ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2003. Вып. 33

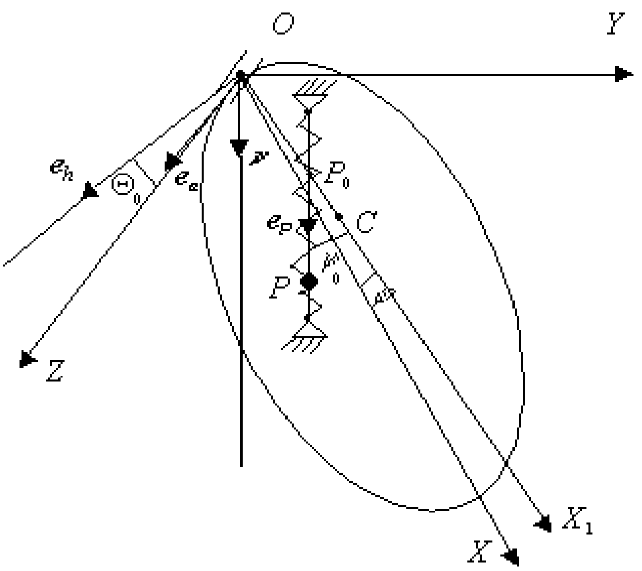
УДК 531.38

©2003. **А.Е. Позднякович, А.Я. Савченко**

ПАССИВНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА ОТНОСИТЕЛЬНО НАКЛОННОЙ ОСИ

Рассмотрена задача о пассивной стабилизации [1, 2] физического маятника с помощью линейного осциллятора с трением. Получены условия асимптотической устойчивости положения равновесия маятника, ось которого составляет с вертикалью некоторый постоянный угол. Показано, что стабилизация происходит, исключая случай вертикального расположения оси колебаний маятника и случай, когда ось колебаний осциллятора параллельна оси колебаний маятника.

1. Постановка задачи. Приведение уравнений движения к каноническому виду. Рассмотрим физический маятник S, совершающий колебания относительно оси, направляющий вектор которой $\boldsymbol{e}_a$ образует с вертикалью (направлением вектора силы тяжести) угол $90^\circ - \theta_0$. Пусть C – центр масс тела S, обозначим его (центра) ортогональную проекцию на ось вращения через O. Свяжем с точкой O неподвижную прямоугольную систему координат $Oxyz$, третья ось которой совпадает с осью вращения $\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_a$, вторая ось расположена горизонтально, первая ось – таким образом, что $\boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_a$ (см. рисунок).



Направим по вектору OC ось Ox_1 связанной с маятником системы координат, третья ось этой системы Oz_1 совпадает с Oz. В плоскости Ox_1z, вдоль прямой, проходящей через точку P_0 оси Ox_1 под углом ψ_0, совершает колебательное движение материальная точка P. На эту точку действуют, наряду с силой тяжести, линейная упругая сила и сила вязкого трения. Обозначим $|OC| = l$, $|OP_0| = l_0$, массы маятника и точки P примем соответственно за M и m, а коэффициенты упругой и диссипативной сил – за $\tilde{\varkappa}$ и $\tilde{k}$. Выберем в качестве обобщенных координат угол φ между осями Ox и Ox_1, а также расстояние $\tilde{u}$ от точки P до точки P_0. Записывая радиус-вектор точки P в связанной с телом системе координат $\boldsymbol{r}_P = l_1 \boldsymbol{e}_{x_1} + \tilde{u}\boldsymbol{e}_P$ и учитывая, что $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_z$, находим $\boldsymbol{v}_P = \dot{\tilde{u}}\boldsymbol{e}_P + \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_z \times (l_1\boldsymbol{e}_{x_1} + \tilde{u}\boldsymbol{e}_P) = \dot{\tilde{u}}\boldsymbol{e}_P + \dot{\varphi}(l_1 + u\cos\psi_0)\boldsymbol{e}_{y_1}$. Тогда для кинетической энергии рассматриваемой системы получаем выражение

$$T = \frac{1}{2}\{J\dot{\varphi}^2 + m[\dot{\tilde{u}}^2 + \dot{\varphi}^2(l_1 + \tilde{u}\cos\psi_0)^2]\},$$

где J – момент инерции тела относительно оси вращения.

Потенциальная энергия системы задается следующим образом

$$\Pi = -g(M\boldsymbol{r}_C \cdot \boldsymbol{\nu} + m\boldsymbol{r}_P \cdot \boldsymbol{\nu}) + \frac{1}{2}\tilde{\varkappa}(\tilde{u} - \tilde{u}_0)^2.$$

Здесь g – ускорение силы тяжести, а единичный вектор вертикали $\boldsymbol{\nu}$ имеет вид

$$\boldsymbol{\nu} = \cos\theta_0 \cos\varphi \; \boldsymbol{e}_{x_1} - cos\theta_0 \sin\varphi \; \boldsymbol{e}_{y_1} - \sin\theta_0 \; \boldsymbol{e}_z.$$

Запишем уравнения движения данной механической системы в форме Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j(\dot{q}_s, q_s) \quad (j, s = 1; 2),$$

где

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}\{J\dot{\varphi}^2 + m[\dot{\tilde{u}}^2 + \dot{\varphi}^2(l_1 + \tilde{u}\cos\psi_0)^2]\} + g\{[Ml + m(l_1 + \tilde{u}\cos\psi_0)]\cos\theta_0\cos\varphi +$$

$$+ \; mu\sin\psi_0\sin\theta_0\} - \frac{1}{2}\tilde{\varkappa}(\tilde{u} - \tilde{u}_0)^2.$$

Получим

$$\{J + m(l_1 + \tilde{u}\cos\psi_0)^2]\}\ddot{\varphi} + 2m\cos\psi_0(l_1 + \tilde{u}\cos\psi_0)\dot{\varphi}\dot{\tilde{u}} +$$

$$+ \; g[Ml + m(l_1 + \tilde{u}\cos\psi_0)]\cos\theta_0\sin\varphi = 0, \tag{1}$$

$$m\ddot{\tilde{u}} - m\cos\psi_0(l_1 + \tilde{u}\cos\psi_0)\dot{\varphi}^2 - mg(\cos\psi_0\cos\theta_0\cos\varphi + \sin\psi_0\sin\theta_0) + \tilde{\varkappa}(\tilde{u} - \tilde{u}_0) = -\tilde{k}\dot{\tilde{u}}.$$

Уравнения (1) допускают решение

$$\varphi^{(0)} = 0, \quad \tilde{u}^{(0)} = \tilde{u}_0 + \frac{mg}{\tilde{\varkappa}}\cos(\theta_0 - \psi_0), \quad \dot{\varphi}^{(0)} = 0, \quad \dot{\tilde{u}}^{(0)} = 0, \tag{2}$$

которому соответствует положение равновесия изучаемой механической системы. Введем безразмерные переменные и параметры по формулам

$$u = \frac{\tilde{u}}{l}, \quad \tau = \sqrt{\frac{Mgl}{J}}t, \quad \mu = \frac{ml^2}{J}, \quad d = \frac{l_1}{l}, \quad \sigma = \frac{J}{Ml^2}, \quad \varkappa = \frac{J}{Mgl}\frac{\tilde{\varkappa}}{m}, \quad k = \sqrt{\frac{J}{Mgl}}\frac{\tilde{k}}{m}. \tag{3}$$

Переходя к возмущениям

$$\varphi = x, \quad u = y + \alpha, \quad \dot{\varphi}^{(0)} = \dot{x}, \quad \dot{u} = \dot{y}, \quad (\alpha = \frac{\tilde{u}_0}{l} + \frac{mg}{l\tilde{\varkappa}}\cos(\theta_0 - \psi_0))$$

и обозначая штрихом дифференцирование по τ, получаем уравнения возмущенного движения для системы (1)

$$\{1 + \mu[d + (y + \alpha)\cos\psi_0]^2\} \; x'' + 2\mu[d + (y + \alpha)\cos\psi_0]\cos\psi_0 \; x' \; y' +$$

$$+ \{1 + \mu\sigma[d + (y + \alpha)\cos\psi_0]\}\cos\theta_0\sin x = 0,$$

$$y'' + k \; y' + \varkappa y - [d + (y + \alpha)\cos\psi_0]\cos\psi_0 x'^2 + \sigma\cos\psi_0\cos\theta_0(1 - \cos x) = 0.$$

Учитывая представление

$$\{1+\mu[d+(y+\alpha)\cos\psi_0]^2\}^{-1}=\frac{1}{\delta}[1-2\frac{\mu}{\delta}(d+\alpha\cos\psi_0)\ \cos\psi_0\ y+\cdots],\ \ \delta=1+\mu(d+\alpha\cos\psi_0)^2,$$

получаем следующую систему уравнений

$$\begin{gathered} x''+\lambda^2x=a_1x'y'+a_2xy+X^{(3)}(x',x,y',y)+\cdots\ , \\ y''+ky'+\varkappa y=b_1x'^2+b_2x^2+\cos^2\psi_0\ x'^2y+\cdots\ . \end{gathered} \tag{4}$$

Здесь

$$\lambda^2=\frac{1}{\delta}[1+\mu\sigma(d+\alpha\cos\psi_0)]\cos\theta_0\ \ (\lambda^2>0),\ \ a_1=-2\frac{\mu}{\delta}(d+\alpha\cos\psi_0)\ \cos\psi_0,$$

$$b_1=(d+\alpha\cos\psi_0)\cos\psi_0, \tag{5}$$

$$a_2=-\frac{\mu}{\delta^2}\ \cos\psi_0\cos\theta_0\{\delta\sigma-2(d+\alpha\cos\psi_0)[1+\mu\sigma(d+\alpha\cos\psi_0)]\},\ \ b_2=-\frac{\sigma}{2}\cos\psi_0\cos\theta_0,$$

функция $X^{(3)}$ содержит слагаемые только нечетной степени по x', x, многоточием здесь и далее обозначена совокупность членов разложения более высокого порядка малости.

2. Условия асимптотической устойчивости изучаемого движения. Рассмотрим вопрос об устойчивости нулевого решения системы (4). Характеристичесое уравнение для линейной части этой системы имеет пару чисто мнимых корней и два корня с отрицательными вещественными частями. Введем комплексно сопряженные переменные $z=x+ix'/\lambda$, $\overline{z}=x-ix'/\lambda$, и воспользуемся методикой исследования критического случая пар чисто мнимых корней, описанной в монографии [3]. Возьмем функцию Ляпунова

$$\begin{gathered} V(z,\overline{z},y',y)=z\bar{z}+\beta V^{(2)}(y',y)+y'(k_{12}z^2+k_{11}z\bar{z}+\bar{k}_{12}\bar{z}^2)\ + \\ +\ y(k_{22}z^2+k_{21}z\bar{z}+\bar{k}_{22}\bar{z}^2)\ +\ V^{(4)}(z,\bar{z},y',y), \end{gathered}$$

β – некоторая вещественная, а k_{12}, k_{11}, k_{21}, k_{22} – комплексные постоянные. Функцию V можно подобрать таким образом, что ее полная производная по времени τ в силу уравнений возмущенного движения имеет вид $V'=V_0'+o(V_0')$, где $V_0'=V'^{(2)}(y',y)+Gz^2\bar{z}^2$, при этом форма $V'^{(2)}(y',y)$ является отрицательно определенной, а постоянная G определяется из условия $V'^{(4)}(z,\bar{z})=Gz^2\bar{z}^2$. Проводя соответствующие вычисления, получаем

$$G=\frac{1}{2}[(b_2-b_1\lambda^2)Rek_{12}+(b_2+b_1\lambda^2)Rek_{11}]. \tag{6}$$

Если $G<0$, то нулевое решение системы (4) асимптотически устойчиво, если $G>0$ – то неустойчиво. Коэффициенты k_{12}, k_{11} находятся из условия $V'^{(3)}(z,\bar{z},y',y)=0$. Заметим, что величины k_{js} $(j,s=1;2)$ линейно зависят от параметра β, то есть представимы в виде $k_{js}=k^0_{js}+\beta k^\beta_{js}$. В свою очередь, для величины G имеем $G==G_0+\beta G_\beta$, где G_0 получается формальной заменой в правой части равенства (6) k на k^0. При выборе постоянной β достаточно малой, знак G совпадает со знаком G_0, поэтому для решения задачи устойчивости достаточно определить величины k^0_{1s} $(s==1;2)$. Находим их из следующей системы линейных алгебраических уравнений

$$-(2\imath\lambda+k)k^0_{12}+k^0_{22}-\frac{a_1}{2}=0,\ \ -kk^0_{11}+k^0_{21}+a_1=0,\ \ -2\imath\lambda k^0_{22}-\varkappa k^0_{12}-\frac{\imath a_2}{2\lambda}=0,\ \ -\varkappa k^0_{11}=0.$$

Получаем

$$k_{11}^0 = 0, \quad k_{12}^0 = \frac{\imath(a_1\lambda + a_2/2\lambda)}{4\lambda^2 - k - 2\imath k\lambda}, \quad G_0 = -\frac{k(b_2 - b_1\lambda^2)(2a_1\lambda^2 + a_2)}{2[(4\lambda^2 - \varkappa)^2 + 4k^2\lambda^2]^2}.$$

Очевидно, что знак G_0 противоположен знаку выражения $G_\star = (b_2 - b_1\lambda^2)(2a_1\lambda^2 + a_2)$. Подставляя значения величин a_j, b_j $(j = 1; 2)$ из (5), после преобразований получаем следующее выражение

$$G_\star = \frac{\mu}{2\delta^3}\Delta^2 \cos^2\theta_0 \cos^2\psi_0, \quad \Delta = \sigma + 2(d + \alpha\cos\psi_0) + 3\mu\sigma(d + \alpha\cos\psi_0)^2. \qquad (7)$$

Как следует из (7), трение, действующее на массу P, делает асимптотически устойчивыми колебания физического маятника, исключая случаи обращения $G_\star$ в ноль. Нетрудно видеть, что равенство $G_\star$ нулю возможно в следующих случаях:
1) $\cos\theta_0 = 0$; 2) $\cos\psi_0 = 0$; 3)$\Delta = 0$. Первое из этих условий означает, что ось вращения маятника совпадает с вертикалью. При этом координата φ становится циклической. Равенство $\cos\psi_0 = 0$ выполняется только тогда, когда ось, вдоль которой движется точка P, параллельна оси Oz маятника. Что же касается третьего случая, то рассматривая выражение для Δ как квадратный трехчлен относительно $(d + \alpha\cos\psi_0)$, легко видеть, что знак его дискриминанта совпадает со знаком выражения $1 - 3\mu\sigma^2$ или, с учетом формул (3), со знаком выражения $M^2l^2 - 3mJ$. Поэтому $\Delta > 0$ в случае, когда $m > M^2l^2/3J$. Если же $m < M^2l^2/3J$, то условие $\Delta = 0$ определяет два значения параметра α, которые соответствуют "критическим"точкам закрепления пружины.

В заключение отметим, что выражение для G_0 характеризует скорость затухания возмущенного движения по "критическим"переменным x, $\dot{x}$ [2]. Поэтому это выражение можно использовать для определения оптимальных характеристик стабилизирующего устройства.

1. *Peiffer K., Savchenko A.Ya.* On passive stabilization in critical cases // J. of Math. Analysis and Applications. – 2000. – **244**. – P. 106-119.
2. *Peiffer K., Savchenko A.Ya.* On the some asymptotic behavior of a passively stabilized system with one critical variable // Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli. – 2000 – **LXVII**. – P. 157-168.
3. *Савченко А.Я., Игнатьев А.О.* Некоторые задачи устойчивости неавтономных динамических систем. – Киев: Наук. думка, 1989. – 208 с.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
techmech@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 30.05.03