

УДК 531.38

©2003. М.Е. Лесина, А.П. Харламов

## О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА НА ПОДВЕСЕ

В [1] дана постановка задачи о движении тела на подвесе, приближенная к описанному опыту [2, с. 99-100], предложена математическая модель экспериментальной установки, учитывающая диссипацию, неизбежную в реальном объекте, и наличие двигателя. На основе этой работы в [3] изучен переход к установившемуся движению тела из его начального состояния, в котором центр масс тела и концевые точки подвеса находились на одной вертикали. В [4] найдены зависимости установившейся конфигурации системы от угловой скорости ротора двигателя. В данной работе дана постановка задачи о движении тела на подвесе, осуществленного посредством жесткого стержня и двух шарниров Гука. Получены кинематические соотношения, динамические уравнения, рассмотрены стационарные движения тела на подвесе.

**Кинематические соотношения.** Статор, имеющийся в экспериментальной установке двигателя, закреплен на неподвижном основании так, что ось ротора вертикальна. С этой осью неизменно связана плоскость внешнего кольца первого шарнира Гука, центр которого  $O^0$  находится на упомянутой вертикали. Приложенный в  $O^0$  единичный вектор  $\varepsilon_1$  указывает направление этой вертикали, противоположное направлению вектора  $\mathbf{g}$  – ускорения земного притяжения. Приложенный в  $O^0$  вектор  $\varepsilon_2$  принадлежит плоскости внешнего кольца и ортогонален к  $\varepsilon_1$ , а  $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 \times \varepsilon_2$ . Сформированный таким образом базис  $O^0\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$  (на рисунке он изображен с началом в точке  $O$ ) оказывается неизменно связанным с ротором двигателя, вращающимся с угловой скоростью

$$\Omega = \Omega \varepsilon_1. \quad (1)$$

Ось внутреннего кольца первого шарнира Гука горизонтальна, а его плоскость составляет с плоскостью внешнего кольца угол  $\alpha$ ,  $\varepsilon_2$  указывает направление линии пересечения этих плоскостей. Вектор

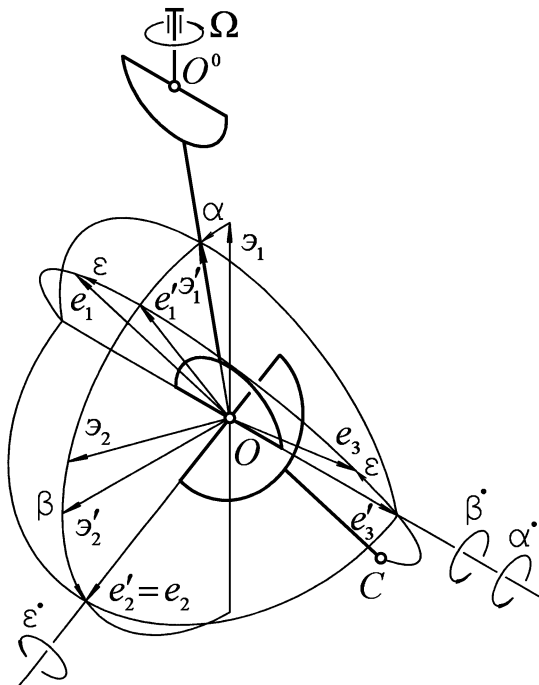
$$\varepsilon'_1 = \varepsilon_1 \cos \alpha + \varepsilon_2 \sin \alpha \quad (2)$$

принадлежит плоскости внутреннего кольца, а

$$\varepsilon'_2 = -\varepsilon_1 \sin \alpha + \varepsilon_2 \cos \alpha \quad (3)$$

ортогонален этой плоскости. Обозначая для единообразия  $\varepsilon'_3 = \varepsilon_3$ , получаем базис  $O^0\varepsilon'_1\varepsilon'_2\varepsilon'_3$ , неизменно связанный с внутренним кольцом шарнира Гука. Угловая скорость этого базиса

$$\omega_\alpha = \alpha \cdot \varepsilon'_3. \quad (4)$$



Базисы системы.

Внутреннее кольцо первого шарнира неизменно связано с внутренним кольцом второго шарнира Гука жестким стержнем пренебрежимо малой массы. Точка  $O$  – центр колец второго шарнира и  $l > 0$  – расстояние от  $O$  до  $O^0$ . В точке  $O$  введем базис  $O\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$ , параллельный базису  $O^0\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$ . Содержащая точку  $O$  ось внешнего кольца второго шарнира Гука имеет направление

$$\mathbf{e}'_2 = -\mathbf{e}'_1 \sin \gamma + \mathbf{e}'_3 \cos \gamma, \quad (5)$$

а вектор  $\mathbf{e}'_3$  совмещен с  $\mathbf{e}'_3$  и вместе с

$$\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}'_1 \cos \gamma + \mathbf{e}'_3 \sin \gamma \quad (6)$$

образует приложенный в  $O$  базис  $O\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$ . Угловая скорость этого базиса

$$\boldsymbol{\omega}_\gamma = \dot{\gamma} \mathbf{e}'_3. \quad (7)$$

С внешним кольцом неизменно связано тело, центр масс  $C$  которого принадлежит плоскости внешнего кольца. Расстояние от  $C$  до  $O$  обозначим через  $a > 0$  и введем вектор

$$CO = \mathbf{a} = a\mathbf{e}_1. \quad (8)$$

Угол между направлениями единичных векторов  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}'_1$  обозначим через  $\varepsilon$ , полагая, что  $\mathbf{e}_1$  принадлежит плоскости  $O\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_3$ , так что

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}'_1 \cos \varepsilon - \mathbf{e}'_3 \sin \varepsilon. \quad (9)$$

Углы  $\gamma$  и  $\varepsilon$  выбраны так, что направление  $\mathbf{e}'_2$  оси внешнего кольца ортогонально к  $\mathbf{e}_1$ , и с ним может быть совмещено направление  $\mathbf{e}_2$  неизменно связанного с телом базиса  $C\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ , где  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ , и поэтому

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}'_1 \sin \varepsilon + \mathbf{e}'_3 \cos \varepsilon, \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\omega}_\varepsilon = \dot{\varepsilon} \mathbf{e}_2. \quad (11)$$

Угловая скорость тела

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3 \quad (12)$$

есть сумма скоростей (1), (4), (7), (11)

$$\boldsymbol{\omega} = \Omega \mathbf{e}_1 + \alpha \dot{\alpha} \mathbf{e}'_3 + \dot{\gamma} \mathbf{e}'_3 + \dot{\varepsilon} \mathbf{e}_2. \quad (13)$$

Введем угол

$$\beta = \alpha + \gamma \quad (14)$$

отклонения оси  $CO$  тела от идущей вверх вертикали.

С учетом (2), (3), (5), (6), (9), (10), (12) – (14)

$$\omega_1 = \Omega \cos \varepsilon \cos \beta - \dot{\beta} \sin \varepsilon, \quad \omega_2 = -\Omega \sin \beta + \dot{\varepsilon}, \quad \omega_3 = \Omega \sin \varepsilon \cos \beta + \dot{\beta} \cos \varepsilon. \quad (15)$$

Вектор

$$\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_1 \quad (16)$$

имеет в неизменно связанном с телом базисе компоненты  $g_i$  :

$$\mathbf{g} = g_1 \mathbf{e}_1 + g_2 \mathbf{e}_2 + g_3 \mathbf{e}_3,$$

$$g_1 = -g \cos \varepsilon \cos \beta, \quad g_2 = g \sin \beta, \quad g_3 = -g \sin \varepsilon \cos \beta. \quad (17)$$

Так как вектор  $\mathbf{g}$  сохраняет направление в пространстве, то изменение его направления по отношению к телу описывают уравнения

$$\mathbf{g}^\bullet + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g} = \mathbf{0}$$

и значит,

$$g_1^\bullet = \omega_3 g_2 - \omega_2 g_3, \quad g_2^\bullet = \omega_1 g_3 - \omega_3 g_1, \quad g_3^\bullet = \omega_2 g_1 - \omega_1 g_2. \quad (18)$$

Понадобится и представление вектора  $\mathbf{l} = l \mathbf{e}'_1$  в базисе  $C \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$ :

$$\mathbf{l} = l_1 \mathbf{e}_1 + l_2 \mathbf{e}_2 + l_3 \mathbf{e}_3.$$

С учетом (5), (6), (9), (10), (14)

$$l_1 = l \cos \varepsilon \cos(\beta - \alpha), \quad l_2 = -l \sin(\beta - \alpha), \quad l_3 = l \sin \varepsilon \cos(\beta - \alpha). \quad (19)$$

Стержень  $O^0 O$  имеет  $O^0$  неподвижной точкой, а его угловая скорость — сумма  $\Omega \mathbf{e}_1$  и  $\alpha^\bullet \mathbf{e}'_3$ . Поэтому скорость точки  $O$

$$\mathbf{V} = (\Omega \mathbf{e}_1 + \alpha^\bullet \mathbf{e}'_3) \times (-l \mathbf{e}'_1). \quad (20)$$

Скорость  $\mathbf{v}$  центра масс  $C$  представим разложением в базисе  $C \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$ :

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3, \quad (21)$$

и скорость принадлежащей телу точки  $O$  получаем в виде

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times C \mathbf{O}. \quad (22)$$

Из (20), (21), (8), (16) следует

$$\mathbf{v} + a \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{l} \times (-\Omega \mathbf{g} + \alpha^\bullet g \mathbf{e}'_3) / g.$$

С учетом (21), (15), (17), (9), (10)

$$v_1 = \Omega(g_2 l_3 - g_3 l_2) / g + \alpha^\bullet l_2 \cos \varepsilon,$$

$$v_2 = -a \omega_3 + \Omega(g_3 l_1 - g_1 l_3) / g - \alpha^\bullet (l_3 \sin \varepsilon + l_1 \cos \varepsilon),$$

$$v_3 = a \omega_2 + \Omega(g_1 l_2 - g_2 l_1) / g + \alpha^\bullet (l_2 \sin \varepsilon).$$

Вносим в эти выражения (15), (17), (19)

$$v_1 = l[-\alpha^\bullet \cos \varepsilon \sin(\beta - \alpha) + \Omega \sin \varepsilon \sin \alpha],$$

$$v_2 = -a(\beta^\bullet \cos \varepsilon + \Omega \sin \varepsilon \sin \beta) - l \alpha^\bullet \cos(\beta - \alpha), \quad (23)$$

$$v_3 = a(\varepsilon^\bullet - \Omega \sin \beta) - l \Omega \cos \varepsilon \sin \alpha - l \alpha^\bullet \sin \varepsilon \sin(\beta - \alpha).$$

**Динамические уравнения.** Момент количества движения тела относительно  $O^0$  обозначим  $\mathbf{G}^0$

$$\begin{aligned}\mathbf{G}^0 &= \iiint_S (-l\mathbf{\varepsilon}'_1 + \mathbf{r}') \times (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') dm = \\ &= -l\mathbf{\varepsilon}'_1 \times m\mathbf{V} - l\mathbf{\varepsilon}'_1 \times (\boldsymbol{\omega} \times m\mathbf{r}_c) - \mathbf{V} \times m\mathbf{r}_c + \iiint_S \mathbf{r}' \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') dm, \\ \mathbf{G}^0 &= ml\mathbf{\varepsilon}'_1 \times (\boldsymbol{\omega} \times a\mathbf{e}_1 - \mathbf{V}) + \mathbf{V} \times ma\mathbf{e}_1 + I_{kl}\omega_k\mathbf{e}_l.\end{aligned}\quad (24)$$

Момент количества движения тела относительно  $O$  обозначим  $\mathbf{G}$

$$\begin{aligned}\mathbf{G} &= \iiint_S \mathbf{r}' \times ((\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') dm = \mathbf{r}_c \times m\mathbf{V} + I_{kl}\omega_k\mathbf{e}_l, \\ \mathbf{G} &= ma\mathbf{V} \times \mathbf{e}_1 + I_{kl}\omega_k\mathbf{e}_l.\end{aligned}\quad (25)$$

С учетом (22), (21), (8) имеем

$$\mathbf{V} \times \mathbf{e}_1 = (v_3 - a\omega_2)\mathbf{e}_2 - (v_2 + a\omega_3)\mathbf{e}_3.$$

Вектор  $\mathbf{G}$  представим разложением в базисе  $C\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ :  $\mathbf{G} = G_1\mathbf{e}_1 + G_2\mathbf{e}_2 + G_3\mathbf{e}_3$ , и будем считать третью ось главной  $I_{23} = I_{31} = 0$ , тогда

$$G_1 = I_1\omega_1 + I_{12}\omega_2, \quad G_2 = I_2\omega_2 + I_{12}\omega_1 + ma(v_3 - a\omega_2), \quad G_3 = I_3\omega_3 - ma(v_2 + a\omega_3). \quad (26)$$

Изменение во времени  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{G}^0$  дано уравнениями

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = -m\mathbf{a} \times (\mathbf{g} - \nu\mathbf{v}), \quad (27)$$

$$\frac{d\mathbf{G}^0}{dt} = \mathbf{L} + m(\mathbf{g} - \nu\mathbf{v})(\mathbf{1} + \mathbf{a}), \quad (28)$$

где  $\mathbf{L}$  – момент сил реакции,  $m\mathbf{g} \times (\mathbf{1} + \mathbf{a})$ ,  $-m\nu\mathbf{v} \times (\mathbf{1} + \mathbf{a})$  – моменты сил тяжести и силы сопротивления среды соответственно. Запишем уравнение (27) в компонентах

$$\begin{aligned}G_1^\bullet + \omega_2 G_3 - \omega_3 G_2 &= 0, \\ G_2^\bullet + \omega_3 G_1 - \omega_1 G_3 &= ma(g_3 - \nu v_3), \\ G_3^\bullet + \omega_1 G_2 - \omega_2 G_1 &= -ma(g_2 - \nu v_2)\end{aligned}$$

и внесем в эти уравнения значения (26):

$$I_1\omega_1^\bullet + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 + I_{12}(\omega_2^\bullet - \omega_3\omega_1) - ma(v_2\omega_2 + v_3\omega_3) = 0, \quad (29)$$

$$(I_2 - ma^2)\omega_2^\bullet + I_{12}(\omega_1^\bullet + \omega_2\omega_3) + (I_1 - I_3 + ma^2)\omega_3\omega_1 + ma(v_3^\bullet + v_2\omega_1) = ma(g_3 - \nu v_3), \quad (30)$$

$$(I_3 - ma^2)\omega_3^\bullet + I_{12}(\omega_1^2 - \omega_2^2) + (I_2 - I_1 - ma^2)\omega_1\omega_2 - ma(v_2^\bullet - v_3\omega_1) = -ma(g_2 - \nu v_2). \quad (31)$$

Сравнивая выражения (24), (25), (22), замечаем, что

$$\mathbf{G}^0 = \mathbf{G} - m(\mathbf{1} \times \mathbf{v}).$$

Вместо (28) можно записать теперь уравнение

$$m \frac{d(\mathbf{v} \times \mathbf{l})}{dt} = \mathbf{L} + m(\mathbf{g} - \nu \mathbf{v}) \times \mathbf{l},$$

из которого определим момент сил реакции. Соотношения (17), (15) обращают уравнения (18) в тождества. В уравнения (29) – (31) вносим значения (15), (23) и получаем

$$I_1 \beta^{\bullet\bullet} \sin \varepsilon - I_{12} \varepsilon^{\bullet\bullet} = F_1(\alpha^\bullet, \beta^\bullet, \varepsilon^\bullet; \alpha, \beta, \varepsilon), \quad (32)$$

$$I_2 \varepsilon^{\bullet\bullet} - I_{12} \beta^{\bullet\bullet} \sin \varepsilon - mal \alpha^{\bullet\bullet} \sin \varepsilon \sin(\beta - \alpha) = F_2(\alpha^\bullet, \beta^\bullet, \varepsilon^\bullet; \alpha, \beta, \varepsilon), \quad (33)$$

$$I_3 \beta^{\bullet\bullet} + mal \alpha^{\bullet\bullet} \cos(\beta - \alpha) = F_3(\alpha^\bullet, \beta^\bullet, \varepsilon^\bullet; \alpha, \beta, \varepsilon), \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} F_1 = & -I_1(\varepsilon^\bullet \beta^\bullet \cos \varepsilon + \Omega \varepsilon^\bullet \sin \varepsilon \cos \beta + \Omega \beta^\bullet \cos \varepsilon \sin \beta) + (I_3 - I_2)(\varepsilon^\bullet - \\ & - \Omega \sin \beta)(\beta^\bullet \cos \varepsilon + \Omega \sin \varepsilon \cos \beta) + I_{12}(\beta^\bullet \sin \varepsilon - \Omega \cos \varepsilon \cos \beta)(\beta^\bullet \cos \varepsilon + \\ & + \Omega \sin \varepsilon \cos \beta) - I_{12} \Omega \beta^\bullet \cos \beta + mal\{(\beta^\bullet \cos \varepsilon + \Omega \sin \varepsilon \cos \beta)[\alpha^\bullet \sin \varepsilon \sin(\beta - \alpha) + \\ & + \Omega \cos \varepsilon \sin \alpha] + \alpha^\bullet(\varepsilon^\bullet - \Omega \sin \beta) \cos(\beta - \alpha)\}, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} F_2 = & I_2 \Omega \beta^\bullet \cos \beta + I_{12}(\varepsilon^\bullet \beta^\bullet \cos \varepsilon + \Omega \varepsilon^\bullet \sin \varepsilon \cos \beta + \Omega \beta^\bullet \cos \varepsilon \sin \beta) + \\ & + I_{12}(-\varepsilon^\bullet + \Omega \sin \beta)(\beta^\bullet \cos \varepsilon + \Omega \sin \varepsilon \cos \beta) + (I_1 - I_3)(\beta^\bullet \sin \varepsilon - \\ & - \Omega \cos \varepsilon \cos \beta)(\beta^\bullet \cos \varepsilon + \Omega \sin \varepsilon \cos \beta) + mal[\varepsilon^\bullet \alpha^\bullet \cos \varepsilon \sin(\beta - \alpha) + \\ & + \alpha^\bullet(\beta^\bullet - \alpha^\bullet) \sin \varepsilon \cos(\beta - \alpha) - \Omega \varepsilon^\bullet \sin \varepsilon \sin \alpha + \Omega \alpha^\bullet \cos \varepsilon \cos \alpha - \\ & - (\beta^\bullet \sin \varepsilon - \Omega \cos \varepsilon \cos \beta) \alpha^\bullet \cos(\beta - \alpha)] - mga \sin \varepsilon \cos \beta + \\ & + mav[-a(\varepsilon^\bullet - \Omega \sin \beta) + l \alpha^\bullet \sin \varepsilon \sin(\beta - \alpha) + l \Omega \cos \varepsilon \sin \alpha], \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} F_3 = & I_3(\varepsilon^\bullet \beta^\bullet \sin \varepsilon - \Omega \varepsilon^\bullet \cos \varepsilon \cos \beta - \Omega \beta^\bullet \sin \varepsilon \sin \beta) + (I_2 - I_1)(\varepsilon^\bullet - \Omega \sin \beta)(\beta^\bullet \sin \varepsilon - \\ & - \Omega \cos \varepsilon \cos \beta) + I_{12}(\varepsilon^\bullet - \Omega \sin \beta)^2 - I_{12}(\beta^\bullet \sin \varepsilon - \Omega \cos \varepsilon \cos \beta)^2 - mga \sin \beta + \\ & + mal\{\alpha^\bullet(\beta^\bullet - \alpha^\bullet) \sin(\beta - \alpha) + (-\beta^\bullet \sin \varepsilon + \Omega \cos \varepsilon \cos \beta)[\alpha^\bullet \sin \varepsilon \sin(\beta - \alpha) + \\ & + \Omega \cos \varepsilon \sin \alpha]\} - mav[a(\beta^\bullet \cos \varepsilon + \Omega \sin \varepsilon \cos \beta) + l \alpha^\bullet \cos(\beta - \alpha)]. \end{aligned} \quad (37)$$

Уравнения (32) – (34) служат для определения углов  $\alpha, \beta, \gamma$ .

**Стационарные движения тела на подвесе.** Пусть  $\alpha, \beta, \varepsilon$  сохраняют постоянные значения, тогда

$$\alpha^\bullet = \beta^\bullet = \varepsilon^\bullet = 0, \quad \alpha^{\bullet\bullet} = \beta^{\bullet\bullet} = \varepsilon^{\bullet\bullet} = 0.$$

Левые части уравнений (32) – (34) при этом обращаются в нуль, а правые части (35) – (37) таковы

$$[(I_2 - I_3) \sin \beta - I_{12} \cos \varepsilon \cos \beta + mal \cos \varepsilon \sin \alpha] \Omega^2 \sin \varepsilon \cos \beta = 0, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} & [(I_1 - I_3) \cos \varepsilon \cos \beta - I_{12} \sin \beta] \Omega^2 \sin \varepsilon \cos \beta + mga \sin \varepsilon \cos \beta - \\ & - mav \Omega (a \sin \beta + l \cos \varepsilon \sin \alpha) = 0, \end{aligned} \quad (39)$$

$$[(I_1 - I_2) \cos \varepsilon \sin \beta \cos \beta + I_{12}(\cos^2 \varepsilon \cos^2 \beta - \sin^2 \beta)] \Omega^2 + mga \sin \beta +$$

$$+ma^2\nu\Omega \sin \varepsilon \cos \beta - mal\Omega^2 \cos^2 \varepsilon \cos \beta \sin \alpha = 0. \quad (40)$$

Соотношение (38) показывает, что для нахождения пока не определенных  $\alpha, \beta, \varepsilon$  требуется различать три варианта:

$$\sin \varepsilon = 0, \quad (41)$$

$$\cos \beta = 0, \quad (42)$$

$$(I_2 - I_3) \sin \beta - I_{12} \cos \varepsilon \cos \beta + mal \cos \varepsilon \sin \alpha = 0. \quad (43)$$

Рассмотрим сначала вариант (41),  $\cos \varepsilon = \pm 1$ . Для определенности выберем  $\cos \varepsilon = 1$  ( $\cos \varepsilon = -1$  рассматривается аналогично) и внесем их в (39), (40):

$$a \sin \beta + l \sin \alpha = 0, \quad (44)$$

$$[(I_1 - I_2) \sin \beta \cos \beta + I_{12}(\cos^2 \beta - \sin^2 \beta)]\Omega^2 + mga \sin \beta - mal\Omega^2 \cos \beta \sin \alpha = 0. \quad (45)$$

Исключая из (44), (45)  $\sin \alpha$ , получаем

$$[(I_1 - I_2 + ma^2) \sin \beta \cos \beta + I_{12}(\cos^2 \beta - \sin^2 \beta)]\Omega^2 + mga \sin \beta = 0. \quad (46)$$

Если  $I_{12} = 0$ , то

$$[(I_1 - I_2 + ma^2) \cos \beta + mga] \sin \beta = 0,$$

и тогда либо

$$\sin \beta = 0,$$

либо

$$(I_1 - I_2 + ma^2)\Omega^2 \cos \beta + mga = 0.$$

Если же  $I_{12} \neq 0$ , то обозначая  $\operatorname{tg}(\beta/2) = u$ , запишем (46) в виде

$$\begin{aligned} \Phi(u) = I_{12}u^4 + 2\left[\frac{mga}{\Omega^2} - (I_1 - I_2 + ma^2)\right]u^3 - 6I_{12}u^2 + \\ + 2\left[\frac{mga}{\Omega^2} + (I_1 - I_2 + ma^2)\right]u + I_{12} = 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Не умаляя общности, можем считать  $I_{12} > 0$ . Уравнение четвертой степени относительно  $u$  имеет, по крайней мере, два действительных корня, так как  $\Phi(\pm\infty) = \infty$ ,  $\Phi(0) = I_{12} > 0$ ,  $\Phi(-1) = -4I_{12} - 4mga/\Omega^2 < 0$ .

Таким образом, для варианта (41) стационарные движения таковы: при  $I_{12} = 0$

$$\varepsilon = 0, \quad \beta = 0, \quad \alpha = 0$$

или

$$\varepsilon = 0, \quad \cos \beta_0 = -\frac{mga}{(I_1 - I_2 + ma^2)\Omega^2}, \quad \sin \alpha_0 = -\frac{a}{l} \sin \beta_0$$

при ограничении  $\Omega^2 > \left| \frac{mga}{I_1 + ma^2 - I_2} \right|$ .

Если же  $I_{12} \neq 0$ ,

$$\varepsilon = 0, \quad \beta = \beta_k, \quad \sin \alpha_k = -\frac{a}{l} \sin \beta_k,$$

где  $\beta_k = 2\operatorname{arctg} u_k$ ,  $u_k$  — действительный корень уравнения (47).

В случае (42) из (39), (40) получаем

$$mga - I_{12}\Omega^2 = 0, \quad ma\nu\Omega(\pm a + l \cos \varepsilon \sin \alpha) = 0$$

или  $\Omega^2 = \frac{mga}{I_{12}}, \quad \cos \varepsilon \sin \alpha = \mp \frac{a}{l}.$

Рассмотрим вариант (43). Пусть

$$\cos \varepsilon = 0, \tag{48}$$

тогда  $(I_2 - I_3) \sin \beta = 0$ , откуда либо  $\sin \beta = 0$ , либо

$$I_2 = I_3. \tag{49}$$

Внесем (48), (49) в (39), (40) и получим

$$(mga - I_{12}\Omega^2 \sin \beta) \cos \beta - ma^2\nu\Omega \sin \beta = 0, \tag{50}$$

$$(mga - I_{12}\Omega^2 \sin \beta) \sin \beta + ma^2\nu\Omega \cos \beta = 0, \tag{51}$$

откуда  $mga - I_{12}\Omega^2 \sin \beta = 0$ ,  $ma^2\nu\Omega = 0$  и если  $\nu \neq 0$ , система (50), (51) решений не имеет.

Для третьего варианта из (38) находим

$$mal \cos \varepsilon \sin \alpha = I_{12} \cos \varepsilon \cos \beta - (I_2 - I_3) \sin \beta, \tag{52}$$

а из (39), (40) при этом определяем

$$ma^2(1 - \cos^2 \varepsilon \cos^2 \beta) + I_{12} \sin \beta \cos \varepsilon \cos \beta - (I_2 - I_3) \sin^2 \beta = 0, \tag{53}$$

$$[(I_1 - I_3) \cos \varepsilon \cos \beta - I_{12} \sin \beta] \Omega^2 \sin \beta + mga \sin \beta + ma^2\nu\Omega \sin \varepsilon \cos \beta = 0. \tag{54}$$

Введем безразмерные параметры

$$A_k = \frac{I_k}{ma^2} \quad (k = 1, 2, 3), \quad A_{12} = \frac{I_{12}}{ma^2}, \quad \sigma^2 = \frac{g}{a\Omega^2}, \quad \nu_* = \frac{\nu}{\Omega},$$

новые переменные  $w = \cos \varepsilon \cos \beta$ ,  $u = \sin \beta$  и запишем теперь соотношения (53), (54)

$$w^2 - A_{12}uw + (A_2 - A_3)u^2 - 1 = 0, \tag{55}$$

$$[(A_1 - A_3)^2 u^2 + \nu_*^2] w^2 + 2(A_1 - A_3)(\sigma^2 - A_{12}u)u^2 w + (A_{12}u - \sigma^2)^2 u^2 + \nu_*^2(u^2 - 1) = 0. \tag{56}$$

Исключая из (55), (56)  $w$ , получим уравнение шестой степени относительно  $u$

$$\begin{aligned} & u^2 \{ [(A_1 - A_3)^2 (A_3 - A_2) + A_{12}^2] u^2 - 2A_{12}\sigma^2 u + (A_1 - A_3)^2 + (A_3 - A_2)\nu_*^2 + \sigma^4 + \nu_*^2 \}^2 + \\ & + \{ A_{12} [(A_1 - A_3)^2 - 2(A_1 - A_3)] u^2 + 2(A_1 - A_3)\sigma^2 u + \\ & + A_{12}\nu_*^2 \} \{ [A_{12}^3 + 2(A_1 - A_3)(A_3 - A_2)A_{12}] u^4 - 2[A_{12}^2 + (A_1 - A_3)(A_3 - A_2)] \sigma^2 u^3 + \\ & + A_{12}[2(A_1 - A_3) + \sigma^4 + \nu_*^2] u^2 - 2(A_1 - A_3)\sigma^2 u - A_{12}\nu_*^2 \} = 0. \end{aligned} \tag{57}$$

Обозначим  $P_6(u)$  многочлен, стоящий в левой части (57). Так как в  $P_6(u)$  коэффициент при  $u^6$  равен

$$[(A_1 - A_3)^2(A_3 - A_2) - A_{12}^2(A_1 - A_3 - 1)]^2 > 0,$$

а свободный член

$$-A_{12}^2\nu_*^4 < 0,$$

то это означает, что уравнение (57) имеет, по крайней мере, два действительных корня. При  $u = \pm 1$  многочлен принимает следующие значения:

$$\begin{aligned} P_6(1) = & (A_3 - A_2 + 1)^2[(A_1 - A_3)^2 + \nu_*^2]^2 + \{2(A_3 - A_2 + 1)[A_{12} - \sigma^2 + A_{12}(A_1 - A_3)] + \\ & + A_{12}^2(A_{12} - \sigma^2)\}(A_{12} - \sigma^2)[\nu_*^2 + (A_1 - A_3)^2] + (A_{12} - \sigma^2)^2\{(A_{12} - \sigma^2)^2 - \\ & - 2A_{12}(A_1 - A_3)(A_{12} - \sigma^2) - 4(A_1 - A_3)^2(A_3 - A_2 + 1)\} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} P_6(-1) = & (A_3 - A_2 + 1)^2[(A_1 - A_3)^2 + \nu_*^2]^2 + \{-2(A_3 - A_2 + 1)[A_{12}(A_1 - A_3 + 1)] + \\ & + A_{12}^2(A_{12} - \sigma^2)\}(-A_{12} - \sigma^2)[\nu_*^2 + (A_1 - A_3)^2] + (A_{12} + \sigma^2)^2\{(A_{12} + \sigma^2)^2 - \\ & - 2A_{12}(A_1 - A_3)(A_{12} + \sigma^2) - 4(A_1 - A_3)^2(A_3 - A_2 + 1)\}. \end{aligned}$$

Рассматривая их как квадратные трехчлены относительно  $(A_1 - A_3)^2 + \nu_*^2$ , запишем дискриминанты уравнений  $P_6(1) = 0$  и  $P_6(-1) = 0$ :

$$[A_{12}^2 + 4(A_3 - A_2 + 1)](A_{12} - \sigma^2)^2[A_{12}(A_{12} - \sigma^2) + 2(A_1 - A_3)(A_3 - A_2 + 1)]^2$$

и

$$[A_{12}^2 + 4(A_3 - A_2 + 1)](A_{12} + \sigma^2)^2[A_{12}(A_{12} + \sigma^2) + 2(A_1 - A_3)(A_3 - A_2 + 1)]^2.$$

Если  $A_{12}^2 + 4(A_3 - A_2 + 1) < 0$ , то при  $u = \pm 1$  многочлен  $P_6(u)$  принимает положительные значения, и, следовательно, в интервале  $(-1, 1)$  существует, по крайней мере, два корня  $u_1^*, u_2^*$  уравнения (57).

Введем обозначение  $\operatorname{tg}(\varepsilon/2) = z$  и запишем уравнение (54)

$$\begin{aligned} & [(\sigma^2 - A_{12} \sin \beta) - (A_1 - A_3) \cos \beta]z^2 \sin \beta + 2\nu_* z \cos \beta + \\ & + [\sigma^2 - A_{12} \sin \beta + (A_1 - A_3) \cos \beta] \sin \beta = 0. \end{aligned}$$

Его дискриминант  $D/4 = [(A_1 - A_3)^2 u^2 + \nu_*^2](1 - u^2) - (A_{12}u - \sigma^2)^2 u^2$  при  $u = 0$  положителен, при  $u = \pm 1$  отрицателен, а коэффициент при  $u^4$  отрицателен. Следовательно, существует интервал  $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \in (-1, 1)$ , в котором  $D/4 > 0$ . Если хотя бы один из корней  $u_1^*, u_2^* \in (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ , система уравнений (53), (54) совместна. При этом уравнение (52) определит угол  $\alpha$ .

В главных осях  $A_{12} = 0$ , уравнения (52), (55), (56) соответственно принимают вид

$$\cos \varepsilon \sin \alpha = \frac{a}{l}(A_3 - A_2) \sin \beta,$$

$$w^2 + \kappa u^2 - 1 = 0, \quad (58)$$

$$[(A_1 - A_3)^2 u^2 + \nu_*^2]w^2 + 2(A_1 - A_3)\sigma^2 u^2 w + \sigma^4 u^2 + \nu_*^2(u^2 - 1) = 0, \quad (59)$$



где  $\kappa = A_2 - A_3$ .

Уравнения (58), (59) имеют общий корень

$$w = \sqrt{1 - \kappa u^2} \quad (60)$$

при условии

$$[(A_1 - A_3)^2(1 - \kappa u^2) + (1 - \kappa)\nu_*^2 + \sigma^4]^2 - 4(A_1 - A_3)^2\sigma^4(1 - \kappa u^2) = 0,$$

откуда

$$(A_1 - A_3)^2(1 - \kappa u^2) = (\sigma^2 \pm \sqrt{\kappa - 1}\nu_*)^2. \quad (61)$$

При  $A_1 \neq A_3$  из (60), (61) вытекают условия

$$\kappa u^2 < 1, \quad \kappa > 1, \quad u^2 = \frac{1}{\kappa} \left[ 1 - \left( \frac{\sigma^2 \pm \sqrt{\kappa - 1}\nu_*}{A_1 - A_3} \right)^2 \right] < 1.$$

И наконец, при  $A_{12} = 0$ ,  $A_3 = A_1$  из (38) – (40) получаем

$$\Omega^2 = \frac{g^2}{a^2\nu^2(A_2 - A_1 - 1)}, \quad A_2 - A_1 > 1, \quad \sin^2 \beta < \frac{1}{\kappa}, \quad \sin \varepsilon = -\frac{a\kappa}{l} \frac{\sin \beta \cos \beta}{\sqrt{1 - \kappa \sin^2 \beta}}.$$

Таким образом, получены условия существования стационарных движений тела на подвесе для трех возможных вариантов. Для каждого из них указаны зависимости углов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\varepsilon$  от параметров системы.

1. Харламов П. В. О соответствии эксперименту существующих теорий движения тела на подвесе // Механика твердого тела. – 1998. – Вып. 26 (II). – С. 96-111.
2. Ишлинский А. Ю. Прикладные задачи механики. Кн. 2. Механика упругих и абсолютно твердых тел. – М.: Наука, 1986. – 416 с.
3. Лесина М. Е., Харламов А. П. Переход к стационарному движению тела на подвесе // Механика твердого тела. – 1998. – Вып. 26 (II). – С. 111-125.
4. Лесина М. Е., Харламов А. П. О предельных стационарных движениях тела на подвесе // Там же. – 1999. – Вып. 28. – С. 78-94.

Донецкий нац. техн. ун-т,  
Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк

Получено 15.04.03