ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2003. Вып. 33

УДК 531.38

©2003. **А.И. Белецкая**

ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ СФЕРИЧЕСКОГО ГИРОСТАТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

Первый метод Ляпунова [1] применен для исследования асимптотически-периодических движений гиростата, эллипсоид инерции которого в неподвижной точке является сферой. Предположено, что известно некоторое частное периодическое решение дифференциальных уравнений Г.Кирхгофа [2]. С помощью первых интегралов дифференциальные уравнения в вариациях преобразованы к линейной системе третьего порядка с периодическими коэффициентами. Для анализа характеристических чисел этой системы проведена редукция ее к уравнению Хилла и применено достаточное условие Ляпунова существования положительных характеристических чисел. Рассмотрен пример.

К настоящему времени в динамике твердого тела, имеющего неподвижную точку, построено не только большое количество частных решений уравнений движения [4 – 6], но и проведен анализ условий существования асимптотических движений, предельное движение которых описывается известными частными решениями (см. обзор [7]). Эффективным методом исследования асимптотических движений в динамике твердого тела является первый метод Ляпунова [1] и метод Пуанкаре [8], относящийся к анализу характеристичных чисел дифференциальных уравнений, которые допускают определенное количество первых интегралов. Трудности в исследовании характеристичных чисел линейных периодических систем связаны с нахождением преобразования Ляпунова в случае общего вида периодического решения. Данная статья посвящена исследованию асимптотически-периодических движений сферического гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил [2]. Предположено, что в исследуемом частном решении вектор угловой скорости ни при каком значении времени не совпадает с направлением оси симметрии силового поля. Проведена редукция уравнений в вариациях к уравнению второго порядка, дан анализ характеристичных чисел этого уравнения для решения, указанного в [3].

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении гиростата с неподвижной точкой, которое описывается уравнениями [2]:

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times B\boldsymbol{\nu} + \mathbf{s} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times C\boldsymbol{\nu}, \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости гиростата; $\boldsymbol{\nu}$ – единичный вектор оси симметрии силового поля; $A = (A_{ij})$ – тензор инерции; $\boldsymbol{\lambda}$ – вектор гиростатического момента, характеризующий движение носимых тел; $\mathbf{s}$ – вектор обобщенного центра масс; $B = (B_{ij})$ и $C = (C_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\nu}$ обозначает относительную производную по времени. Дифференциальные уравнения (1), (2) имеют первые интегралы

$$(A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) - 2(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) + (C\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 2E, \qquad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \tag{3}$$

$$2(A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} - (B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 2k. \tag{4}$$

Здесь E и k – произвольные постоянные.

Предположим, что эллипсоид инерции гиростата, построенный в неподвижной точке, является сферой, то есть $A = \dfrac{1}{a}\,\delta$, где δ – единичная матрица третьего порядка. Перейдем в соотношениях (1) – (4) к переменной $\mathbf{x}$, где $\mathbf{x} = A\boldsymbol{\omega} = \dfrac{1}{a}\,\boldsymbol{\omega}$ – вектор момента количества движения тела-носителя. Для этого вектора примем $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Введем безразмерные переменные и параметры:

$$\begin{gathered}
\mathbf{x} = \frac{\sqrt{|\mathbf{s}|}\ \mathbf{x}'}{\sqrt{a}}, \qquad \mathbf{s} = |\mathbf{s}|\ \mathbf{s}', \qquad \boldsymbol{\lambda} = \frac{\sqrt{|\mathbf{s}|}\ \boldsymbol{\lambda}'}{\sqrt{a}}, \\
B = \frac{\sqrt{|\mathbf{s}|}}{\sqrt{a}}\ B', \qquad C = |\mathbf{s}|\ C', \qquad t = \frac{\tau}{\sqrt{a}|\mathbf{s}|},
\end{gathered} \tag{5}$$

где $\mathbf{x}'$ – новая переменная, $\mathbf{s}', \boldsymbol{\lambda}', B', C'$ – новые параметры, а τ – безразмерное время. Тогда уравнения (1) – (4) при помощи (5) преобразуются к виду

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \times (B\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\lambda}) + \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \mathbf{s}), \tag{6}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times\ \mathbf{x}, \tag{7}$$

$$\begin{gathered}
\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} - 2(\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\nu}) + (C\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}) = 2E, \qquad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1, \\
(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda})\cdot\boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}) = k,
\end{gathered} \tag{8}$$

где E, k – новые произвольные постоянные, и для простоты записи опущены штрихи. Пусть известно частное решение уравнений (6), (7):

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(\tau), \qquad \boldsymbol{\nu}^* = \boldsymbol{\nu}^*(\tau), \tag{9}$$

причем $\mathbf{x}^*$ и $\boldsymbol{\nu}^*$ являются периодическими функциями по τ.

Для анализа асимптотически-периодических движений, предельное движение которых описывается функциями (9), удовлетворяющими уравнениям (6), (7), положим:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \mathbf{u}, \qquad \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}^* + \boldsymbol{\vartheta}. \tag{10}$$

Подставим (10) в уравнения (6), (7), тогда

$$\begin{gathered}
\dot{\mathbf{u}} = (\mathbf{x}^* + \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{u} - B\boldsymbol{\nu}^* - B\boldsymbol{\vartheta}) \times \mathbf{u} + (\mathbf{u} - B\boldsymbol{\vartheta}) \times \mathbf{x}^* + (\mathbf{s} - C\boldsymbol{\nu}^* - C\boldsymbol{\vartheta}) \times \boldsymbol{\vartheta} + \boldsymbol{\nu}^* \times C\boldsymbol{\vartheta}, \\
\dot{\boldsymbol{\vartheta}} = (\boldsymbol{\nu}^* + \boldsymbol{\vartheta}) \times \mathbf{u} + \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{x}^*.
\end{gathered} \tag{11}$$

Согласно первому методу Ляпунова [1], если линейная система

$$\begin{gathered}
\dot{\mathbf{u}} = (\boldsymbol{\lambda} - B\boldsymbol{\nu}^*) \times \mathbf{u} + (\mathbf{s} - C\boldsymbol{\nu}^*) \times \boldsymbol{\vartheta} + \mathbf{x}^* \times B\boldsymbol{\vartheta} + \boldsymbol{\nu}^* \times C\boldsymbol{\vartheta}, \\
\dot{\boldsymbol{\vartheta}} = \boldsymbol{\nu}^* \times \mathbf{u} - \mathbf{x}^* \times \boldsymbol{\vartheta},
\end{gathered} \tag{12}$$

вытекающая из (11), имеет положительные характеристичные числа, то нелинейная система (11) допускает решение, которое при $\tau \to \infty$ стремится к решению (9). Поэтому в первом методе Ляпунова анализ системы (12) является наиболее важным этапом изучения существования асимптотических движений.

2. Исследование уравнений в вариациях. Для исследования уравнений (12) запишем их первые интегралы:

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{\nu}^* \cdot \mathbf{u} + (\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{x}^* - B\boldsymbol{\nu}^*) \cdot \boldsymbol{\vartheta} = k_1, \qquad \boldsymbol{\nu}^* \cdot \boldsymbol{\vartheta} = k_2, \\
\mathbf{x}^* \cdot \mathbf{u} - (\mathbf{s} - C\boldsymbol{\nu}^*) \cdot \boldsymbol{\vartheta} = k_3,
\end{gathered}
\tag{13}
$$

которые порождены первыми интегралами (8). На основании результата [8] можно утверждать, что система (12) с интегралами (13) имеет четыре нулевых характеристичных числа. Для исследования оставшихся двух характеристичных чисел выполним редукцию уравнений (12) с помощью интегралов (13) к системе третьего порядка. Вместо переменных u_i, ϑ_i $(i = 1, 2, 3)$ введем новые переменные U_i, V_i $(i = 1, 2, 3)$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}^* = U_1, \qquad \mathbf{u} \cdot \mathbf{x}^* = U_2, \qquad \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\nu}^* \times \mathbf{x}^*) = U_3, \\
\boldsymbol{\vartheta} \cdot \boldsymbol{\nu}^* = V_1, \qquad \boldsymbol{\vartheta} \cdot \mathbf{x}^* = V_2, \qquad \boldsymbol{\vartheta} \cdot (\boldsymbol{\nu}^* \times \mathbf{x}^*) = V_3.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Переход к новым переменным (14) возможен тогда, когда векторы $\boldsymbol{\nu}^*, \mathbf{x}^*$ и $(\boldsymbol{\nu}^* \times \mathbf{x}^*)$ линейно независимы. Таким образом, при изучении решений (9) в дальнейшем предполагается, что на исследуемом решении выполнено указанное свойство. Анализ большинства частных решений [3, 4, 6, 7] показывает, что для них $(\boldsymbol{\nu}^* \times \mathbf{x}^*) \neq 0$.

Из соотношений (14) выразим векторы $\mathbf{u}, \boldsymbol{\vartheta}$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \frac{1}{\dot{\boldsymbol{\nu}}^{*2}} \big((\mathbf{x}^* \times \dot{\boldsymbol{\nu}}^*)U_1 - (\boldsymbol{\nu}^* \times \dot{\boldsymbol{\nu}}^*)U_2 + \dot{\boldsymbol{\nu}}^{*2} U_3\big), \\
\boldsymbol{\vartheta} &= \frac{1}{\dot{\boldsymbol{\nu}}^{*2}} \big((\mathbf{x}^* \times \dot{\boldsymbol{\nu}}^*)V_1 - (\boldsymbol{\nu}^* \times \dot{\boldsymbol{\nu}}^*)V_2 + \dot{\boldsymbol{\nu}}^{*2} V_3\big).
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Внесем соотношения (15) в интегралы (13):

$$
\begin{gathered}
U_1 = k_1 - \frac{k_3}{\dot{\boldsymbol{\nu}}^{*2}}((\boldsymbol{\lambda} - B\boldsymbol{\nu}^*) \cdot (\mathbf{x}^* \times \dot{\boldsymbol{\nu}}^*)) + \frac{1}{\dot{\boldsymbol{\nu}}^{*2}}\big((\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{x}^* - B\boldsymbol{\nu}^*) \cdot (\boldsymbol{\nu}^* \times \dot{\boldsymbol{\nu}}^*)\big)V_2 - \\
- \frac{1}{\dot{\boldsymbol{\nu}}^{*2}} \, ((\boldsymbol{\lambda} - B\boldsymbol{\nu}^*) \cdot \dot{\boldsymbol{\nu}}^*)V_3, \\
U_2 = k_2 - \frac{1}{\dot{\boldsymbol{\nu}}^{*2}} \, ((\mathbf{s} - C\boldsymbol{\nu}^*) \cdot (\mathbf{x}^* \times \dot{\boldsymbol{\nu}}^*)) + \frac{1}{\dot{\boldsymbol{\nu}}^{*2}}\big((\mathbf{s} - C\boldsymbol{\nu}^*) \cdot (\boldsymbol{\nu}^* \times \dot{\boldsymbol{\nu}}^*)\big)V_2 + \\
+ \frac{1}{\dot{\boldsymbol{\nu}}^{*2}}((\mathbf{s} - C\boldsymbol{\nu}^*) \cdot \dot{\boldsymbol{\nu}}^*)V_3, \\
V_1 = k_3.
\end{gathered}
\tag{16}
$$

Соотношения (16) показывают, что в качестве независимых переменных целесообразно принять величины $U_3 = z_1,\ V_2 = z_2,\ V_3 = z_3$. С помощью соотношений (15), (16) из (12) в матрично-векторном виде получим

$$
\dot{\mathbf{z}} = \alpha(\tau)\mathbf{z} + \boldsymbol{\beta}(\tau),
\tag{17}
$$

где

$$
\alpha_{11} = \frac{\ddot{\boldsymbol{\nu}}^* \cdot \dot{\boldsymbol{\nu}}^*}{\dot{\boldsymbol{\nu}}^{*2}}; \qquad \alpha_{21} = -1; \qquad \alpha_{22} = -\frac{\mathbf{x}^* \cdot (\boldsymbol{\nu}^* \times \dot{\boldsymbol{\nu}}^*)}{\dot{\boldsymbol{\nu}}^{*2}}; \qquad \alpha_{23} = \frac{\dot{\boldsymbol{\nu}}^* \cdot \mathbf{x}^*}{\dot{\boldsymbol{\nu}}^{*2}}; \qquad \alpha_{31} = 0;
$$

$$\alpha_{12}=\frac{1}{\dot{\boldsymbol{\nu}}^{*4}}\{[(\mathbf{x}^*\times\dot{\boldsymbol{\nu}}^*)\cdot(\dot{\boldsymbol{\nu}}^*\times(\boldsymbol{\lambda}-B\boldsymbol{\nu}^*))][(\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{x}^*-B\boldsymbol{\nu}^*)\cdot(\boldsymbol{\nu}^*\times\dot{\boldsymbol{\nu}}^*)]+$$
$$+[(\boldsymbol{\nu}^*\times\dot{\boldsymbol{\nu}}^*)\cdot(\dot{\boldsymbol{\nu}}^*\times(\boldsymbol{\lambda}-B\boldsymbol{\nu}^*))][(\mathbf{s}-C\boldsymbol{\nu}^*)\cdot(\boldsymbol{\nu}^*\times\dot{\boldsymbol{\nu}}^*)]+[\ddot{\boldsymbol{\nu}}^*\cdot(\mathbf{x}^*\times\dot{\boldsymbol{\nu}}^*)][(\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{x}^*-B\boldsymbol{\nu}^*)\cdot(\boldsymbol{\nu}^*\times\dot{\boldsymbol{\nu}}^*)]+$$
$$+[\ddot{\boldsymbol{\nu}}^*\cdot(\boldsymbol{\nu}^*\times\dot{\boldsymbol{\nu}}^*)]\cdot[(\mathbf{s}-C\boldsymbol{\nu}^*)\cdot(\boldsymbol{\nu}^*\times\dot{\boldsymbol{\nu}}^*)]-(\dot{\boldsymbol{\nu}}^*)^2[(B(\mathbf{x}^*\times\dot{\boldsymbol{\nu}}^*))\cdot(\boldsymbol{\nu}^*\times\dot{\boldsymbol{\nu}}^*)-(C\dot{\boldsymbol{\nu}}^*\times\boldsymbol{\nu}^*))\cdot(\boldsymbol{\nu}^*\times\dot{\boldsymbol{\nu}}^*)]\};$$
$$\alpha_{13}=\frac{1}{\dot{\boldsymbol{\nu}}^{*4}}\{-[(\mathbf{x}^*\times\dot{\boldsymbol{\nu}}^*)\cdot(\dot{\boldsymbol{\nu}}^*\times(\boldsymbol{\lambda}-B\boldsymbol{\nu}^*))][(\boldsymbol{\lambda}-B\boldsymbol{\nu}^*)\cdot\dot{\boldsymbol{\nu}}^*]-$$
$$-[(\boldsymbol{\nu}^*\times\dot{\boldsymbol{\nu}}^*)\cdot(\dot{\boldsymbol{\nu}}^*\times(\boldsymbol{\lambda}-B\boldsymbol{\nu}^*))][(\mathbf{s}-C\boldsymbol{\nu}^*)\cdot\dot{\boldsymbol{\nu}}^*]-[\ddot{\boldsymbol{\nu}}^*\cdot(\mathbf{s}^*\times\dot{\boldsymbol{\nu}}^*)][(\boldsymbol{\lambda}-B\boldsymbol{\nu}^*)\cdot\dot{\boldsymbol{\nu}}^*]-$$
$$-[\ddot{\boldsymbol{\nu}}^*\cdot(\boldsymbol{\nu}^*\times\dot{\boldsymbol{\nu}}^*)][(\mathbf{s}-C\boldsymbol{\nu}^*)\cdot\dot{\boldsymbol{\nu}}^*]+(\dot{\boldsymbol{\nu}}^*)^2[(B(\mathbf{x}^*\times\dot{\boldsymbol{\nu}}^*))\cdot\dot{\boldsymbol{\nu}}^*+(C(\boldsymbol{\nu}^*\times\dot{\boldsymbol{\nu}}^*))\cdot\dot{\boldsymbol{\nu}}^*]\};$$
$$\alpha_{32}=\frac{1}{\dot{\boldsymbol{\nu}}^{*2}}[-\dot{\boldsymbol{\nu}}^*\cdot\dot{\mathbf{x}}^*-(\mathbf{s}-C\boldsymbol{\nu}^*)\cdot(\boldsymbol{\nu}^*\times\dot{\boldsymbol{\nu}}^*)-(\mathbf{x}^*\cdot\boldsymbol{\nu}^*)((\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{x}^*-B\boldsymbol{\nu}^*)\cdot(\boldsymbol{\nu}^*\times\dot{\boldsymbol{\nu}}^*))];$$
$$\alpha_{33}=[\dot{\boldsymbol{\nu}}^*\cdot(\boldsymbol{\nu}^*\times\dot{\mathbf{x}}^*)+(\mathbf{s}-C\boldsymbol{\nu}^*)\cdot(\dot{\boldsymbol{\nu}}^*-(\mathbf{x}^*\cdot\boldsymbol{\nu}^*)((\boldsymbol{\lambda}-B\boldsymbol{\nu}^*)\cdot\dot{\boldsymbol{\nu}}^*)]; \tag{18}$$
$$\beta_1=\frac{1}{\dot{\boldsymbol{\nu}}^{*2}}[k_3(C(\dot{\boldsymbol{\nu}}^*\times\boldsymbol{\nu}^*)\cdot(\mathbf{x}^*\times\dot{\boldsymbol{\nu}}^*)-B(\mathbf{x}^*\times\dot{\boldsymbol{\nu}}^*)\cdot(\mathbf{x}^*\times\dot{\boldsymbol{\nu}}^*))+[(\mathbf{x}^*\times\dot{\boldsymbol{\nu}}^*)\cdot(\dot{\boldsymbol{\nu}}^*\times(\boldsymbol{\lambda}-B\boldsymbol{\nu}^*))+$$
$$+\ddot{\boldsymbol{\nu}}^*\cdot(\mathbf{x}^*\times\dot{\boldsymbol{\nu}}^*)]\left(k_1-\frac{1}{\dot{\boldsymbol{\nu}}^{*2}}[k_3((\boldsymbol{\lambda}-B\boldsymbol{\nu}^*)\cdot(\mathbf{x}^*\times\dot{\boldsymbol{\nu}}^*))]\right)-[(\boldsymbol{\nu}^*\times\dot{\boldsymbol{\nu}}^*)]\cdot(\dot{\boldsymbol{\nu}}^*\times(\boldsymbol{\lambda}-B\boldsymbol{\nu}^*))+$$
$$+\ddot{\boldsymbol{\nu}}^*\cdot(\boldsymbol{\nu}^*\times\dot{\boldsymbol{\nu}}^*)]\left(k_2+\frac{1}{\dot{\boldsymbol{\nu}}^{*2}}[k_3((\mathbf{s}-C\boldsymbol{\nu}^*)\cdot(\mathbf{x}^*\times\dot{\boldsymbol{\nu}}^*))]\right);\qquad \beta_2=\frac{k_3(\dot{\mathbf{x}}^*\cdot(\mathbf{x}^*\times\dot{\boldsymbol{\nu}}^*))}{\dot{\boldsymbol{\nu}}^{*2}};$$
$$\beta_3=\frac{k_3(\boldsymbol{\nu}^*\cdot\mathbf{x}^*)(\ \mathbf{x}^*\cdot\dot{\boldsymbol{\nu}}^*)^2}{\dot{\boldsymbol{\nu}}^{*2}}+k_2+\frac{k_3((\mathbf{s}-C\boldsymbol{\nu}^*)\cdot(\mathbf{x}^*\times\dot{\boldsymbol{\nu}}^*))}{\dot{\boldsymbol{\nu}}^{*2}}-$$
$$-(\boldsymbol{\nu}^*\cdot\mathbf{x}^*)\left(k_1-\frac{k_3((\boldsymbol{\lambda}-B\boldsymbol{\nu}^*)\cdot(\mathbf{x}^*\times\dot{\boldsymbol{\nu}}^*))}{\dot{\boldsymbol{\nu}}^{*2}}\right).$$

Если система (17) проинтегрирована, то переменные U_1, U_2 и V_1 находятся из формул (16). Исследуем условия, при которых система (17) имеет хотя бы одно положительное характеристичное число. Поскольку она представляет собой систему с периодическими коэффициентами, то ненулевые характеристичные числа может давать решение однородной системы, то есть системы, для которой $\beta_i(\tau)=0$. Поэтому перейдем к системе, которая является сопряженной к однородной системе из (17)

$$\dot{\mathbf{y}}=-\alpha^T(\tau)\cdot\mathbf{y}, \tag{19}$$

где $\alpha^T(\tau)$ – транспонированная матрица. Поскольку однородная система из (17) имеет частное решение

$$z_1^0(\tau)=\dot{\mathbf{x}}^*\cdot(\boldsymbol{\nu}^*\times\mathbf{x}^*),\qquad z_2^0(\tau)=0,\qquad z_3^0(\tau)=\dot{\boldsymbol{\nu}}^*\cdot(\boldsymbol{\nu}^*\times\mathbf{x}^*), \tag{20}$$

то система (19) допускает интеграл

$$z_1^0(\tau)\cdot y_1+z_3^0(\tau)\cdot y_3=k_4, \tag{21}$$

где k_4 – некоторая постоянная. Соотношение (21) позволяет определить переменную

$$y_3=\frac{1}{\dot{\boldsymbol{\nu}}^{*2}}\big(k_4-\dot{\mathbf{x}}^*\cdot\dot{\boldsymbol{\nu}}^*\big)y_1. \tag{22}$$

Исключая в уравнениях (19) переменную y_3 с помощью соотношения (22), перейдем к уравнению второго порядка для переменной y_1:

$$\ddot{y}_1 + (\alpha_{11} + \alpha_{22})\dot{y}_1 + \big(\dot{\alpha}_{11} + \alpha_{12} - \alpha_{32}\frac{\dot{\mathbf{x}}^* \cdot \dot{\boldsymbol{\nu}}^*}{\dot{\boldsymbol{\nu}}^{*2}} + \alpha_{22}\alpha_{11}\big)y_1 + \alpha_{32}\frac{k_4}{\dot{\boldsymbol{\nu}}^{*2}} = 0. \qquad (23)$$

Полагая в этом уравнении $k_4 = 0$, введем новую переменную

$$y_1 = \eta \exp\big(-\frac{1}{2}\int(\alpha_{11} + \alpha_{22})dt\big).$$

Тогда из (23) получим уравнение

$$\ddot{\eta} + p(\tau)\eta = 0. \qquad (24)$$

где

$$p(\tau) = \alpha_{12} - \alpha_{32}\frac{\dot{\mathbf{x}}^* \cdot \dot{\boldsymbol{\nu}}^*}{\dot{\boldsymbol{\nu}}^{*2}}. \qquad (25)$$

Указанная выше замена переменных не изменяет характеристичных чисел системы (23). В силу структуры уравнения (24) для определения условий существования его положительных характеристичных чисел можно воспользоваться достаточным условием существования Ляпунова, то есть можно положить, что $p(\tau) \le 0,\ (p(\tau) \not\equiv 0)$ [7].

В случае, когда критерий Ляпунова применить невозможно, следует обращаться к методу параметрического резонанса, изложенному в [9].

Таким образом в данном разделе получено уравнение (24) с функцией $p(\tau)$ из (25), на основании свойств которого можно установить условие существования асимптотически-периодических движений сферического гиростата при ограничении, что частное решение (9) удовлетворяет условию $(\mathbf{x}^* \times \boldsymbol{\nu}^*) \neq 0$.

3. Приложение к исследованию случая [3]. В работе [3] для дифференциальных уравнений (1), (2) построено решение:

$$x_1^* = \frac{1}{2}\mu_0\alpha_1 + (\mu_0(\alpha_2+1)+f_0)\nu_1^* + f_1^2(\nu_1^*), \quad x_2^* = \nu_2^*(f_0+f_1\nu_1^*), \qquad x_3^* = \nu_3^*(\mu_0+f_0)+f_1(\nu_1^*),$$

$$\nu_2^*(\nu_1^*) = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1\nu_1^* + \alpha_2\nu_1^{*2}}, \quad \nu_3^*(\nu_1^*) = \sqrt{(1-\alpha_0) - \alpha_1\nu_1^* - (1+\alpha_2)\nu_1^{*2}}, \qquad (26)$$

$$\dot{\nu}_1^* = \frac{1}{2}\ a(B_3 - B_2)\ \nu_2^*(\nu_1^*)\ \nu_3^*(\nu_1^*).$$

Параметры решения (26) и параметры уравнений (1), (2) удовлетворяют условиям (матрицы A, B и C – диагональные с элементами $(a_1, a_2, a_3), (B_1, B_2, B_3)$ и (C_1, C_2, C_3)):

$$a_1 = a_2 = a_3 = a, \qquad \alpha_2 = \frac{B_1 - B_3}{B_3 - B_2}, \qquad \alpha_1 = -\frac{4\lambda_1}{3(B_3 - B_2)}, \qquad f_1 = \frac{1}{2}\alpha_1(B_3 - B_2);$$

$$\mu_0 = \frac{1}{2}(B_3 - B_2), \qquad C_3 - C_2 = \frac{1}{4}a(B_3 - B_2)(B_1 + B_2 - 2f_0),$$

$$C_1(B_3 - B_2) + C_2(B_1 - B_3) + C_3(B_2 - B_1) = \frac{1}{4}a(B_1 - B_3)(B_2 - B_1)(B_3 - B_2), \qquad (27)$$

$$2s_1 = -\alpha_1(C_3 - C_2) + \frac{1}{4}a\alpha_1(B_3 - B_2)(B_1 + B_3 - 2B_2 + 2f_0 - 2\alpha_0(B_3 - B_2)).$$

Придадим параметрам задачи (1), (2) следующие значения:

$$\mathbf{s} = (s_1, 0, 0), \qquad \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, 0, 0), \qquad s_1 = -\frac{35b^2}{2}, \qquad \lambda_1 = -\frac{3b}{2}, \qquad C_1 = c,$$

$$C_2 = c + \frac{5b^2}{2}, \qquad B_1 = 6b, \qquad B_2 = b, \qquad B_3 = 2b.$$

Здесь c и b – произвольные параметры. Тогда решение (26) примет вид:

$$x_1^* = b(\nu_1^* - \frac{7}{2})(\nu_1^* + 2), \qquad x_2^* = \frac{1}{2}b(\nu_1^* - \frac{7}{2})(4\nu_1^* - 1), \qquad x_3^* = b\nu_3^*(\nu_1^* - \frac{7}{2}),$$

$$\nu_2^* = \frac{1}{2}(4\nu_1^* + 1), \qquad \nu_3^* = \sqrt{\frac{3}{4} - 2\nu_1^* - 5\nu_1^{*2}}, \tag{28}$$

$$\nu_1^* = \frac{e+d}{2} + \left(\frac{e-d}{2}\right)\left(\frac{n_0 \cos\sqrt{n_0^2 - m_0^2}\tau - m_0}{n_0 - m_0 \cos\sqrt{n_0^2 - m_0^2}\tau}\right),$$

здесь $e \approx -0,63$; $d \approx 0,23$; $n_0 \approx 3,7$; $m_0 \approx 0,43$. Используя соотношения (18) для решения (28), выпишем функцию $p(\tau)$:

$$p(\tau) = \frac{841b^2}{8} + c + \frac{11b^2\nu_1^*(\tau)}{4} + 14b^2\nu_1^*(\tau), \tag{29}$$

где $\nu_1^*(\tau)$ определяется соотношением из системы (28). В силу ограниченности функций $\nu_1^*(\tau)$ условия $p(\tau) \leq 0$ можно добиться выбором параметра c. Тогда система в вариациях (12) имеет одно положительное характеристичное число, а нелинейная система (11) может допускать однопараметрическое семейство решений, которое описывает асимптотически-периодическое движение, предельное решение которого характеризуется соотношениями (26).

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч.: В 5 т. – М.; Л.: Изд-во АН СССР. – 1956. – Т. 2. – С. 7-263.
2. *Харламов П.В., Мозалевская Г.В., Лесина М.Е.* // О различных представлениях уравнений Кирхгофа // Механика твердого тела. – 2001. – Вып. 31. – С. 3-17.
3. *Горр Г.В., Миронова Е.М.* Об одном классе частных решений уравнений движения гиростата в поле потенциальных и гироскопических сил // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2002. – **5**. – С. 29-37.
4. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела: Развитие и современное состояние. – Киев: Наук. думка, 1978. – 296 с.
5. *Харламов П.В.* Современное состояние и перспективы развития классических задач динамики твердого тела // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 1-13.
6. *Лесина М.Е., Кудряшова Л.В.* О некоторых направлениях исследований в Донецкой школе динамики твердого тела // Там же. – С. 35-68.
7. *Вархалев Ю.П., Горр Г.В.* Первый метод Ляпунова в исследовании асимптотических движений в динамике твердого тела // Механика твердого тела. – 1992. – Вып. 24. – С. 25-41.
8. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики // Избр. тр.: В 2-х т. – М.: Наука. – 1971. – Т. 1. – 777 с.
9. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. – М.: Наука, 1972. – 720 с.

Донецкий национальный ун-т
annabell@ukrtop.com

Получено 03.04.03