2,\quad a_{22}^0=a\alpha+\mu[e_2^2\xi_0^2+(1+e_3\xi_0)^2-\frac{\mu^2e_1^2}{\delta}\xi_0^2(1+e_3\xi_0)^2],$$

$$b_{12}^0=\pm\frac{2}{\delta}\mu e_1\,(1+e_3\xi_0)(b\alpha+\mu e_2^2\xi_0^2),\;\; c_{12}^0=\mu e_2\,[\mp 1+\Omega^2(1+2e_3\xi_0)-\frac{4\mu}{\delta}\Omega^2\,(e_1^2+e_2^2)\xi_0^2(1+e_3\xi_0)], \qquad (18)$$

$$c_{22}^0 = \pm 1 - \Omega^2\alpha(1-b) + \mu\{\pm(1+e_3\xi_0)[1 \pm \frac{4\mu}{\delta}\Omega^2 e_2^2\xi_0^2(1+e_3\xi_0)] + \Omega^2(\sigma_1^{02} - \sigma_2^{02})\},$$

$$\sigma_1^0 = \pm e_2\xi_0, \ \ \sigma_2^0 = \pm(1+e_3\xi_0), \quad \delta = \widetilde{C}^{(0)} = b\alpha + \mu(e_1^2+e_2^2)\xi_0^2, \quad \beta = \Omega\delta.$$

Там, где в записи встречается двойной знак, верхний знак соответствует значению $\theta_0 = 0$, а нижний – значению $\theta_0 = \pi$. Поскольку $m = n = 1$, то проверка выполнимости условия (11) сводится к нахождению условий существования общего корня у квадратных уравнений $a_{12}^0\lambda^2 + b_{12}^0\lambda + c_{12}^0 = 0$ и $a_{22}^0\lambda^2 + c_{22}^0 = 0$. Очевидно, что для этого необходимо и достаточно равенство нулю величин b_{12}^0, $\Delta = a_{22}^0 c_{12}^0 - a_{12}^0 c_{22}^0$ (так как $a_{22}^0 > 0$, $c_{22}^0 > 0$). Как следует из (18), b_{12}^0 обращается в нуль только тогда, когда $e_1 = 0$ или $1 + e_3\xi_0 = 0$. Возможны следующие варианты.

1 *а*) ($e_2 \neq 0$), $e_1 = 0$, $\xi_0 = 0$. Тогда $\Delta = \mu e_2[\pm(1 - a\alpha) + \Omega^2(a+b-1)]$, и условие (11) выполняется только при

$$\Omega^2 = \Omega_1^2 = \pm(a\alpha - 1)/(a+b-1) \tag{19}$$

(выражение $a + b - 1$ соответствует выражению $I_1 + I_3 - I_2$ и всегда принимает положительные значения).

1 *б*) ($e_2 \neq 0$), $e_1 = 0$, $\xi_0 \neq 0$. В этом случае $\sigma_1^0 \neq 0$, значит из условия существования решения получаем $\sigma_2^0 = 1/\Omega^2$, $\xi_0 = (\pm 1/\Omega^2 - 1)/e_3$. Имеем

$$\Delta = \frac{\mu e_2}{\Omega^8 e_3^4}\{3\mu^2 e_2^2[\mp e_2^2\Omega^8 + (1+3e_2^2)\Omega^6 \mp 3(2e_2^2-1)\Omega^4 + (3+e_2^2)\Omega^2 \mp 1] -$$

$$-\mu e_3^2\Omega^4[\alpha(a-b+1)e_2^2\Omega^6 \pm (\alpha(a+b-2)-1)e_2^2\Omega^4 - ((5a\alpha - \alpha - 2)e_2^2 - b\alpha)\Omega^2 \pm$$

$$\pm(3a\alpha - 1)e_2^2 \mp b\alpha] + b\alpha e_3^4\Omega^8[-\alpha(a-b+1)\Omega^2 \pm (a\alpha+1)]\}, \quad e_2^2 + e_3^2 = 1.$$

В отличие от предыдущего случая, выражение в квадратных скобках содержит величины μ, e_3, характеризующие СУ. Поэтому для любого набора параметров основной системы a, b, α, Ω можно избежать выполнения условия (11) за счет выбора массы m_N (то есть μ), исключающей равенство Δ нулю.

2 *а*) ($e_2 = 0$), $e_1 = 0$, $e_3 = \pm 1$. В этом случае условие (11) выполняется тождественно, более того, $a_{12}^0 = b_{12}^0 = c_{12}^0 = 0$, и для уравнений возмущенного движения имеет место критический случай пары чисто мнимых корней (уравнения линейного приближения не дают решения задачи устойчивости).

2 *б*) $e_1 \neq 0$. Значит для выполнения (11) необходимо, чтобы имело место равество $1 + e_3\xi_0 = 0$, но тогда $\sigma_2^0 = 0 \neq 1/\Omega^2$, как следствие, $\sigma_1^0 = 0$, что влечет за собой $e_2 = 0$ (поскольку $\xi_0 \neq 0$). Получаем $a_{12}^0 = c_{12}^0 = 0$. Однако, в отличие от случая 2 *а*), критическим является только положение точки O_2, соответствующее $\xi_0^{\text{кр}} = -1/e_3$; допустимым же является любое положение этой точки. Поэтому для достижения результата достаточно закрепить СУ в любой точке, не соответствующей значению $\xi_0^{\text{кр}}$.

Таким образом,как следует из утверждения теоремы, любое расположение СУ, исключая вышеперечисленные особые случаи, позволяет стабилизировать движение основной системы.

4. Устойчивость равномерных вращений вокруг вертикальной оси. Рассмотрим вопрос об устойчивости режима (2) для расширенной системы. Ограничимся случаем $e_2 = 1$. Тогда

$$\sigma_1^0 = \xi_0\cos\theta_0 - \sin\theta_0, \ \sigma_2^0 = \xi_0\sin\theta_0 + \cos\theta_0, \quad a_{12}^0 = -\mu, \quad a_{22}^0 = a\alpha + \mu(1+\xi_0^2),$$

$$b_{12}^0 = 0, \quad c_{12}^0 = \mu(\Omega^2 - \cos\theta_0) + \frac{2\mu\Omega^2}{\widetilde{C}^0}\cos\theta_0\sigma_1^0[\alpha(1-b)\sin 2\theta_0 - 2\mu\sigma_1^0\sigma_2^0],$$

$$c_{22}^0 = \cos\theta_0 - \alpha(1-b)\Omega^2[\cos 2\theta_0 - \frac{\alpha(1-b)}{\widetilde{C}^0}\sin^2 2\theta_0] + \mu[\sigma_2^{(0)} + \Omega^2(\sigma_1^{02} - \sigma_2^{02}) -$$

$$-\frac{4\alpha(1-b)}{\widetilde{C}^0}\Omega^2 \sin 2\theta_0\sigma_1^0\sigma_2^0 + \frac{4\mu}{\widetilde{C}^0}\Omega^2\sigma_1^{02}\sigma_2^{02}], \ \widetilde{C}^0 = b\alpha + \alpha(1-b)\sin^2\theta_0 + \mu\sigma_1^{02}.$$

В случае 3) имеем: $\xi_0 = 0, \ \sigma_1^0 = 0, \ \sigma_2^0 = 1/\cos\theta_0$,

$$\Delta = \frac{\mu}{(1-b)\widetilde{C}^0\cos\theta_0}\{[a - a\alpha(1-b)\cos{\theta_0}^2 + (1-b)\sin{\theta_0}^2]\widetilde{C}^0 + (1-b)^2\sin 2{\theta_0}^2\}. \qquad (20)$$

Если $b > 1$, то, как отмечалось в пункте 1, $\cos\theta_0 < 0$, тогда $c_{12}^0 > 0$, и, поскольку $a_{12}^0 < 0$, то $\Delta > 0$ для любых допустимых значений θ_0 (или Ω^2). Опуская детали анализа выражения в фигурных скобках в (20) (его знак совпадает со знаком Δ), заметим, что при $b < 1, \ \alpha < \min[3/a, 1/(1-b)]$ оно также положительно. Если же $b < 1, \ \alpha > \min[3/a, 1/(1-b)]$, то равенство $\Delta = 0$ может определять одно или два "критических" значения θ_0 (или Ω^2).

Следовательно, согласно части I теоремы движение расширенной системы асимптотически устойчиво по отношению к позиционным координатам и скоростям, то есть основная система пассивно стабилизирована. Исключение *могут* составлять одно или два критических значения угловой скорости вращения.

Замечание. Напомним, что выполнение условия (11) означает "нестабилизируемость"движения системы только на основе уравнений первого приближения, из чего совсем не следует ее нестабилизируемость вообще. Более глубокое рассмотрение ситуации требует анализа нелинейных слагаемых в уравнениях движения. В частности, можно показать что в случае 2 *а*) (п. 3) стабилизация происходит.

1. *Krupa M., Schagerl M., Steindl A., Troger H.* Stability of relative equilibria. Comparison of four methods// Meccanica – 2001 – **35** – P. 325-351.
2. *Peiffer K., Savchenko A.Ya.* On passive stabilization in critical cases // J. of Math. Analysis and Applications. – 2000. – **244**. – P. 106-119.
3. *Peiffer K., Savchenko A.Ya.* On the some asymptotic behavior of a passively stabilized system with one critical variable // Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli. – 2000 – **LXVII**. – P. 157-168.
4. *Пузырёв В.Е.* Об устойчивости стационарных движений механических систем с неполной диссипацией энергии// Механика твердого тела. – 2002. – Вып. 32. – С. 99-104.
5. *Пузырёв В.Е.* Об устойчивости решения линейной автономной системы, находящейся под действием сил сопротивления с неполной диссипацией энергии// – Тр. ИПММ НАНУ. – 2003. – Вып. 8. – С. 111-115.
6. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. - М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
7. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
techmech@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 10.09.03