

УДК 531.38

©2003. М.П. Харламов, А.Ю. Савушкин, Е.Г. Шведов

БИФУРКАЦИОННОЕ МНОЖЕСТВО В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ОБОБЩЕННОГО ВОЛЧКА КОВАЛЕВСКОЙ

Построено бифуркационное множество первых интегралов в задаче о движении волчка Ковалевской в двойном параллельном силовом поле на инвариантном четырехмерном подмногообразии фазового пространства, которое аналогично множеству особо замечательных движений 2-го и 3-го классов Аппельрота в классической задаче о движении тяжелого твердого тела.

Введение. К настоящему времени исследование топологии фазового пространства классического гироскопа С.В. Ковалевской [1] полностью завершено. Бифуркационное множество интегрального отображения, топологические типы интегральных многообразий, как регулярных, так и критических, найдены в [2]. Более подробное изложение вопроса, включающее и так называемый геометрический анализ – исследование областей возможности движения на сфере Пуассона, имеется в [3,4]. В работе [5] вычислены числовые инварианты слоения фазового пространства, которые полностью описывают класс орбитальной эквивалентности всей задачи Ковалевской в целом. О.И. Богоявленский [6,7] привлек внимание к задаче о движении твердого тела в двойном однородном силовом поле (потенциал – линейная функция двух независимых наборов направляющих косинусов) и указал в этой задаче общий интеграл типа Ковалевской. При этом был выделен один случай существования дополнительного четвертого частного интеграла, аналогичный случаю Делоне в классической задаче Ковалевской. Интеграл Богоявленского был обобщен на задачу о движении гиростата в двойном силовом поле [8]. Однако система не считалась вполне интегрируемой, поскольку в ней отсутствует интеграл площадей. Обобщение этого интеграла (точнее, его квадрата) было найдено в фундаментальной работе [9], чем доказана интегрируемость по Лиувиллю задачи о движении волчка Ковалевской в двойном силовом поле. По инициалам авторов назовем эту задачу интегрируемым случаем БРС. Исследование фазовой топологии случая БРС является принципиально новой задачей – система "трехмерна" по существу. Отсутствие явных симметрий не позволяет редуцировать ее, как это делается для тяжелого твердого тела, к гамильтоновой системе с двумя степенями свободы, интегральные многообразия общего положения – трехмерные торы. В этом направлении целесообразно начать с выявления четырехмерных инвариантных подсистем, имеющих симплектическую структуру. Ясно, что эти системы могут быть лишь подмногообразиями множества критических точек интегрального отображения (это множество само инвариантно относительно фазового потока). Одно из таких многообразий и указано в работе [7] – это множество критических точек самого интеграла типа Ковалевской. Фазовая топология случая Богоявленского исследована в [10]. Еще одно инвариантное четырехмерное подмногообразие фазового пространства случая БРС указано в [11]. В данной работе изучено бифуркационное множество соответствующей интегрируемой гамильтоновой системы.

1. Основные уравнения. Рассматривается твердое тело с неподвижной точкой в потенциальном поле с силовой функцией $(\mathbf{e}_1, \boldsymbol{\alpha}) + (\mathbf{e}_2, \boldsymbol{\beta})$, где векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ фиксирова-

ны в теле, а α, β – неизменны в пространстве. Полагаем, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ – это орты первых осей обобщенного тензора инерции, соответствующие моменты инерции связаны соотношением $I_1 = I_2 = 2I_3$. Переходя к безразмерным величинам, запишем уравнения движения в виде

$$\begin{aligned} 2\omega_1^\bullet &= \omega_2\omega_3 + \beta_3, & 2\omega_2^\bullet &= -\omega_1\omega_3 - \alpha_3, & \omega_3^\bullet &= \alpha_2 - \beta_1, \\ \alpha_1^\bullet &= \alpha_2\omega_3 - \alpha_3\omega_2, & \beta_1^\bullet &= \beta_2\omega_3 - \beta_3\omega_2 \end{aligned} \quad (1)$$

(невывисанные уравнения второй группы получаются циклической перестановкой индексов). Геометрические соотношения

$$(\alpha, \alpha) = a^2, \quad (\beta, \beta) = b^2, \quad (\alpha, \beta) = c, \quad (2)$$

задают в $\mathbf{R}^6(\alpha_i, \beta_j)$ конфигурационное пространство твердого тела, диффеоморфное группе вращений $SO(3)$. Система (1) имеет: интеграл энергии

$$H = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{1}{2}\omega_3^2 - (\alpha_1 + \beta_2), \quad (3)$$

интеграл Ковалевской – Богоявленского

$$K = (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \alpha_1 - \beta_2)^2 + (2\omega_1\omega_2 + \alpha_2 + \beta_1)^2 \quad (4)$$

и интеграл БРС

$$\begin{aligned} G &= (\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 + \frac{1}{2}\alpha_3\omega_3)^2 + (\beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2 + \frac{1}{2}\beta_3\omega_3)^2 + \\ &+ \omega_3(\gamma_1\omega_1 + \gamma_2\omega_2 + \frac{1}{2}\gamma_3\omega_3) - \alpha_1b^2 - \beta_2a^2 + (\alpha_2 + \beta_1)c, \end{aligned} \quad (5)$$

где через γ_i обозначены компоненты в подвижных осях постоянного вектора $\gamma = \alpha \times \beta$.

Положим $\xi_1 = \alpha_1 - \beta_2$, $\xi_2 = \alpha_2 + \beta_1$. В работе [11] приведена система соотношений

$$\begin{aligned} (\xi_1^2 + \xi_2^2)\omega_3 - 2[(\xi_1\omega_1 + \xi_2\omega_2)\alpha_3 + (\xi_2\omega_1 - \xi_1\omega_2)\beta_3] &= 0, \\ 2[c(\xi_1^2 - \xi_2^2) - (a^2 - b^2)\xi_1\xi_2](\omega_1^2 - \omega_2^2 + \xi_1) + \\ + [(a^2 - b^2)(\xi_1^2 - \xi_2^2) + 4c\xi_1\xi_2](2\omega_1\omega_2 + \xi_2) &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

определяющая инвариантное подмногообразие N^4 фазового пространства. Два из трех интегралов (3)-(5) или две их нетривиальные комбинации могут быть приняты за интегралы в инволюции индуцированной системы на N^4 . Поставим задачу отыскания соответствующего множества критических точек индуцированного интегрального отображения (это множество не зависит от выбора интегралов, так как целиком состоит из траекторий особого механического характера) и его образа – бифуркационной диаграммы в соответствующей плоскости констант интегралов.

Осуществим замену переменных [11]

$$\begin{aligned} v_1 &= \omega_1 + i\omega_2, & v_2 &= \bar{v}_1, \\ x_1 &= (\alpha_1 - \beta_2) + i(\alpha_2 + \beta_1), & x_2 &= \bar{x}_1, \\ y_1 &= (\alpha_1 + \beta_2) + i(\alpha_2 - \beta_1), & y_2 &= \bar{y}_1, \\ z_1 &= \alpha_3 + i\beta_3, & z_2 &= \bar{z}_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Соотношения (2) запишем следующим образом

$$x_1x_2 + y_1y_2 + 2z_1z_2 = 2p^2, \quad (8)$$

$$z_1^2 + x_1y_2 = c_1^2, \quad z_2^2 + x_2y_1 = c_2^2. \quad (9)$$

Здесь $p^2 = a^2 + b^2$, $c_{1,2}^2 = (a^2 - b^2) \pm 2ic$ – независимые параметры. Кроме того, обозначим

$$\gamma = |\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}| = \sqrt{a^2b^2 - c^2}, \quad r = |c_1^2| = |c_2^2| = \sqrt{p^4 - 4\gamma^2}. \quad (10)$$

Уравнения (6) многообразия N^4 запишутся в виде

$$x_1x_2\omega_3 - (x_2z_1v_1 + x_1z_2v_2) = 0, \quad U_1 - U_2 = 0, \quad (11)$$

где

$$U_1 = x_2c_1^2(v_1^2 + x_1)/x_1, \quad U_2 = x_1c_2^2(v_2^2 + x_2)/x_2.$$

Введем следующую функцию – комбинированный первый интеграл системы (1):

$$M = (2G - p^2H)/r^2. \quad (12)$$

В переменных (7) интегралы (3), (4), (12) примут вид

$$H = \frac{1}{2}\omega_3^2 + v_1v_2 - \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad K = \frac{1}{r^2}U_1U_2, \quad (13)$$

$$M = \frac{1}{2r^2}[(U_1 + U_2) - x_1x_2(\omega_3 - \frac{x_2z_1v_1 + x_1z_2v_2}{x_1x_2})^2].$$

Очевидным следствием уравнений (11) является равенство

$$K = r^2M^2, \quad (14)$$

а также тот факт, что многообразие N^4 является множеством критических точек интеграла $K - r^2M^2$, лежащих на его нулевой поверхности уровня. В качестве интегрального отображения для системы на N^4 выберем

$$J = M \times H : N^4 \rightarrow \mathbf{R}^2,$$

опишем множество его критических точек и построим бифуркационную диаграмму.

2. Классический аналог. С целью сопоставления результатов рассмотрим аналогичную ситуацию в классической задаче Ковалевской, которая соответствует следующим предположениям

$$\boldsymbol{\beta} = 0, \quad b^2 = 0, \quad c = 0, \quad a^2 = 1 \quad (15)$$

(последнее достигается выбором единиц измерения). При этом, в частности, $p^2 = r = 1$. Постоянные интегралов будем всюду ниже обозначать соответствующими строчными буквами. Продемонстрируем два подхода к решению задачи отыскания бифуркационного множества для выделенной подсистемы при условиях (15). Первый связан с общей геометрией интегралов случая Ковалевской и устанавливает соответствие результатам

[2-4]. Второй относится непосредственно к случаю (14) и поясняет используемые приемы прямых вычислений.

При условиях (15) для переменных (7) имеем $y_1 = x_1, y_2 = x_2, z_1 = z_2$. Обозначим общее значение z_i через z . Тогда интегралы (3)-(5) примут вид

$$K = (v_1^2 + x_1)(v_2^2 + x_2), \quad H = \frac{1}{2}\omega_3^2 + v_1v_2 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad G = \frac{1}{4}(\omega_3z + x_2v_1 + x_1v_2)^2. \quad (16)$$

Их бифуркационная диаграмма состоит из следующих трех поверхностей [2,3]:

$$\Gamma_1^0 : \quad k = 0, \quad h \geq 2g; \quad (17)$$

$$\Gamma_2^0 : \quad (2g - h)^2 = k, \quad g - 1 \leq h \leq 2g + \frac{1}{4g}; \quad (18)$$

$$\Gamma_3^0 : \quad k = 3s^2 - 4hs + h^2 + 1, \quad g = -s^3 + hs^2. \quad (19)$$

В последнем случае параметр s имеет смысл кратного корня резольвенты $\varphi(s)$ второго уравнения Ковалевской

$$\varphi(s) = s(s - h)^2 + (1 - k)s - 2g, \quad (20)$$

а его область изменения в записи (19), обеспечивающая вещественность исходных переменных ω_i, α_j , устанавливается в явной зависимости от величины h [2-4].

Поскольку в данном случае интеграл G является квадратом гладкой функции – классического интеграла площадей, диаграмму следует замкнуть соответствующей частью плоскости $g = 0$:

$$\Gamma_4^0 : \quad g = 0, \quad k \geq -h^2.$$

Г.Г. Аппельрот [12], занимаясь исследованием движений, в которых одна из переменных Ковалевской остается постоянной, фактически и выявил именно те траектории, которые целиком состоят из критических точек интегрального отображения. Он отнес их к четырем классам: 1-й класс (класс Делоне) задан условиями (17); 2-й и 3-й классы отображаются в множество (18) и различаются знаком величины $2g - h$; в движениях 4-го класса постоянная переменная является кратным корнем (20), а потому значения интегралов удовлетворяют (19). Подмножества в фазовом пространстве, образованные критическими траекториями в случаях (17)-(19), назовем многообразиями Аппельрота – A_1, A_2, A_3 . Задача, решаемая в данной работе для обобщенного волчка Ковалевской, своим предельным случаем при $\beta \rightarrow 0$ имеет задачу построения бифуркационной диаграммы двух первых интегралов на трехмерном многообразии A_2 .

Для первой иллюстрации выберем пару (G, H) и построим бифуркационную диаграмму, ограничиваясь общими соображениями. Следует ожидать, что диаграмма для системы на A_2 должна состоять из точек пересечения $\Gamma_1^0 \cap \Gamma_2^0$, $\Gamma_2^0 \cap \Gamma_3^0$ и замыкаться множеством $\Gamma_2^0 \cap \Gamma_4^0$ в силу специфики функции G . Имеем

$$\Gamma_1^0 \cap \Gamma_2^0 = \{(g, h) : h = 2g, h \geq 0\}. \quad (21)$$

Условие совместности (18), (19) приводит к системе $g = s^2(h - s)$, $(s^2 - 1)(2g - s) = 0$. Учитывая, что в вещественной области $g \geq 0$, получаем два луча

$$\begin{aligned} h &= g - 1, & h &\geq -1; \\ h &= g + 1, & h &\geq 1 \end{aligned} \quad (22)$$

и кривую

$$h = 2g + \frac{1}{4g}, \quad g \geq 0. \quad (23)$$

Пересечение $\Gamma_2^0 \cap \Gamma_4^0$ образует замыкающий луч

$$g = 0, \quad h \geq -1. \quad (24)$$

Итак, бифуркационное множество интегралов G, H на подмногообразии A_2 предположительно описывается уравнениями (21)-(24). Докажем этот результат непосредственным вычислением. При этом определится и область существования движений.

Имея в виду переход к случаю двойного поля, выберем в качестве пары исследуемых интегралов H и $M = 2G - H$. Из (16) получим явное выражение

$$M = -\frac{1}{2}x_1x_2\omega_3^2 + (x_2v_1 + x_1v_2)z\omega_3 + \frac{1}{2}(x_2^2v_1^2 + x_1^2v_2^2) - z^2v_1v_2 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2). \quad (25)$$

Уравнения многообразия A_2 (множества критических точек функции $M^2 - K$) примут вид

$$x_1x_2\omega_3 - (x_2v_1 + x_1v_2)z = 0, \quad x_2^2(v_1^2 + x_1) - x_1^2(v_2^2 + x_2) = 0. \quad (26)$$

Геометрические соотношения сводятся к одному

$$x_1x_2 + z^2 = 1. \quad (27)$$

Из (16), (25)-(27) получим, что на интегральном многообразии

$$h + m = \frac{1}{2x_1^2x_2^2}(x_2v_1 + x_1v_2)^2. \quad (28)$$

Поэтому значения

$$h = -m, \quad h \geq -1 \quad (29)$$

являются критическими. Это – луч (24).

Очевидным особым случаем для уравнений (26) является $x_1x_2 = 0$. При этом переменная ω_3 является произвольной, а значения интегралов таковы

$$h = \frac{1}{2}\omega_3^2 + v_1v_2, \quad m = -v_1v_2.$$

Условия зависимости дают $\omega_3 = 0$, так что вновь приходим к точкам на луче (29).

Предположим теперь, что $x_1x_2 \neq 0$. Исключая ω_3 с помощью первого уравнения (26), получим в дополнение к (28)

$$\frac{x_2}{x_1}v_1^2 = m - x_2, \quad \frac{x_1}{x_2}v_2^2 = m - x_1,$$

откуда

$$v_1^2v_2^2 = m^2 - (x_1 + x_2)m + x_1x_2, \quad \frac{v_1^2}{x_1^2} + \frac{v_2^2}{x_2^2} = \frac{1}{m}\left(\frac{v_1^2v_2^2}{x_1x_2} - 1\right) - \frac{m}{x_1x_2}.$$

Уравнение (28) преобразуется к виду

$$\frac{1}{x_1x_2}[\sqrt{m^2 - (x_1 + x_2)m + x_1x_2} + m]^2 = 2m^2 + 2hm + 1. \quad (30)$$

Таким образом, система интегральных уравнений сведена к одному симметрическому уравнению с двумя фазовыми переменными x_1, x_2 . Очевидные критические случаи:

$$m = 0, \quad h \geq 0 \quad (31)$$

(уравнение (30) обращается в тождество, условие на h следует из (28)) и

$$2m^2 + 2hm + 1 = 0, \quad m < 0 \quad (32)$$

(левая часть (30) имеет глобальный минимум). Это – луч (21) и кривая (23). Одновременно из (30) следует условие

$$2m^2 + 2hm + 1 \geq 0. \quad (33)$$

Поскольку правая часть (30) – константа, и $x_1 x_2 \neq 0$, то остальные критические случаи отвечают критическим точкам функции $\Psi = (\sqrt{m^2 - (x_1 + x_2)m + x_1 x_2 + m}) / \sqrt{x_1 x_2}$ в допустимой области $0 < x_1 x_2 \leq 1$. В них с необходимостью $x_1 = x_2$. Обозначим это общее значение через x . Тогда $\Psi = m / |x| + |m/x - 1|$. В критических точках либо $\Psi = 1$, что вновь приводит к точкам луча (29), либо $x = \pm 1$. Подстановка этих значений в (30) дает либо равенство (31), либо соотношение $h = |m - x| - x$. Последнее, кроме ранее отмеченных случаев, определяет два луча, соответствующих (22):

$$\begin{aligned} h &= m - 2, & h &\geq -1; \\ h &= m + 2, & h &\geq 1. \end{aligned} \quad (34)$$

Окончательно, бифуркационная диаграмма интегралов M, H системы, индуцированной на A_2 , состоит из точек (29), (31), (32), (34). При этом движения имеют место лишь в областях, где $h \geq -1$ и выполнено неравенство (33). На рис. 1 звездочкой помечены области, для которых вещественных движений не существует.

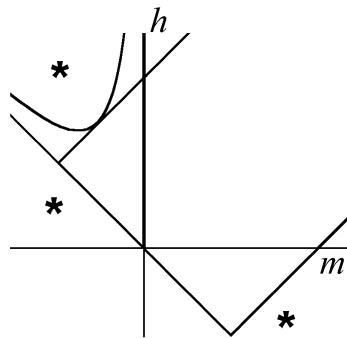


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма на A_2 .

3. Двойное поле. Общие результаты. Возвращаясь к системе (1), сформулируем общее утверждение о структуре бифуркационного множества.

ТЕОРЕМА 1. Множество критических значений интегрального отображения

$$G \times H \times K : \quad SO(3) \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$$

является объединением поверхностей

$$\Gamma_1 : k = 0, \quad (35)$$

$$\Gamma_2 : (2g - p^2h)^2 = r^2k, \quad (36)$$

$$\Gamma_3 : k = 3s^2 - 4hs + (h^2 + p^2) - \frac{\gamma^2}{s^2}, \quad g = -s^3 + hs^2 - \frac{\gamma^2}{s} \quad (37)$$

в области существования движений, определяемой неравенствами

$$k \geq 0, \quad p^2h - 2g \geq -r\sqrt{k}. \quad (38)$$

Полное доказательство этого утверждения выходит за рамки данной статьи. Случаи (35), (36) уже отмечены выше. Поверхность (37) является дискриминантной для многочлена

$$s^2(s - h)^2 + (p^2 - k)s^2 - 2gs + \gamma^2,$$

обобщающего резольвенту (20). Граничные условия (38) вытекают, например, из представления (13).

Для бифуркационной диаграммы системы на N^4 естественно ожидать, что она отвечает пересечениям $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$, $\Gamma_2 \cap \Gamma_3$. Структура первого множества очевидна. Для второго запишем условие совместности (36) и (37). Получим уравнение восьмой степени относительно s , которое представимо в виде

$$(s^4 - p^2s^2 + \gamma^2)(2s^2 - 2hs + p^2)^2 = 0.$$

Подставляя его корни в (36), (37), найдем искомые зависимости выбранных констант интегралов. Сформулируем результат на плоскости интегралов (3), (12) и докажем его непосредственно, устанавливая одновременно область существования движений.

ТЕОРЕМА 2. Бифуркационная диаграмма интегралов M, H на многообразии N^4 состоит из следующих одномерных множеств:

$$m = 0, \quad h \geq -\sqrt{2(p^2 - r)}; \quad (39)$$

$$h = -rm - \sqrt{2(p^2 - r)}, \quad h \geq -\sqrt{p^2 + 2\gamma}; \quad (40)$$

$$h = -rm + \sqrt{2(p^2 - r)}, \quad h \geq -\sqrt{p^2 - 2\gamma}; \quad (41)$$

$$h = rm - \sqrt{2(p^2 + r)}, \quad h \geq -\sqrt{p^2 + 2\gamma}; \quad (42)$$

$$h = rm + \sqrt{2(p^2 + r)}, \quad h \geq \sqrt{p^2 - 2\gamma}; \quad (43)$$

$$2p^2m^2 + 2hm + 1 = 0, \quad m \leq 0. \quad (44)$$

При этом область существования движений определяется системой неравенств

$$h + \sqrt{p^2 + 2\gamma} \geq \left| rm - \sqrt{p^2 - 2\gamma} \right|, \quad 2p^2m^2 + 2hm + 1 \geq 0. \quad (45)$$

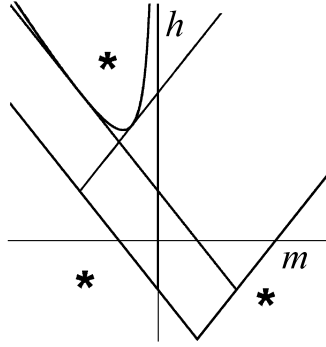


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма на N^4 .

Диаграмма приведена на рис. 2 (в областях, помеченных звездочкой, действительных движений нет). Для лучшего представления полезны следующие легко проверяемые соотношения параметров:

$$\sqrt{2(p^2 \pm r)} = \sqrt{p^2 + 2\gamma} \pm \sqrt{p^2 - 2\gamma}. \quad (46)$$

4. Доказательство теоремы 2. Отметим сразу же, что точкам попарного пересечения прямых (40)-(43) соответствуют четыре положения равновесия твердого тела, что проверяется непосредственным вычислением критических значений потенциала. Поэтому неподвижные точки системы, всегда порождающие элементы бифуркационной диаграммы, можно более не рассматривать.

Рассмотрим вначале особый случай $x_1 = x_2 = 0$. При этом условия (6) выполнены автоматически и дополнительных ограничений не накладываются. Из соотношений (8), (9), обозначая

$$y^2 = y_1 y_2, \quad z^2 = z_1 z_2, \quad (47)$$

получим

$$z^2 = r, \quad y^2 = 2(p^2 - r). \quad (48)$$

Уравнения интегрального многообразия примут вид

$$h = \frac{1}{2}\omega_3^2 + v_1 v_2 - \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad m = -\frac{1}{r}v_1 v_2.$$

Условие критичности дает $\omega_3 = 0$, $y_1 = y_2 = y$, поэтому выполнено (40) или (41), в зависимости от знака величины y , удовлетворяющей (48).

Положим теперь $x_1 x_2 \neq 0$. Обозначим

$$\zeta_1^2 = \frac{c_1^2 x_2}{r x_1} v_1^2, \quad \zeta_2^2 = \frac{c_2^2 x_1}{r x_2} v_2^2,$$

где знаки согласованы так, что $\zeta_1 \zeta_2 = v_1 v_2$. Второе условие (11) примет вид

$$\zeta_1^2 - \zeta_2^2 = c_2^2 x_1 - c_1^2 x_2.$$

Тогда можно записать комбинации

$$h \pm r m = \frac{1}{2} Q_2^\pm + Q_0^\pm, \\ Q_2^\pm = \omega_3^2 \pm (\zeta_1 \pm \zeta_2)^2, \quad Q_0^\pm = [c_2^2 x_1 + c_1^2 x_2 \mp r(y_1 + y_2)]/2r.$$

Очевидно, что Q_2^\pm – неотрицательно определенные квадратичные формы по v_1, v_2 , а Q_0^\pm – функции только позиционных переменных (в частности, ограниченные). Тогда, во-первых, критические значения функций $h \pm rm$ равны критическим значениям Q_0^\pm , а во-вторых, всегда в области существования движений $h \pm rm \geq \min Q_0^\pm$. Ввиду симметричности функций Q_0^\pm устанавливаем, что в критических точках все слагаемые вещественны $c_2^2 x_1 = c_1^2 x_2$, $y_1 = y_2$. С учетом соотношений (8), (9) получим для каждой из этих функций ровно два критических значения:

$$Q_0^+ = \pm \sqrt{2(p^2 - r)}, \quad Q_0^- = \pm \sqrt{2(p^2 + r)}.$$

Отсюда сразу же следуют как бифуркационные уравнения (40)-(43), так и первое неравенство (45). При этом использована связь параметров (46). Для рассмотрения иных возможностей исключим переменную ω_3 с помощью первого соотношения (11), а из геометрических тождеств (9), второго соотношения (11) и интеграла M выразим

$$y_1 = \frac{1}{x_2}(c_2^2 - z_2^2), \quad y_2 = \frac{1}{x_1}(c_1^2 - z_1^2), \quad \frac{x_2}{x_1}v_1^2 = c_2^2 m - x_2, \quad \frac{x_1}{x_2}v_2^2 = c_1^2 m - x_1. \quad (49)$$

С учетом (10), введем переменные x, σ , полагая

$$x^2 = x_1 x_2, \quad (50)$$

$$c_2^2 x_1 + c_1^2 x_2 = 2rx \cos \sigma. \quad (51)$$

Исключая y_1, y_2 из (8), запишем тождество

$$c_2^2 z_1^2 + c_1^2 z_2^2 = (x^2 + z^2)^2 - 2p^2 x^2 + r^2. \quad (52)$$

Подставим (49)-(52) в интеграл энергии. После несложных преобразований получим одно уравнение, связывающее на интегральном многообразии три переменные x, z, σ :

$$\frac{1}{x^2} [m(x^2 + z^2) + \sqrt{r^2 m^2 - 2rmx \cos \sigma + x^2}]^2 = 2p^2 m^2 + 2hm + 1. \quad (53)$$

При условии $m = 0$ оно обращается в тождество, поэтому луч (39) следует включить в диаграмму. Граница для h устанавливается из первого неравенства (45). Поскольку в правой части этого уравнения стоит константа, то в критических точках, внутренних для области изменения переменных, должен обращаться в нуль градиент левой части. Очевидно, это заведомо имеет место для нулевого значения правой части, при этом для существования критических точек необходимо и достаточно, чтобы m было отрицательным. Получаем бифуркационную кривую (44). Кроме того, из уравнения (53) вытекает второе условие (45). В других критических точках сразу же получаем, что $\sin \sigma = 0$. Следовательно, $c_2^2 x_1 = c_1^2 x_2$. Будем считать тогда величину x алгебраической, так что общее значение этих выражений равно rx . Уравнение (53) запишется в виде

$$m(x^2 + z^2) + |rm - x| = x \sqrt{2p^2 m^2 + 2hm + 1}. \quad (54)$$

Условие критичности по z дает $z = 0$, тогда из соотношений на позиционные переменные следует, что $x^2 = p^2 \pm 2\gamma$. Подстановка этих значений в (54) приводит к уже известным бифуркационным прямым (40)-(43).

При $z \neq 0$ необходимо рассмотреть случаи касания кривой (54) на плоскости (x, z) с кривыми, задающими естественные границы изменения этих переменных. В пространстве модулей (47), (50) условие совместности ограничений (8), (9) имеет вид $(z^2 - r)^2 \leq x^2 y^2 \leq (z^2 + r)^2$, что, по исключению y с помощью (8), приводит к граничным условиям на плоскости (x, z) , геометрически представленным дугами окружностей

$$(x - \lambda)^2 + z^2 = p^2 - \lambda^2, \quad 2\lambda^2 = p^2 \pm r.$$

В свою очередь кривая (54) также состоит из дуг окружностей

$$(x \pm \lambda_*)^2 + z^2 = \lambda_*^2 \pm r, \quad \lambda_* = \frac{1}{2m}(1 + \sqrt{2p^2 m^2 + 2hm + 1}).$$

При любом варианте выбора знаков получаем, что условие касания приводит к совпадению соответствующих дуг этих окружностей и, в частности, к равенству вида $\lambda_* = \lambda$, откуда вновь приходим к одному из соотношений (40)-(43). Теорема полностью доказана.

В заключение отметим появление на диаграмме существенно новых областей по сравнению с классической задачей Ковалевской, а также более сложный характер самих критических движений (так, например, в двойном поле отсутствуют равномерные вращения, составлявшие значительную часть критических движений в поле силы тяжести, видоизменяются и движения маятникового типа). Полученные описания множества критических точек позволяют надеяться на построение полной картины движения компьютерными средствами.

1. Ковалевская С.В. Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки // Научные работы. – М.: Изд-во АН СССР, 1948. – С. 153-220.
2. Харламов М.П. Топологический анализ классических интегрируемых систем в динамике твердого тела // Докл. АН СССР. – 1983. – **273**, № 6. – С. 1322-1325.
3. Харламов М.П. Бифуркации совместных уровней первых интегралов в случае Ковалевской // Прикл. матем. и механика. – 1983, – **47**, вып. 6. – С. 922-930.
4. Харламов М.П. Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. – 200 с.
5. Болсинов А.В., Рихтер П., Фоменко А.Т. Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской // Матем. сб. – 2000. – **191**, № 2. – С. 3-42.
6. Богоявленский О.И. Два интегрируемых случая динамики твердого тела в силовом поле // Матем. физика. – 1984. – **275**, № 6. – С. 1359-1363.
7. Богоявленский О.И. Интегрируемые уравнения Эйлера на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики // Изв. АН СССР, сер. мат. – 1984. – **48**, № 5. – С. 883-938.
8. Yehia H. New integrable cases in the dynamics of rigid bodies // Mech. Res. Commun. – 1986. – **13**, № 3. – P. 169-172.
9. Bobenko A.I., Reyman A.G., Semenov-Tian-Shansky M.A. The Kowalewski top 99 years later: a Lax pair, generalizations and explicit solutions // Commun. Math. Phys. – 1989. – **122**, № 2. – P. 321-354.
10. Zotev D.B. Fomenko-Zieschang invariant in the Bogoyavlenskiyi case // Регулярная и хаотическая динамика. – 2000. – **5**, № 4. – С. 437-458.
11. Харламов М.П. Один класс решений с двумя инвариантными соотношениями задачи о движении волчка Ковалевской в двойном постоянном поле // Механика твердого тела. – 2002. – Вып. 32. – С. 32-38.
12. Аппельрот Г.Г. Не вполне симметричные тяжелые гироскопы. В кн.: Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1940. – С. 61-156.