ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2003. Вып. 33

УДК 531.38, 531.36

©2003. **Ю.Б. Коносевич**

УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ ДВИЖЕНИЯ СИНХРОННОГО ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ

Изучается гироскоп в кардановом подвесе, установленный на неподвижном основании в поле силы тяжести и снабженный электродвигателем синхронного типа. Если наружная ось подвеса вертикальна, то уравнения движения рассматриваемой системы допускают семейство стационарных решений, описывающих регулярные прецессии ротора вокруг наружной оси подвеса или равномерные вращения ротора вокруг неподвижной оси. На основе анализа уравнений первого приближения найдены достаточные условия устойчивости таких движений.

Устойчивость стационарных движений тяжелого гироскопа в кардановом подвесе *при отсутствии трения* на осях подвеса и ротора изучалась в работах [1–3] и др. Для случая, когда ротор приводится во вращение *асинхронным* электродвигателем, в работе [4] рассматривалась устойчивость равномерных вращений по первому приближению, в [5] с помощью второго метода Ляпунова получено достаточное условие устойчивости стационарных движений асинхронного гироскопа, а в [6] — необходимое и достаточное условие. В случае, когда ротор приводится во вращение электродвигателем *синхронного* типа, в статье [4] изучалось характеристическое уравнение для режимов равномерного вращения ротора, однако условия устойчивости таких режимов в этой статье, а также в монографии [7] не приведены. Целью данной работы является получение достаточных условий устойчивости стационарных движений синхронного гироскопа в кардановом подвесе с помощью первого метода Ляпунова.

1. Условия существования стационарных режимов движения синхронного гироскопа. Задача о гироскопе в кардановом подвесе рассматривается в следующей обобщенной постановке, берущей свое начало от работы [8]. Изучается механическая система трех твердых тел S^1, S^2, S^3, последовательно соединенных цилиндрическими шарнирами. Тело S^1 имеет одну степень свободы относительно основания — вращение вокруг фиксированной в основании оси l^1 — и несет на себе ось l^2 вращения тела S^2, третье тело S^3 (ротор) может только вращаться вокруг оси l^3, неподвижной в S^2. При этом ось l^2 неколлинеарна осям l^1, l^3. В отличие от обычно принятой модели гироскопа в кардановом подвесе, упомянутые оси, вообще говоря, не пересекаются в одной точке (центре подвеса) и не являются главными осями инерции для содержащих их тел. Это дает возможность изучить влияние широкого класса конструктивных несовершенств на движение гироскопа в кардановом подвесе. Рассматривается движение такой системы в однородном поле силы тяжести при неподвижном основании.

Положение системы в каждый момент времени t определяют углы α, β, φ. Здесь α — угол поворота тела S^1 относительно неподвижного основания, β — угол поворота S^2 относительно S^1 и φ — угол поворота S^3 относительно S^2.

Чтобы обеспечить существование семейства стационарных режимов движения (регулярных прецессий или равномерных вращений ротора), предполагается, что ротор S^3 динамически симметричен относительно l^3, то есть $A^3_{22} = A^3_{33} = A$, $A^3_{11} = C$, $A^3_{ij} =$

$= 0$ $(i \neq j)$, $c = 0$ в обозначениях статьи [9], и выполнено одно из условий: а) наружная ось l^1 вертикальна, то есть $\theta^1 = 0$, б) система статически уравновешена относительно осей подвеса l^1, l^2. Тогда коэффициенты G, N, Q в выражении кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2}(G\dot{\alpha}^2 + H\dot{\beta}^2 + C\dot{\varphi}^2 + 2N\dot{\alpha}\dot{\beta} + 2Q\dot{\alpha}\dot{\varphi} + 2R\dot{\beta}\dot{\varphi})$$

зависят только от угла β, потенциальная энергия U при условии а) зависит от β, а при условии б) $U \equiv \text{const}$. Выражения функций $G(\beta), N(\beta)$, $Q(\beta), U(\beta)$ через β и механические параметры системы, а также выражения H, R через механические параметры следуют из формул (6)–(15) статьи [9].

Поскольку кинетическая энергия T — положительно определенная квадратичная форма скоростей $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\varphi}$, то в соответствии с критерием Сильвестра коэффициенты этой формы при всех значениях β удовлетворяют неравенствам

$$J(\beta) = \begin{vmatrix} G(\beta) & N(\beta) & Q(\beta) \\ N(\beta) & H & R \\ Q(\beta) & R & C \end{vmatrix} > 0, \qquad \begin{array}{l} J_1(\beta) = G(\beta)H - N^2(\beta) > 0, \\ J_2(\beta) = G(\beta)C - Q^2(\beta) > 0, \\ G(\beta) > 0. \end{array} \tag{1}$$

Рассмотрим случай, когда ротор приводится во вращение электродвигателем синхронного типа. В этом случае в статоре имеется электромагнитное поле, которое равномерно вращается по закону ωt, а сумма вращающего момента двигателя и момента сил трения относительно оси ротора в линейном приближении выражается формулой

$$L = L(\varphi - \omega t, \dot{\varphi}) = -\lambda_1(\varphi - \omega t - \gamma_0) - \lambda_2(\dot{\varphi} - \omega). \tag{2}$$

Здесь γ_0 — значение угла $\gamma = \varphi - \omega t$, при котором вращающий момент синхронного двигателя уравновешивает момент сил сопротивления (при угловой скорости вращения ротора, равной угловой скорости вращения поля статора). Положительные постоянные $\lambda_1, \lambda_2, \omega$ и угол γ_0 являются характеристиками синхронного двигателя. Трение на осях подвеса l^1, l^2 предполагается отсутствующим.

Тогда дифференциальные уравнения движения синхронного гироскопа в кардановом подвесе, записанные в форме уравнений Лагранжа, имеют следующий вид

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}[G(\beta)\dot{\alpha} + N(\beta)\dot{\beta} + Q(\beta)\dot{\varphi}] = 0, \\ &\frac{d}{dt}[N(\beta)\dot{\alpha} + H\dot{\beta} + R\dot{\varphi}] - \dot{\alpha}[\frac{G'(\beta)\dot{\alpha}}{2} + N'(\beta)\dot{\beta} + Q'(\beta)\dot{\varphi}] = -U'(\beta), \\ &\frac{d}{dt}[Q(\beta)\dot{\alpha} + R\dot{\beta} + C\dot{\varphi}] = L(\varphi - \omega t, \dot{\varphi}). \end{aligned} \tag{3}$$

Штрихом здесь обозначено дифференцирование по β.

Легко видеть, что система (3) допускает решение вида

$$\dot{\alpha} = \Omega, \qquad \beta = \beta_0, \qquad \varphi = \omega t + \gamma_0, \tag{4}$$

если постоянные Ω, β_0 связаны соотношением

$$-\Omega\Big[\frac{\Omega}{2}G'(\beta_0) + \omega Q'(\beta_0)\Big] + U'(\beta_0) = 0. \tag{5}$$

При $\Omega \neq 0$ этому решению соответствует регулярная прецессия ротора: ротор S^3 вращается вокруг своей оси симметрии l^3 с постоянной угловой скоростью ω, и при этом ось l^3, сохраняя неизменное положение относительно наружной оси l^1, вращается вокруг нее с постоянной угловой скоростью Ω. При $\Omega = 0$ решение (4) описывает равномерное вращение ротора вокруг неподвижной оси l^3.

Функции G, Q, U являются 2π-периодическими по β. Поэтому при каждом фиксированном значении Ω левая часть равенства (5) представляется в виде производной по β от 2π-периодической функции. Поскольку такая функция имеет в промежутке $[0; 2\pi)$ по крайней мере две точки локального экстремума, то при каждом Ω условие (5) выполняется по крайней мере в двух точках β_0 промежутка $[0; 2\pi)$.

Из первого уравнения (3) следует, что

$$G(\beta)\dot{\alpha} + N(\beta)\dot{\beta} + Q(\beta)\dot{\varphi} = p \quad (p = \text{const}). \tag{6}$$

Соотношение (6) — это интеграл, соответствующий циклической координате α. Пользуясь тем, что $G(\beta) > 0$ при любом β, перейдем в лагранжевой системе уравнений (3) от переменных $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\varphi}, \beta, \varphi$ к переменным $p, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma$, где $\gamma = \varphi - \omega t$. Для этого во втором и третьем уравнениях (3) следует заменить $\dot{\alpha}$ выражением, которое следует из (6). В результате получим для новых переменных преобразованную систему уравнений

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\frac{(p-\omega Q)N + \dot{\beta}(GH - N^2) + \dot{\gamma}(GR - QN)}{G} + \frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{(p - \omega Q - \dot{\beta}N - \dot{\gamma}Q)^2}{2G} + U\right] = 0, \\
\frac{d}{dt}\frac{(p-\omega Q)Q + \dot{\beta}(GR - QN) + \dot{\gamma}(GC - Q^2)}{G} = L, \qquad \frac{dp}{dt} = 0.
\end{gathered} \tag{7}$$

При данном фиксированном значении p два первых уравнения (7) образуют приведенную систему, соответствующую этому p. Система (7) существенно проще исходной, поэтому дальнейшее исследование проведем, пользуясь системой (7). Так как $G(\beta) > 0$, то сделанное преобразование переменных взаимно однозначно и непрерывно в обе стороны. Следовательно, устойчивость любого решения исходной лагранжевой системы (3) эквивалентна устойчивости соответствующего решения преобразованной системы (7).

Изучаемому решению (4) исходной системы соответствует решение

$$p = p_0, \qquad \beta = \beta_0, \qquad \gamma = \gamma_0 \tag{8}$$

системы (7). Это решение существует, если выполнено условие

$$-\frac{p_0 - \omega Q(\beta_0)}{G(\beta_0)}\left[\frac{G'(\beta_0)}{2G(\beta_0)}(p_0 - \omega Q(\beta_0)) + \omega Q_0'(\beta_0)\right] + U'(\beta_0) = 0. \tag{9}$$

Постоянные Ω, p_0 в решениях (4), (8) связаны вытекающим из (6) соотношением

$$p_0 - \omega Q(\beta_0) = \Omega G(\beta_0). \tag{10}$$

2. Вывод характеристического уравнения. Для исследования устойчивости решения (8) системы (7) воспользуемся первым методом Ляпунова: линеаризуем систему (7) в окрестности рассматриваемого решения (8) и изучим характеристическое уравнение полученной линейной системы с постоянными коэффициентами. Чтобы записать линеаризованную систему, следует ввести возмущения p_1, β_1, γ_1 по формулам

$$p = p_0 + p_1, \qquad \beta = \beta_0 + \beta_1, \qquad \gamma = \gamma_0 + \gamma_1, \tag{11}$$

подставить выражения (11) в уравнения (7) и удержать линейные члены разложений указанных уравнений по степеням p_1, β_1, γ_1. При этом необходимо учесть условие (8).

Проделав указанные действия, получим для возмущений p_1, β_1, γ_1 следующую линейную систему с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned}
&\dot{p}_1 = 0,\\
&\ddot{\beta}_1(GH - N^2) + \ddot{\gamma}_1(GR - NQ) + \dot{\gamma}_1(Q\mu - GQ'\Omega) + \beta_1(\mu^2 + \rho G) - p_1 G\mu = 0,\\
&\ddot{\beta}_1(GR - NQ) + \ddot{\gamma}_1(GC - Q^2) + \dot{\beta}_1(GQ'\Omega - Q\mu) + \dot{\gamma}_1 G\lambda_2 + \gamma_1 G\lambda_1 = 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Здесь и далее для сокращения записи опущен аргумент β_0 у функций G, N, Q, зависящих от β, и введены следующие обозначения

$$\mu = G'\Omega + Q'\omega, \qquad \rho = -\Omega(\frac{\Omega}{2}G'' + \omega Q'') + U''. \tag{13}$$

Характеристическое уравнение системы (12) имеет вид

$$sP_4(s, p_0) = 0, \tag{14}$$

где P_4 – следующий полином четвертой степени

$$\begin{aligned}
P_4 = Js^4 + \lambda_2 J_1 s^3 + [-\rho Q^2 - 2\mu\Omega QQ' + \Omega^2 Q'^2 G +\\
+ C(\mu^2 + G\rho) + \lambda_1 J_1]s^2 + (\mu^2 + G\rho)\lambda_2 s + (\mu^2 + G\rho)\lambda_1.
\end{aligned} \tag{15}$$

Таким образом, для изучаемого решения (7) характеристическое уравнение всегда имеет нулевой корень $s = 0$. Дальнейшее исследование характеристического уравнения сводится к исследованию уравнения $P_4(s, p_0) = 0$, то есть характеристического уравнения приведенной системы.

3. Исследование характеристического уравнения. Рассмотрим теперь уравнение $P_4(s, p_0) = 0$. Введем обозначение

$$M = \Omega^2 GQ'^2 - 2\mu\Omega QQ' + C\mu^2. \tag{16}$$

Тогда коэффициент при s^2 записывается в виде $\rho J_2 + M + \lambda_1 J_1$.

Покажем, что $M \geq 0$. Рассмотрим выражение (16) для M как квадратичную форму относительно переменных $\Omega Q_0', \mu$. Определитель этой формы J_2 и его главный минор первого порядка G положительны согласно (8). Следовательно, по критерию Сильвестра, форма M определенно положительна. Поэтому при любых $\Omega Q_0', \mu$ имеем $M \geq 0$.

Таким образом, характеристическое уравнение приведенной системы $P_4(s, p_0) = 0$ можно записать в виде

$$s^4 J + s^3 \lambda_2 J_1 + s^2(\lambda_1 J_1 + \rho J_2 + M) + s\lambda_2(\mu^2 + \rho G) + \lambda_1(\mu^2 + \rho G) = 0. \tag{17}$$

Здесь $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ по постановке задачи, $J, J_1, J_2, G > 0$ согласно (1), $M \geq 0$, как показано выше.

В соответствии с критерием Рауса-Гурвица, для уравнения четвертой степени

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$$

необходимое и достаточное условие отрицательности действительных частей всех его корней состоит в следующем. Вводятся числа T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 по формулам

$$T_0 = a_0 > 0, \qquad T_1 = a_1, \qquad T_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \qquad T_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix},$$

$$T_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = a_4T_3.$$

Все корни уравнения имеют отрицательные действительные части тогда и только тогда, когда все $T_j > 0,\ j = 0, 1, 2, 3, 4$. Для уравнения (17) имеем

$$T_0 = J, \qquad T_1 = \lambda_2 J_1, \qquad T_2 = \begin{vmatrix} \lambda_2 J_1 & J \\ \lambda_2(\mu^2 + \rho G) & \lambda_1 J_1 + \rho J_2 + M \end{vmatrix},$$
$$T_3 = a_3T_2 - a_4a_1^2 = \lambda_2(\mu^2 + \rho G)T_2 - \lambda_1(\mu^2 + \rho G)\lambda_2^2 J_1^2, \qquad T_4 = \lambda_1(\mu^2 + \rho G)T_3. \tag{18}$$

Условие $T_0 = J > 0$ выполняется всегда согласно (1). Условие $T_1 = \lambda_2 J_1 > 0$ также всегда выполняется, так как $\lambda_2 > 0$ по определению момента L, а $J_1 > 0$ согласно (1). Если условие $T_3 > 0$ выполняется, то, поскольку $\lambda_1 > 0$, будет $T_4 > 0$ только в случае, когда $\mu^2 + \rho G > 0$. Остались условия $T_2, T_3 > 0$. Условие $T_3 > 0$ можно записать в виде $\lambda_2(\mu^2 + \rho G)T_2 > \lambda_1(\mu^2 + \rho G)\lambda_2^2 J_1^2$, откуда при $\lambda_2 > 0$ и $\mu^2 + \rho G > 0$ будем иметь $T_2 > \lambda_1\lambda_2 J_1^2$. Следовательно, если выполнено условие $T_3 > 0$, то выполнено и условие $T_2 > 0$.

Таким образом, осталось рассмотреть условие $T_3 > 0$. С учетом выражения (18) для T_2 и неравенства $\lambda_2 > 0$ это условие принимает вид

$$\rho(J_1J_2 - JG) + J_1M - J\mu^2 > 0. \tag{19}$$

Здесь $J_1J_2 = G^2HC - GHQ^2 - N^2GC + N^2Q^2$, и поэтому $\rho(J_1J_2 - JG) = \rho(NQ - GR)^2$. Далее в соответствии с (16)

$$J_1M - J\mu^2 = H(\Omega GQ' - \mu Q)^2 + 2N^2\mu\Omega QQ' - N^2\Omega^2 GQ'^2 + \mu^2 GR^2 - 2\mu^2 NQR.$$

В результате неравенство (19) принимает вид

$$\frac{(\rho G + \mu^2)(NQ - GR)^2 + J(\mu Q - \Omega GQ')^2}{G} > 0.$$

Поскольку здесь $\mu^2 + \rho G > 0, J > 0$, то условие (19): $T_3 > 0$ выполняется только в случае, когда $NQ - GR$, $\mu Q - \Omega GQ'$ не равны одновременно нулю.

Итак, для решения (8) системы (7) характеристическое уравнение соответствующей линеаризованной системы имеет вид $s\,P_4(s,p_0)=0$, где $P_4(s,p_0)=0$ – характеристическое уравнение соответствующей приведенной системы. Характеристическое уравнение линеаризованной системы всегда имеет один нулевой корень. Остальные четыре корня этого уравнения имеют отрицательные действительные части при выполнении следующих двух условий

$$\rho G+\mu^2>0, \tag{20}$$

$$|GR-NQ|+|\mu Q-\Omega GQ'|\neq 0. \tag{21}$$

4. Доказательство устойчивости изучаемого решения. Если выполнены неравенства (20), (21), то для рассматриваемого решения (8) системы (7) имеем критический случай одного нулевого корня, причем решение (8) принадлежит семейству решений, зависящих от параметра p. Тогда, воспользовавшись теоремой, приведенной в [10, с. 113], заключаем, что решение (8) устойчиво (неасимптотически).

Достаточно простое доказательство устойчивости рассматриваемого решения легко получить и непосредственно следующим образом. Условие (8) существования у системы (7) решения (8) эквивалентно соотношению $f'(p_0,\beta_0)=0$, где

$$f(p,\beta)=\frac{[p-\omega Q(\beta)]^2}{2G(\beta)}+U(\beta). \tag{22}$$

Вычислив $f''(p,\beta)$, устанавливаем, что основное условие (20) эквивалентно неравенству $f''(p_0,\beta_0)>0$. Следовательно, в окрестности точки (p_0,β_0) соотношение $f'(p,\beta)=0$ определяет по теореме о неявной функции стационарное значение β_* как непрерывную функцию от p: $\beta_*=\beta_*(p)\quad(\beta_0=\beta_*(p_0))$.

Рассмотрим теперь приведенную систему, то есть первое и второе уравнения (7), где p считается параметром. Если положить в них $\beta=\beta_*(p)+\beta_1$, $\gamma=\gamma_0+\gamma_1$ и линеаризовать эти уравнения по $\dot\beta_1,\dot\gamma_1,\beta_1,\gamma_1$, то характеристическое уравнение такой линеаризованной системы будет иметь вид $P_4(s,p)=0$. Коэффициенты полинома $P_4(s,p)$ при значениях p, близких к p_0, будут близки к коэффициентам изученного полинома $P_4(s,p_0)$. Поэтому при таких p в силу непрерывности коэффициентов уравнения останутся выполненными условия (20), (21), обеспечивающие отрицательность действительных частей всех четырех корней уравнения $P_4(s,p)=0$. По теореме Ляпунова (см. [10]), отсюда следует асимптотическая устойчивость решения $\beta=\beta_*(p)$, $\gamma=\gamma_0$ приведенной системы. Иначе говоря, при достаточно малых начальных значениях $p_1,\dot\beta_1,\dot\gamma_1,\beta_1,\gamma_1$ будет $\dot\beta_1,\dot\gamma_1,\beta_1,\gamma_1\to 0\quad(t\to\infty)$.

Теперь становится ясным характер движения полной системы (7) вблизи изучаемого решения (8). При малом возмущении $p_1=p-p_0$ вместо стационарного положения β_0 возникает близкое к нему положение $\beta_*=\beta_*(p)$, к которому стремится угол β при $t\to\infty$, если только возмущения скоростей $\dot\beta,\dot\varphi$ и углов β,φ достаточно малы. При этом $\gamma_1\to 0\quad(t\to\infty)$, то есть в возмущенном движении угол φ стремится к невозмущенному режиму вращения $\varphi=\omega t+\gamma_0$. Таким образом, при условиях (20), (21) невозмущенное движение (8) в рассматриваемом критическом случае одного нулевого корня устойчиво по p,β и асимптотически устойчиво по $\dot\beta,\dot\varphi,\varphi$.

Приведенная система имеет структуру уравнений Лагранжа, записанных для некоторой механической системы с измененной кинетической и потенциальной энергией. Нетрудно заметить, что потенциальная энергия приведенной системы при данном p

выражается формулой (22). Следовательно, для изучаемого решения (8) условие его существования $f'(p_0, \beta_0) = 0$ означает, что при фиксированном p_0 точка β_0 является стационарной точкой приведенной потенциальной энергии $f(p_0, \beta) = 0$, то есть точкой, подозрительной на экстремум. Основное условие устойчивости: $f''(p_0, \beta_0) > 0$ при этом означает, что приведенная потенциальная энергия имеет в точке β_0 строгий минимум по β, который определяется членом второго порядка относительно $\beta - \beta_0$.

1. *Магнус К.* Об устойчивости движения тяжелого симметричного гироскопа в кардановом подвесе // Прикл. математика и механика. – 1958. – **22**, вып. 2. – С. 173-178.
2. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе // Там же. – **22**, вып. 3. – С. 374-378.
3. *Лунц Я.Л., Смолицкий Х.Л.* Об одном классе движений консервативных систем с одной нециклической координатой // Там же. – 1966. – **30**, вып. 4. – С. 617-624.
4. *Харламов С.А.* К теории астатического гироскопа с электрическим приводом, установленного в кардановом подвесе // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1963. – N 6. – С. 45-54.
5. *Крементуло В.В.* Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе при наличии момента относительно оси ротора // Изв. АН СССР. Механика. – 1965. – N 3. – С. 156-159.
6. *Коносевич Б.И.* Об устойчивости стационарных движений асинхронного гироскопа в кардановом подвесе // Механика твердого тела. – 1977. – Вып. 9. – С. 61-72.
7. *Климов Д.М., Харламов С.А.* Динамика гироскопа в кардановом подвесе. – М.: Наука, 1978. – 208 с.
8. *Харламов П.В.* Составной пространственный маятник // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 73-82.
9. *Коносевич Б.И.* Скорость ухода оси ротора в обобщенной задаче о гироскопе в кардановом подвесе // Там же. – 1972. – Вып. 4. – С. 82-92.
10. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 532 с.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
konos@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 30.02.03