

УДК 531.38

©2003. Е.Ю. Кучер

## ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СТЕКЛОВА И ЧАПЛЫГИНА

Вычислены показатели Ляпунова линеаризованной системы уравнений возмущенного движения для двух семейств частных периодических решений, полученных В.А. Стекловым и С.А. Чаплыгиным. Изучена структура фазового пространства в окрестности этих решений. В пространстве параметров определены области динамической неустойчивости движения. Для типичных значений параметров приведены результаты компьютерного моделирования.

**Введение.** Рассматриваемые в данной работе частные решения относятся к случаю, когда центр масс тела находится на одной из главных осей инерции. Тогда уравнения Эйлера-Пуассона имеют вид

$$A_1\dot{\omega}_1 = (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3, \quad A_2\dot{\omega}_2 = (A_3 - A_1)\omega_3\omega_1 - \nu_3, \quad A_3\dot{\omega}_3 = (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + \nu_2, \quad (1)$$

$$\dot{\nu}_1 = \omega_3\nu_2 - \omega_2\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = \omega_1\nu_3 - \omega_3\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = \omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2, \quad (2)$$

где  $\omega_i$  - компоненты угловой скорости тела,  $\nu_i$  - компоненты единичного вектора направления силы тяжести,  $A_i$  - главные моменты инерции твердого тела, дифференцирование по времени обозначено точкой. Уравнения (1), (2) допускают первые интегралы

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2) - \nu_1 &= h, \\ A_1\omega_1\nu_1 + A_2\omega_2\nu_2 + A_3\omega_3\nu_3 &= g, \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Последние 250 лет задача о движении твердого тела вокруг неподвижной точки привлекала внимание многих выдающихся математиков и механиков, пытавшихся проинтегрировать динамические уравнения Эйлера, но только три интегрируемых случая (указанные Эйлером, Лагранжем и Ковалевской) и несколько семейств частных решений были найдены за все это время. Аналитическое описание частных решений, а также результаты качественного изучения движений твердого тела методом годографов изложены в монографиях [1, 2].

В настоящей работе продолжено начатое в [3-5] исследование поведения возмущенных траекторий в окрестности известных частных решений классической задачи, методом сечений Пуанкаре исследованы траектории вблизи периодических решений Стеклова и Чаплыгина, вычислены характеристические показатели уравнений в вариациях для этих двух семейств частных решений и проведены аналитические исследования простейших предельных случаев.

**1. Показатели Ляпунова.** Составим уравнение в вариациях для  $2\pi$ -периодического решения

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^*(t), \quad \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}^*(t)$$

системы (1), (2), полагая в возмущенном движении  $\omega_i = \omega_i^* + \delta\omega_i$ ,  $\nu_i = \nu_i^* + \delta\nu_i$ , где  $i = 1, 2, 3$ . Далее обозначим  $\mathbf{x} = (\delta\boldsymbol{\omega}, \delta\boldsymbol{\nu})^T$ . Запишем линеаризованную относительно  $\mathbf{x}$  систему уравнений возмущенного движения:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t)\mathbf{x}, \quad (4)$$

где коэффициенты матрицы  $\mathcal{A}(t)$  являются периодическими функциями и, следовательно, для всех  $t$  выполняется равенство  $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}(t+2\pi)$ . Матрица  $\mathbf{X}(t)$  фундаментальной системы решений уравнения (4) удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}, \quad \mathbf{X}(t+2\pi) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}(2\pi), \quad \det \mathbf{X}(t) = 1, \quad (5)$$

где  $\mathbf{E}$  – единичная матрица шестого порядка. Матрица  $\mathbf{X}(2\pi)$  называется матрицей монодромии, а ее собственные значения – мультипликаторами уравнения (4). Мультипликаторы удовлетворяют характеристическому уравнению

$$\det [\mathbf{X}(2\pi) - \rho\mathbf{E}] = 0. \quad (6)$$

Пусть  $\rho_1, \dots, \rho_6$  – мультипликаторы уравнения в вариациях (4), тогда характеристические показатели этого уравнения вычисляются по формулам:

$$\lambda_i = \frac{1}{2\pi} \ln \rho_i, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (7)$$

Заметим, что в рассматриваемой постановке система первого приближения является правильной и, кроме того, уравнение (4) имеет не менее четырех нулевых характеристических показателей из шести [6]. Различные методы упрощения системы (4) рассмотрены в работах [3, 4, 6].

**2. Случай В.А. Стеклова.** В 1899 г. появилась небольшая заметка В.А.Стеклова, в которой он предложил новое решение. Обзор работ, связанных с переоткрытием решения Стеклова, имеется в [2, 7]. Пусть моменты инерции подчинены следующему условию:  $(2A_2 - A_1)(2A_3 - A_1) < 0$ . Введем безразмерные параметры

$$\alpha = A_2/A_1, \quad \beta = A_3/A_1.$$

Решение Стеклова определено следующими алгебраическими соотношениями

$$\begin{aligned} \omega_2^2 &= a_0 + a_1\omega_1^2, \quad \omega_3^2 = b_0 + b_1\omega_1^2, \\ \nu_1 &= \zeta_0 + \zeta_1\omega_1^2, \quad \nu_2 = \eta_0\omega_1\omega_2, \quad \nu_3 = \xi_0\omega_1\omega_3. \end{aligned} \quad (8)$$

Постоянные коэффициенты  $a_0, a_1, b_0, b_1, \zeta_0, \zeta_1, \eta_0, \xi_0$  зависят от двух безразмерных параметров  $\alpha, \beta$ :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{(1-2\beta)\varepsilon}{(\alpha-\beta)(1-\alpha)(1-\beta)}, \quad a_1 = \frac{(\beta-1)}{(2\alpha-1)(\alpha-\beta)}, \quad \varepsilon = \pm 1, \\ b_0 &= \frac{(2\alpha-1)\varepsilon}{(\alpha-\beta)(1-\alpha)(1-\beta)}, \quad b_1 = \frac{\alpha-1}{(1-2\beta)(\alpha-\beta)}, \quad \zeta_0 = \varepsilon, \\ \zeta_1 &= \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{(1-2\alpha)(1-2\beta)}, \quad \eta_0 = \zeta_1(2\alpha-1), \quad \xi_0 = \zeta_1(2\beta-1). \end{aligned}$$

При выполнении неравенств  $\beta+1 > \alpha > 1 > 2\beta$  положим  $\varepsilon = -1$ , а при выполнении  $1/2 > \beta > 1-\alpha > 0$  пусть  $\varepsilon = 1$ . Следует заметить, что преобразование  $(\alpha, \beta, \omega_2, \omega_3, \nu_2, \nu_3) \rightarrow (\beta, \alpha, \omega_3, \omega_2, \nu_3, \nu_2)$  не изменяет инвариантные соотношения

(8), характеризующие решение. При фиксированных значениях параметров  $\alpha, \beta$  соотношения (8) определяют две траектории, симметричные относительно главной плоскости инерции. Соответствие между симметричными траекториями задано координатным преобразованием  $(\omega_3, \nu_3) \rightarrow (-\omega_3, -\nu_3)$ . Неподвижная точка этого преобразования  $\omega_3 = \nu_3 = 0$  не принадлежит траектории решения Стеклова, так как следствием (8) является соотношение  $\omega_1^2 + (2\alpha - 1)\omega_2^2 + (2\beta - 1)\omega_3^2 = 0$ .

В случае Стеклова динамические уравнения (1) примут вид

$$\dot{\omega}_1 = (\alpha - \beta)\omega_2\omega_3, \quad \dot{\omega}_2 = \frac{\beta - 1}{2\alpha - 1}\omega_3\omega_1, \quad \dot{\omega}_3 = \frac{\alpha - 1}{1 - 2\beta}\omega_1\omega_2.$$

Зависимость  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  от времени выражается эллиптическими функциями Якоби в одной из двух форм, каждая из которых соответствует одной из последовательностей указанных ранее неравенств между  $\alpha$  и  $\beta$ . Для первого варианта имеем

$$\omega_1 = p_0 \operatorname{cn} \varkappa t, \quad \omega_2 = q_0 \operatorname{sn} \varkappa t, \quad \omega_3 = r_0 \operatorname{dn} \varkappa t, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} p_0^2 &= \frac{(1 - 2\beta)(2\alpha - 1)}{(1 - \beta)^2(\alpha - 1)}, & q_0^2 &= \frac{1 - 2\beta}{(1 - \beta)(\alpha - 1)(\alpha - \beta)}, \\ r_0^2 &= \frac{2\alpha - 1}{(1 - \beta)^2(\alpha - 1)}, & \varkappa^2 &= \frac{\alpha - \beta}{(1 - \beta)(\alpha - 1)}, & k^2 &= \frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta}. \end{aligned} \quad (10)$$

Второй вариант характеризуют зависимости

$$\omega_1 = p_0 \operatorname{sn} \varkappa t, \quad \omega_2 = q_0 \operatorname{cn} \varkappa t, \quad \omega_3 = r_0 \operatorname{dn} \varkappa t, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} p_0^2 &= \frac{(1 - 2\beta)(2\alpha - 1)}{(1 - \beta)^2(1 - \alpha)}, & q_0^2 &= \frac{1 - 2\beta}{(1 - \beta)(1 - \alpha)(\alpha - \beta)}, \\ r_0^2 &= \frac{2\alpha - 1}{(1 - \beta)(\alpha - \beta)(1 - \alpha)}, & \varkappa^2 &= \frac{1}{1 - \alpha}, & k^2 &= \frac{1 - \alpha}{1 - \beta}. \end{aligned} \quad (12)$$

Эллиптические функции Якоби и их модуль  $k$  связывают известные соотношения

$$\operatorname{cn}^2 \tau + \operatorname{sn}^2 \tau = 1, \quad 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \tau = \operatorname{dn}^2 \tau.$$

В.А.Стеклов ограничился анализом первого варианта своего решения. Второй вариант был отмечен П.А.Кузьминым и подробно проанализирован в работе [8]. Интегральные константы имеют следующий вид

$$g = 0, \quad h = \frac{2\alpha + 2\beta - 2\alpha\beta - 1}{2(\alpha - 1)(\beta - 1)} \varepsilon. \quad (13)$$

Изучим поведение траекторий возмущенного движения в окрестности решения Стеклова.

Результаты исследования орбитальной устойчивости решений Стеклова представлены на рис. 1,  $a$  (ось  $Oa$  направлена горизонтально). Физически допустимые значения параметров  $\alpha, \beta$  принадлежат треугольнику с вершинами  $P_1(1/2, 1/2)$ ,  $P_2(3/2, 1/2)$ ,  $P_3(1, 0)$ . Пусть  $\varepsilon = 1$  и, следовательно,  $\alpha < 1$ . На рис. 1 этому неравенству удовлетворяют внутренние точки треугольника  $P_1 P_3 P_4$ . Для этих значений параметров движения,

как правило, орбитально устойчивые. Однако, здесь существует узкая область динамической неустойчивости движения, соответствующая параметрическому резонансу с собственной частотой  $5/2$ . Кроме того, движения тела могут быть неустойчивыми и на кривых резонансов, которые показаны до четвертого порядка включительно. Все отмеченные линии резонансов в незаштрихованной части треугольника  $P_1 P_3 P_4$  начинаются в окрестности точки  $P_1$  и заканчиваются в окрестности точки  $P_3$ . Резонансная кривая, соответствующая значению собственной частоты  $9/4$ , пересекает граничный отрезок  $P_1 P_3$  в двух точках  $P_5$  и  $P_6$ .

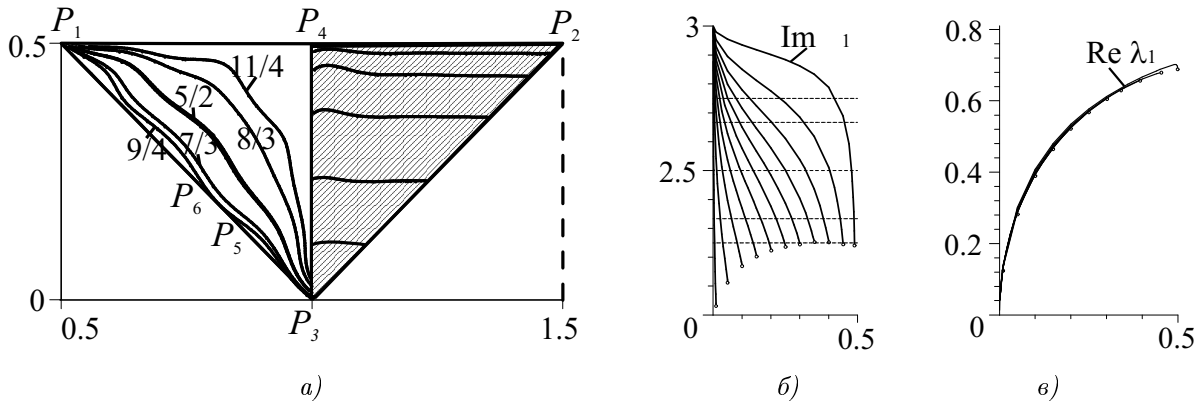


Рис. 1. Характеристические показатели решения Стеклова: а) области неустойчивости и кривые основных резонансов на плоскости  $\mathbb{R}^2(\alpha, \beta)$ ; б) зависимость  $\text{Im } \lambda_1$  от параметра  $\beta$  для  $\alpha = \text{const} < 1$ ; в) зависимость  $\text{Re } \lambda_1$  от параметра  $\beta$  для  $\alpha = \text{const} > 1$ .

Изучим зависимость величин  $\lambda_{1,2}$  от параметров. Каждый из интервалов  $(1/2, 1)$ ,  $(1, 3/2)$  изменения параметра  $\alpha$  разделим на десять равных частей и на сечениях, соответствующих  $\alpha = \text{const}$ , вычислим показатели как функции свободного параметра  $\beta \in (|1 - \alpha|, 1/2)$ . Зависимость характеристических показателей от величины  $1/2 - \beta$  показана на рис. 1, б, в. На рис. 1, б резонансы (до четвертого порядка включительно) отмечены горизонтальными линиями, крайняя (справа) кривая соответствует сечению  $\alpha \approx 1 - \epsilon$ . На рис. 1, в также изображено одиннадцать кривых, но они накладываются друг на друга, так как при фиксированных значениях  $\beta$  функция  $\lambda_1(\alpha)$  мало отличается от константы для всех  $\alpha \in (1 + \epsilon, 3/2 - \epsilon)$ . В окрестности отрезка  $P_3 P_4$  (при  $\alpha \rightarrow 1$ ) константа  $h$  неограниченно возрастает, что можно интерпретировать как приближение центра масс тела к неподвижной точке. В этом случае решение Стеклова будет стремиться к частному решению Эйлера. Здесь необходимо провести более точные исследования показателей  $\lambda_{1,2}$ .

Заметим, что характеристические показатели определяются из уравнения (7) неоднозначно, с точностью до слагаемых  $im$ , где  $m$  – целое число,  $i = \sqrt{-1}$ . Непрерывная зависимость  $\lambda_{1,2}$  от параметров позволила устранить эту неоднозначность. Во-первых, были проанализированы предельные случаи, когда решение Стеклова вырождается в решение, описывающее движение физического маятника. Во-вторых, были изучены характеристические показатели простейших маятниковых движений, которые непрерывно изменяются до тех пор, пока движение не вырождается в устойчивое положение равновесия. Таким образом были вычислены значения слагаемых  $im$ , неоднозначность была устранена.

Результаты численного моделирования траекторий решения Стеклова представлены на рис. 2. Общая методика исследования и обоснование выбора фазовых сечений обсуждалась в работе [9]. Фазовое сечение, изображенное на рис. 2, *а*, соответствует устойчивому периодическому решению. Стрелкой отмечена точка, в которой замкнутая траектория пересекает заданную поверхность. Если возмущение достаточно мало, то почти все траектории возмущенного движения принадлежат инвариантным торам, стягивающимся к замкнутой кривой (торы соответствуют концентрическим окружностям на рис. 2, *а*). Эти концентрические окружности исчезают на рис. 2, *б*: траектория решения Стеклова является орбитально неустойчивым предельным циклом, так как здесь параметры  $\alpha, \beta$  соответствуют полуцелому резонансу ( $\lambda_{1,2} = \pm i5/2$ ). Фазовое сечение на рис. 2, *б* качественно не отличается от фазового сечения, полученного для решения Горячева [5] в случае  $\gamma \approx 0.4163135$ ,  $\lambda_{1,2} = \pm i5/2$ . В окрестности невозмущенной траектории происходит бифуркация одного инвариантного тора в два тора с удвоением периодов обращения вдоль их осевых окружностей [5]. Сепаратрисная поверхность, состоящая из асимптотических траекторий возмущенного движения, формирует четыре “лепестка” на рис. 2, *б*. Четыре неподвижные точки отображения последования (см. рис. 2, *б*) принадлежат двум орбитально устойчивым замкнутым траекториям с периодами почти в два раза превышающими период решения Стеклова.

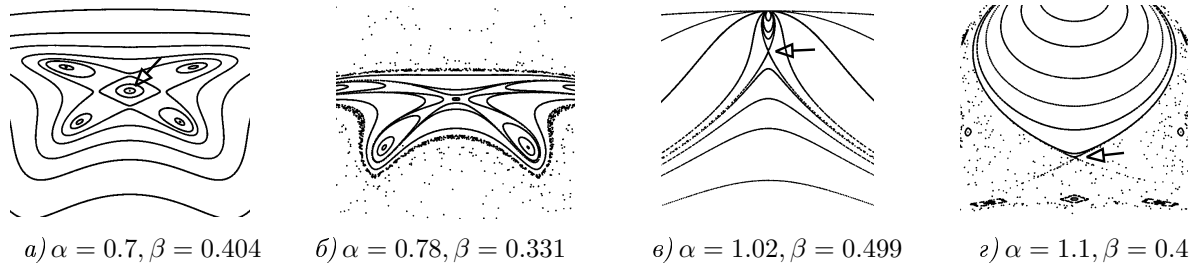


Рис. 2. Окрестность решения Стеклова.

Теперь положим  $\varepsilon = -1$  и, следовательно,  $\alpha > 1$ . На рис. 1, *а* этому неравенству удовлетворяет заштрихованная область треугольника  $P_2 P_3 P_4$ . В этом случае решение аналитически описывают соотношения (8),(11). Из анализа характеристических показателей следует, что решение Стеклова в этой области является орбитально неустойчивым при любых значениях параметров  $\alpha, \beta$ . Эта особенность решения Стеклова никем ранее не была отмечена. Результаты численного моделирования для значений параметров  $\alpha, \beta$  из треугольника  $P_2 P_3 P_4$  представлены на рис. 2, *в, г*. Замкнутая траектория невозмущенного движения пересекает фазовое сечение в точке, отмеченной стрелкой. Асимптотически неустойчивые траектории возмущенного движения можно разделить на два семейства: к первому семейству отнесем траектории, для которых решение Стеклова является  $\alpha$ - и  $\omega$ -предельным циклом (они формируют сепаратрисную кривую, расположенную выше неподвижной точки на рис. 2, *г*); ко второму семейству отнесем траектории, которые не принадлежат сепаратрисной поверхности, а заполняют некоторую область фазового пространства (они заполняют область, расположенную ниже неподвижной точки на рис. 2, *г*). Можно сказать, что в случае Стеклова расщепляется только одна из сепаратрисных поверхностей. Это расщепление незначительно при  $\beta \rightarrow 1/2$ , так как возмущенные траектории находятся в узкой щели между инвариантными торами (см. рис. 2, *в*). При уменьшении значения параметра  $\beta$  рядом с невоз-

мущенной траекторией формируется область неустойчивости, заполненная хаотическими траекториями. Заметим, что эта область неустойчивости соединяет обе траектории решения Стеклова, соответствие между которыми задано координатным преобразованием  $(\omega_3, \nu_3) \rightarrow (-\omega_3, -\nu_3)$ . Если значения параметров  $\alpha, \beta$  выбрать в треугольнике  $P_2 P_3 P_4$  и зафиксировать, то обе симметричные траектории имеют одинаковые характеристические показатели и, следовательно, являются неустойчивыми. Не исключено, что в области неустойчивости найдутся траектории, неограниченно приближающиеся к обоим невозмущенным траекториям.

**3. Случай С.А. Чаплыгина.** В 1904 г. С.А. Чаплыгин сообщил о новом частном решении задачи, к которому он пришел, обобщая подход В.А. Стеклова и Д.Н. Горячева к построению точного решения. Пусть моменты инерции подчинены следующему условию:  $9(2A_2 - A_1)(2A_3 - A_1) = 4A_2A_3$ . Введем безразмерный параметр  $\gamma$  так, что

$$A_2 = \gamma A_1, \quad A_3 = \frac{9(2\gamma - 1)}{2(16\gamma - 9)} A_1, \quad \gamma \in \left( \frac{3}{2}, \frac{17 + \sqrt{73}}{16} \right).$$

Для значений  $\gamma < 3/2$  нарушаются условия вещественности решения, инвариантные соотношения Чаплыгина не описывают физически возможное движение. Для значений  $\gamma \geq (17 + \sqrt{73})/16$  моменты инерции твердого тела не удовлетворяют неравенству треугольника. Решение описывается следующими алгебраическими инвариантными соотношениями:

$$\begin{aligned} \omega_2^2 &= a_0 \omega_1^{\frac{2}{3}} + a_1 \omega_1^2, & \omega_3^2 &= b_0 \omega_1^{\frac{2}{3}} + b_1 \omega_1^2, \\ \nu_1 &= \zeta_0 \omega_1^{\frac{2}{3}} + \zeta_1 \omega_1^2, & \nu_2 &= (\eta_0 + \eta_1 \omega_1^{-\frac{4}{3}}) \omega_1 \omega_2, & \nu_3 &= (\xi_0 + \xi_1 \omega_1^{-\frac{4}{3}}) \omega_1 \omega_3. \end{aligned} \quad (14)$$

Коэффициенты соотношений (14) выражаются с помощью формул, содержащих один параметр  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2(5\gamma - 3)\varkappa}{(8\gamma - 3)(4\gamma - 3)(2\gamma - 1)}, & a_1 &= \frac{(9 - 14\gamma)}{(8\gamma - 3)(4\gamma - 3)(2\gamma - 1)}, \\ b_0 &= \frac{\varkappa(2\gamma - 3)(16\gamma - 9)^2}{6\gamma(8\gamma - 3)(4\gamma - 3)}, & b_1 &= \frac{(1 - \gamma)(16\gamma - 9)^2}{\gamma(8\gamma - 3)(4\gamma - 3)}, \\ \zeta_0 &= \frac{\varkappa(12\gamma^2 - 22\gamma + 9)}{8\gamma(2\gamma - 1)}, & \zeta_1 &= \frac{(14\gamma - 9)(1 - \gamma)}{4\gamma(2\gamma - 1)}, \\ \eta_0 &= \frac{(14\gamma - 9)(1 - \gamma)}{4\gamma}, & \eta_1 &= \frac{\varkappa(2\gamma - 3)(2\gamma - 1)}{8\gamma}, & \xi_0 &= \frac{(14\gamma - 9)(1 - \gamma)}{2(16\gamma - 9)(2\gamma - 1)}, \\ \xi_1 &= \frac{\varkappa\gamma(3 - 5\gamma)}{3(16\gamma - 9)(2\gamma - 1)}, & \varkappa^3 &= \frac{864\gamma^2(2\gamma - 1)^2}{(5\gamma - 3)(2\gamma - 3)(4\gamma - 3)^2}. \end{aligned}$$

Постоянные интегралов энергии и площадей равны нулю и, следовательно, не зависят от  $\gamma$ . Переменная  $z = \omega_1^{\frac{2}{3}}$  связана со временем гиперэллиптической квадратурой. С помощью годографов угловой скорости П.В. Харламов [1] полностью исследовал возможные движения тела в случае Чаплыгина. Подвижный годограф угловой скорости имеет точку самопересечения  $(\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0)$  и напоминает “восьмерку”. При  $\gamma = 3/2$

решение вырождается, тело движется как физический маятник и три фазовые переменные сохраняют свои начальные значения ( $\omega_1 = \omega_3 = \nu_2 = 0$ ). В этом предельном случае характеристические показатели уравнения в вариациях (4) можно вычислить аналитически: все шесть показателей (7) оказываются равными нулю.

Для всех допустимых значений параметра  $\gamma$  вычислены характеристические показатели линеаризованной системы уравнений возмущенного движения. Показатели решения Чаплыгина принимают только действительные значения. Например, положительные показатели непрерывно и монотонно возрастают от значения  $\lambda_1 = 0$  при  $\gamma = 1.5$  до максимального значения  $\lambda_1 = 0.242073$  при  $\gamma \approx 1.59650$ . Зависимость характеристических показателей  $\lambda_1$  от параметра  $\gamma$  показана на рис. 3, а. Одно из возможных фазовых сечений изображено на рис. 3, б. Если значение  $\gamma$  мало отличается

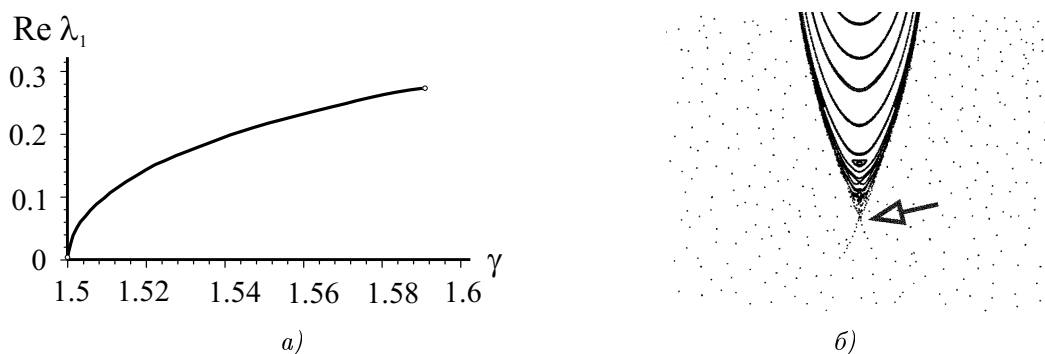


Рис. 3. Случай Чаплыгина: а) зависимость  $\text{Re } \lambda_1$  от параметра  $\gamma$ ; б) фазовое сечение для  $\gamma = 1.555$ .

ся от  $3/2$ , то часть асимптотически неустойчивых траекторий возмущенного движения формирует сепаратрисную поверхность, но с ростом  $\gamma$  эта поверхность разрушается. Результаты компьютерного моделирования подтверждают вывод о том, что динамическая система (1) является локально неустойчивой в окрестности решения Чаплыгина.

Автор благодарит И.Н.Гашененко за постановку задачи и внимание к работе.

1. Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-во Новосибир. ун-та, 1965. – 221 с.
2. Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А. Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. – Киев: Наук. думка. – 1978. – 296 с.
3. Тхай В.Н. Об устойчивости регулярных прецессий Гриоли// Прикл. математика и механика. – 2000. – 64, вып. 5. – С. 848-857.
4. Маркеев А.П. Об устойчивости регулярной прецессии несимметричного гироскопа (случай Гриоли)// Докл. РАН. – 2002. – 387, № 3. – С. 338-342.
5. Гашененко И.Н., Кучер Е.Ю. Характеристические показатели периодических решений уравнений Эйлера-Пуассона// Механика твердого тела. – 2002. – Вып. 32. – С. 50-59.
6. Вархалев Ю.П., Горр Г.В. Первый метод Ляпунова в исследовании асимптотических движений в динамике твердого тела// Там же. – 1992. – Вып. 24. – С. 25-41.
7. Кудряшова Л.В., Мозалевская Г.В. Об одном классе решений задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку// Математическая физика. – 1968 – Вып. 5. – С. 139-150.
8. Харламова Е.И., Мозалевская Г.В. Исследование решения В.А.Стеклова уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку// Там же. – С. 194-202.
9. Гашененко И.Н., Кучер Е.Ю. Анализ изоэнергетических поверхностей для точных решений задачи о движении твердого тела// Механика твердого тела. – 2001. – Вып. 31. – С. 18-30.