УДК 531.36:531.38:533.6.013.42

©2002. **Ю.Н. Кононов**

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА, СОДЕРЖАЩЕГО МНОГОСЛОЙНУЮ ЖИДКОСТЬ, РАЗДЕЛЕННУЮ УПРУГИМИ ПЛАСТИНКАМИ

Обобщены известные условия устойчивости положения равновесия физического маятника с жидкостью [1-5] на случай произвольной цилиндрической полости, содержащей многослойную идеальную жидкость с упругими пластинками или мембранами на свободной и внутренних поверхностях. Показано, что наличие упругих пластинок (мембран) приводит к улучшению устойчивости, то есть к стабилизации неустойчивого положения равновесия физического маятника.

1. Постановка задачи. Рассмотрим малые плоские колебания физического маятника, имеющего цилиндрическую полость произвольного поперечного сечения S, частично заполненную m идеальными несмешивающимися жидкостями с плотностями ρ_i до глубин h_i $(i = 1, 2, ..., m)$. На свободной поверхности верхней жидкости $(i = 1)$ и на поверхностях раздела (внутренних поверхностях) многослойной жидкости могут находиться упругие мембраны или пластинки с растягивающими усилиями T_i в срединной поверхности. Мембраны и пластинки жестко закреплены по краю. Пластинки считаются изотропными и обладают изгибной жесткостью D_i. В дальнейшем при $D_i = 0$ под пластинкой будем подразумевать мембрану.

Движение жидкости и пластинок будем рассматривать в подвижной системе координат $Oxyz$, жестко связанной с твердым телом и расположенной так, что плоскость Oxy совпадает со свободной поверхностью верхней жидкости в состоянии покоя. Ось Oz параллельна образующей цилиндрической поверхности, проходит через центр тяжести поперечного сечения S и через точку подвеса физического маятника – точку O_1. Введем неподвижную систему координат O_1XYZ с центром в O_1, направив ось O_1Z противоположно вектору ускорения силы тяжести $\mathbf{g}$. В положении равновесия системы координат $Oxyz$ и O_1XYZ параллельны. Движения жидкостей будем считать потенциальными.

2. Метод решения. Исследование устойчивости положения равновесия рассматриваемой механической системы будем проводить на основании теоремы Лагранжа об устойчивости равновесия упругого тела с полостью, содержащей жидкость [6]. Следует отметить, что аналогичная теорема Лагранжа для твердого тела с жидкостью была другим путем впервые доказана в линейной постановке Н.Н.Моисеевым [7], понимавшим под устойчивостью ограниченность главных колебаний. Для нахождения минимума потенциальной энергии, если исключить из рассмотрения некоторые особые случаи, можно ограничиться рассмотрением величин второго порядка малости и воспользоваться методами теории малых колебаний. В этой теории смещение свободной поверхности представляется в виде ряда по системе собственных функций соответствующей краевой задачи [2, 8]. Таким методом была решена задача о минимуме потенциальной энергии тяжелого маятника с полостью, наполненной тяжелой жидкостью [1]. Далее будем следовать именно этому подходу и рассматривать устойчивость с энергетической нормой.

Потенциальная энергия физического маятника, содержащего многослойную жидкость с упругими пластинками, имеет вид

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3.$$

Здесь

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} g m_0 l_0 \theta^2, \quad \Pi_2 = g \sum_{i=1}^{m} \rho_i \int\limits_{\tau_i} Z d\tau,$$

$$\Pi_3 = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \rho_{0i} g \int\limits_{\tau_{0i}} Z d\tau + \frac{1}{2} \int\limits_{S} \left[T_i \left(\left(\frac{\partial W_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_i}{\partial y} \right)^2 \right) + D_i \triangle_{x,y}^2 W_i \right] ds \right\} + \Pi_3^*,$$

$$\Pi_3^* = -\sum_{i=1}^{m} D_i (1 - \nu_i) \Pi_{3i}, \quad \Pi_{3i} = \int\limits_{S} \left[\frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] ds,$$

Π_1, Π_2 и Π_3 – потенциальная энергия соответственно твердого тела, жидкости [2] и упругих массовых пластинок [9]; θ – угол отклонения физического маятника от положения равновесия; l_0 – расстояние от центра масс твердого тела до точки O_1; m_0 – масса твердого тела; τ_i и τ_{0i} – области, занятые i-ой жидкостью и i-ой пластинкой; $\triangle_{x,y}$ – оператор Лапласа; W_i, ρ_{0i} и ν_i – соответственно прогиб, плотность и коэффициент Пуассона i-ой пластинки; $Z = (z - \tilde{l}_0) \cos\theta + y \sin\theta$, $\tilde{l}_0 = O_1 O$.

Проведем необходимые вычисления. При вычислении потенциальной энергии жидкости Π_2 интегрирование должно быть выполнено по всему объему, занятому жидкостью, так как замена области, занятой жидкостью в данный момент, той областью, которую она занимает в положении равновесия, приводит к ошибкам не третьего, а второго порядка малости [2]. Получим

$$\begin{gathered}
\Pi_2 = g \sum_{i=1}^{m} \rho_i \left(\int\limits_{\tau_{i0}} Z\, d\tau + \int\limits_{\tau_{i1}} Z\, d\tau \right) = \frac{1}{2} g \theta^2 \sum_{i=1}^{m} m_i (l_{0i} + \frac{h_i}{2}) + \\
+ g \sum_{i=1}^{m} \triangle \rho_i \int\limits_{S} W_i (W_i + \theta y) ds + \mathrm{const} + O(\theta^3), \\
\int\limits_{\tau_{0i}} Z d\tau = \int\limits_{S} ds \int\limits_{W_i - H_i - \delta_{0i}/2}^{W_i - H_i + \delta_{0i}/2} Z dz = -m_{0i} l_{0i} \cos\theta, \\
\Pi_3 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \left[g \theta^2 m_{0i} l_{0i} + \int\limits_{S} (T_i + D_i \triangle_{x,y} W_i) \triangle_{x,y} W_i\, ds \right] + \Pi_3^* + \mathrm{const} + O(\theta^3),
\end{gathered} \qquad (1)$$

$$\Pi_{3i} = \frac{1}{2} \oint\limits_{\gamma} \left[\left(\frac{\partial W_i}{\partial y} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial y} - \frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial^2 W_i}{\partial^2 y} \right) \cos(x, \nu) + \left(\frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial y} - \frac{\partial W_i}{\partial y} \frac{\partial^2 W_i}{\partial^2 x} \right) \cos(y, \nu) \right] d\gamma,$$

где τ_{i0} – область, занятая i-ой жидкостью в положении равновесия, то есть в предположении, что свободная и внутренние поверхности заменены твердыми крышками; τ_{i1} – область i-ой жидкости, заключенная между внутренними поверхностями $z = W_{i+1} - H_{i+1}$ и

$z = W_i - H_i\,(W_{m+1} = 0)$; $l_{0i} = \tilde{l}_0 + H_i$, $H_i = \sum\limits_{k=1}^{i-1} h_k\,(H_1 = 0)$; $\triangle\rho_i = \rho_i - \rho_{i-1}\,(\rho_0 = 0)$; $m_i = \rho_i h_i \mathrm{mes} S$ и $m_{0i} = \rho_{0i}\delta_{0i}\mathrm{mes} S$ – масса i -ой жидкости и i -ой пластинки; γ – контур области S; ν – орт внешней нормали к контуру γ.

При выводе формул (1) были использованы условия несжимаемости жидкости ($\int_S W_i ds = 0$), условия выбора начала системы координат в центре тяжести области S ($\int_S y ds = 0$), краевые условия жесткого закрепления пластинок

$$W_i|_\gamma = 0, \quad \left.\frac{\partial W_i}{\partial \nu}\right|_\gamma = 0, \tag{2}$$

а также следующие соотношения:

$$\int\limits_S \left[\left(\frac{\partial W_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_i}{\partial y}\right)^2\right] ds = \oint\limits_\gamma W_i \frac{\partial W_i}{\partial \nu} d\gamma - \int\limits_S W_i \triangle_{x,y} W_i ds,$$

$$\int\limits_S \left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial y}\right)^2 ds = \Pi_{3i} + \int\limits_S \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} ds,$$

которые следуют из формул интегрирования по частям кратных интегралов.

Таким образом, потенциальная энергия рассматриваемой механической системы может быть записана в виде

$$\Pi = \frac{1}{2}k^2\theta^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\int\limits_S \left[g\triangle\rho_i W_i(W_i + 2\theta y) - (T_i W_i - D_i \triangle_{x,y} W_i)\Delta_{x,y}\right] ds + \Pi_3^*. \tag{3}$$

Здесь

$$k^2 = g[m_0 l_0 + \sum_{i=1}^{m}(m_i(l_{0i} + \frac{h_i}{2}) + m_{0i} l_{0i})].$$

В дальнейшем будем рассматривать такие области S, для которых $\Pi_3^* = 0$. Если предположить, что границы плоской области S образованы координатными линиями некоторой изотермической системы координат, то можно показать, что из условий закрепления пластинок (2) следует требуемое равенство. Для прямоугольных и круговых областей доказательство этого утверждения можно найти в работе [9].

Прогибы пластинок W_i представим в виде обобщенного ряда Фурье по собственным функциям $\Psi(x, y)$ колебаний идеальной жидкости в цилиндрической полости:

$$W_i = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_{ni}(t)\Psi_n(x, y). \tag{4}$$

Известно, что собственные функции Ψ_n и соответствующие им собственные числа k_n находятся из краевой задачи

$$\triangle_{x,y}\Psi_n + k_n^2\Psi_n = 0 \quad (x, y) \in S, \qquad \frac{\partial \Psi_n}{\partial \nu}|_\gamma = 0. \tag{5}$$

Краевая задача (5) эквивалентна интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода с симметричным ядром, откуда вытекает существование счетного множества значений k_n

и соответствующих им функций Ψ_n, являющихся нетривиальными решениями краевой задачи. Функции Ψ_n образуют полную в пространстве $L^2(S)$ ортонормированную систему функций на области S [8].

Подставив разложение (4) в формулу (3), с учетом (5) получим

$$\Pi = \frac{1}{2}k^2\theta^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{n=1}^{\infty}\zeta_{ni}(\zeta_{ni}f_{ni} + 2\theta\triangle\rho_i\alpha_n), \tag{6}$$

где $\quad f_{in} = g\triangle\rho_i + k_n^2(T_i + k_n^2 D_i), \quad \alpha_n = \int\limits_S y\Psi_n\,ds.$

Как и в работах [1,2] в случае однородной жидкости, в выражении (6) сделаем замену переменных $\zeta_{ni} = \tilde{\zeta}_{ni} + p_{ni}\theta$. При $p_{in} = -g\triangle\rho_i\alpha_n/f_{in}$ потенциальная энергия (6) в новых переменных имеет вид

$$\Pi = \frac{1}{2}\tilde{k}\theta^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\zeta}_{ni}^2 f_{in}. \tag{7}$$

Здесь

$$\tilde{k} = k^2 - g^2\sum_{i=1}^{m}\triangle\rho_i^2\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{ni}^2/f_{in}.$$

Для устойчивости положения равновесия необходимо и достаточно, чтобы в этом положении потенциальная энергия имела изолированный минимум, то есть была положительно определенной [1,2,6].

Квадратичная форма (7) будет положительно определенной при

$$\tilde{k} > 0, \quad f_{in} > 0. \tag{8}$$

Второе неравенство в (8) определяет условие устойчивости положения равновесия многослойной идеальной жидкости, разделенной упругими пластинками в неподвижном цилиндрическом сосуде. При естественной стратификации ($\rho_1 \le \rho_2 \le \ldots \le \rho_m$) это условие выполнено. Следует также отметить, что всегда $f_{1n} > 0$, поэтому условие устойчивости положения равновесия в неподвижном сосуде не зависит от величин натяжения и изгибной жесткости верхней пластинки.

При отсутствии пластинок ($T_i = 0,\ D_i = 0,\ m_{0i} = 0$) и естественной стратификации ($\rho_1 \le \rho_2 \le \ldots \le \rho_m$) условие устойчивости (8) упрощается:

$$k^2 > g\rho_m J_S, \tag{9}$$

где

$$J_S = \int\limits_S y^2 ds = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2, \tag{10}$$

J_S – момент инерции поперечного сечения цилиндрической полости [8]. Соотношение (9) было ранее получено в работе [3] для случая $m = 2$.

Для однородной жидкости ($\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_m$) неравенство (9) хорошо известно специалистам по теории корабля, перевозящего жидкие грузы [2]. Заметим, что условие устойчивости (9) можно улучшить. Под этим подразумеваем мероприятия, направленные на уменьшение правой части неравенства (9) при неизменной его левой части. Одной из таких возможностей является размещение безмассовой ($m_{01} = 0$) упругой мембраны [4] или пластинки на свободной поверхности однородной жидкости. Действительно, в этом случае условие (8) имеет вид

$$k^2 > g\rho_1 d, \quad d = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{1 + k_n^2(T_1 + k_n^2 D_1)/g\rho_1}.$$

С учетом равенства (10) получаем, что $d \leq J_S$. Значит, увеличением натяжения T_1 или изгибной жесткости D_1 пластинки можно стабилизировать неустойчивое положение равновесия физического маятника, содержащего однородную жидкость.

Утверждение об улучшении условия устойчивости можно обобщить на случай многослойной жидкости и показать, что наличие безмассовых ($m_{0i} = 0$) упругих мембран или пластин на свободной и внутренних поверхностях при естественной стратификации жидкости ($\rho_1 \leq \rho_2 \leq \ldots \leq \rho_m$) приводит к улучшению устойчивости. Для этого нужно показать, что $g^2 \sum\limits_{i=1}^{m} \triangle\rho_i^2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_{ni}^2/f_{in} \leq g\rho_m J_S$ или $g \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 d_{mn} \leq \rho_m J_S$, где $d_{mn} = \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\triangle\rho_i^2}{\triangle\rho_i + k_n^2(T_i + k_n^2 D_i)/g}$.
Так как $\triangle\rho_i \geq 0$, то $\triangle\rho_i^2/[\triangle\rho_i + k_n^2(T_i + k_n^2 D_i)/g] \leq \triangle\rho_i, \quad \sum\limits_{i=1}^{m} \triangle\rho_i = \rho_m, \quad d_{mn} \leq \rho_m$.

С учетом последнего неравенства и равенства (10) получаем требуемое обобщение.

3. Заключение.

1. Полученные условия (8) обобщают известные условия устойчивости положения равновесия физического маятника, содержащего однородную [1,2] и двухслойную [3,4] жидкости на случай многослойной стратифицированной жидкости, разделенной упругими пластинками или мембранами.

2. Показана возможность стабилизации неустойчивого положения равновесия физического маятника упругими пластинками (мембранами), расположенными на свободной и внутренних поверхностях многослойной жидкости.

1. *Моисеев Н.Н.* О двух маятниках, наполненных жидкостью // Прикл. математика и механика. – 1952 –XVI, вып. 6. – С. 671-678.
2. *Моисеев Н.Н., Румянцев В.В.* Динамика тел с полостями, содержащими жидкость.–М.:Наука, 1965.–440 с.
3. *Кононов Ю.Н.* Задача о физическом маятнике, содержащем стратифицированую жидкость // Механика твердого тела. – 1999. – Вып. 28. – С. 145–153.
4. *Кононов Ю.Н.* О колебании физического маятника, содержащего двухслойную жидкость, разделенную упругой мембраной // Там же. – 2001. – Вып. 31. – С. 105–110.
5. *Кононов Ю.Н.* Колебания и устойчивость движения твердого тела, содержащего многослойную жидкость, разделенную упругими инерционными мембранами // Изв. высших учебных заведений Северо-Кавказского региона. Математическое моделирование . Естественные науки. Спецвыпуск. – 2001. – С. 99–101.
6. *Румянцев В.В.* О движении и устойчивости упругого тела с полостью, содержащей жидкость // Прикл. математика и механика. – 1969 –XXXIII, вып. 6. – С. 946-958.
7. *Моисеев Н.Н.* Задача о движении твердого тела, содержащего жидкие массы // Математический сборник. - 1953. - **32**(74), N 1. – С. 61-96.
8. *Микишев Г.Н., Рабинович Б.В.* Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. – М.: Машиностроение, 1966. – 532 с.
9. *Тимошенко С.П.* Колебания в инженерном деле. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959. – 439 с.

Донецкий национальный ун-т
techmech@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 30.10.2002