ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2002. Вып. 32

УДК 62-50,531.38

©2002. **Н.В. Кравченко**

СТАБИЛИЗАЦИЯ ЗА КОНЕЧНОЕ ВРЕМЯ СИСТЕМ С ДИНАМИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ МЕТОДОМ ФУНКЦИИ УПРАВЛЯЕМОСТИ

Получено решение задачи стабилизации за конечное время систем с динамической обратной связью с использованием функции управляемости. Выполнен компьютерный анализ трехмерных модельных систем.

1. Постановка задачи. Рассматриваются системы управления, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = f(x,u), \tag{1}$$

где $x \in D \subseteq R^n$ – фазовый вектор, $u \in U \subset R^m$ – вектор управления. Множество U предполагается ограниченным, содержащим точку нуль в качестве внутренней. Кроме того, предполагается $f(0,0) = 0$, что обеспечивает существование нулевого решения системы (1).

Задача стабилизации за конечное время системы (1) с динамической обратной связью состоит в построении динамической системы

$$\dot{u} = g(x,u), \tag{2}$$

где $g(0,0) = 0$, такой, что все траектории системы (1), (2), начинающиеся в окрестности начала координат, попадают в начало координат за конечное время. При этом начальное значение u^0 может зависеть от начальных значений фазового вектора $u^0 = u^0(x^0)$. Поставленную задачу будем решать, используя метод функции управляемости[1] для решения задачи локального синтеза непрерывного управления.

Задача локального синтеза непрерывного управления системы (1) состоит в нахождении управления $u = u(x) \in U$ непрерывного при $x \neq 0$ и такого, что траектория системы $\dot{x} = f(x, u(x))$, начинающаяся в точке x_0 из окрестности нуля оканчивается в точке $x_1 = 0$ за конечный момент времени $T(x_0)$.

2. Решение задачи локального синтеза непрерывного управления методом функции управляемости. В работе [1] решение задачи локального синтеза непрерывного управления системы (1) получено в виде $u = u(x,\theta)$. Функция $\theta(x)$, названная функцией управляемости, удовлетворяет следующей теореме.

Теорема. Пусть для управляемого процесса, описываемого уравнением $\dot{x} = f(x,u)$, где $x \in E^n$, $u \in U \subset E^m$, $f \in E^n$ и вектор-функция f в каждой области $\{(x,u) : 0 < \rho \leq \leq \| x \| \leq \rho_1, u \in U\}$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|f(x'',u'') - f(x',u')\| \leq L_1(\rho,\rho_1)(\|x''-x'\| + \|u''-u'\|)$$

существует функция $\theta(x)$, удовлетворяющая условиям:

1) $\theta(x) \geq 0$ и $\theta(x) = 0$ только при $x = 0$;

2) $\theta(x)$ непрерывна всюду и непрерывно дифференцируема всюду за исключением, быть может, точки $x = 0$;

3) существует функция $u(x)$ при $x \in Q$, где $Q = \{x : \theta(x) \le C, C > 0\}$ (С таково, что множество Q ограничено), удовлетворяющая неравенству

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\theta(x)}{\partial x_i} f_i(x,u) \le -\beta\theta^{1-\frac{1}{\alpha}}(x)$$

при некоторых $\alpha > 0$, $\beta > 0$, причем $u(x)$ при $0 < \rho \le \|x\| < \rho_1$ и $x \in Q$ удовлетворяет условию Липшица, то есть $\|u(x'') - u(x')\| \le L_2(\rho,\rho_1)\|x'' - x'\|$.

Тогда траектория системы $\dot{x} = f(x, u(x))$, начинающаяся в произвольной точке $x_0 \in Q$ при $t = 0$, оканчивается в точке $x = 0$ в некоторый конечный момент времени $T \le \dfrac{\alpha}{\beta}\theta^{\frac{1}{\alpha}}(x_0)$.

Метод решения задачи локального синтеза для линейной управляемой системы с одномерным управлением [1] можно представить в виде следующего алгоритма.

1. Система приводится к каноническому виду

$$\begin{array}{l} \dot{z}_i = z_{i+1}, \;\; i = \overline{1, n-1}, \\ \dot{z}_n = v, \; |v| \le d. \end{array} \tag{3}$$

2. Управление v ищется в виде полинома $v = \sum_{i=1}^{n} a_i z_i$, где коэффициенты a_i подбираются из условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы (3).

3. Строится положительно определенная квадратичная форма

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f_{ij} z_i z_j = \; = \frac{1}{2}(Fz, z)$$

такая, что $\dot{V} = -\sum_{i=1}^{n} z_i^2$, где $\dot{V}$ – производная по времени в силу системы (3) с управлением $v = \sum_{i=1}^{n} a_i z_i$. Известно [2], что такая форма существует и единственна.

4. Параметр α выбирается, исходя из условий:

1) $\alpha > -\nu^*$, где ν^* – минимальный корень уравнения

$$det||f_{ij}(2n + 1 - i - j - \nu)||_{i,j=\overline{1,n}} = 0; \tag{4}$$

2) квадратичная форма $(F^\alpha z, z)$ положительно определенная, где

$$F^\alpha = ||f_{ij}(1 + \frac{2n + 1 - i - j}{\alpha})||_{i,j=\overline{1,n}}. \tag{5}$$

5. Находится a_0 такое, что выполняется условие

$$\sqrt{2a_0(F^{-1}a, a)} \le d. \tag{6}$$

Выбрав соответствующим образом $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, ..., a_n), F, \alpha, a_0$ получаем, что управление

$$v(z,\theta) = \sum_{i=1}^{n} a_i z_i \theta^{\dfrac{-n-1+i}{\alpha}}, \tag{7}$$

где θ – положительный корень уравнения

$$\theta = \frac{1}{2a_0}(F_1(\theta)z, z), \tag{8}$$

при $F_1(\theta) = ||f_{ij}\theta^{(-2n-1+i+j)/\alpha}||_{i,j=\overline{1,n}}$ удовлетворяет теореме и

$$\mathrm{T(x_0)} \le \frac{\alpha\lambda}{2}\theta^{\frac{1}{\alpha}(x_0)}. \tag{9}$$

Здесь λ – максимальный корень характеристического уравнения для матрицы F^{α}. Известно [1], что положительное решение уравнения (8) существует и единственно.

3. Построение динамической обратной связи. Рассмотрим функцию $\Phi(\theta, z) = 2a_0\theta - (F_1(\theta)z, z), a_0 > 0$. Найдем производную $\Phi(\theta, z)$ по θ при $z \ne 0$. Получаем $\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = 2a_0\theta + \frac{1}{\theta}((\frac{2n+1-i-j}{\alpha})F_1(\theta)z, z)$. Из (8) $2a_0 = \frac{1}{\theta}(F_1(\theta)z, z)$, следовательно $\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = \frac{1}{\theta}((1 + \frac{2n+1-i-j}{\alpha})F_1(\theta)z, z)$. Введем обозначение $y_i = \theta^{\frac{-n-1+i}{\alpha}} z_i$, тогда $\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = ((1+\frac{2n+1-i-j}{\alpha})Fy, y) = (F^{\alpha}y, y)$. Так как α подбирается так, что $(F^{\alpha}z, z)$ положительно определенная квадратичная форма, то $\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} > 0$. Поскольку обе части уравнения (8) непрерывно дифференцируемы по θ и z, и так как $\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \ne 0$ при $z \ne 0$, то по теореме о неявной функции $\theta(z)$ непрерывно дифференцируема в окрестности любой точки $z \ne 0$. Доопределим функцию $\theta(z)$ значением $\theta(0) = 0$. Функция $\theta(z)$ становится непрерывной при любом z [1]. Продифференцировав (8) в силу системы (3), с учетом (7), получаем выражение для $\dot{\theta}(z)$.

$$\begin{aligned} \dot{\theta} =& \Bigg(\sum_{i,j=1}^{n-1} f_{ij}\, \theta^{\frac{-2n+i+j}{\alpha}}(z_{i+1}z_j + z_{j+1}z_i) + 2\sum_{i=1}^{n} f_{in}\, \theta^{\frac{-n+i}{\alpha}}(z_{i+1}z_n + z_i\sum_{j=1}^{n} a_j z_j\, \theta^{\frac{-n-1+j}{\alpha}})\Bigg)\times \\ &\times\left((1+\frac{2n+1-i-j}{\alpha})F_1(\theta)z, z\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{10}$$

Уравнение (10) представляет собой динамическую обратную связь для системы (3). Обозначим правую часть уравнения (10) через $g(z, \theta)$. Рассмотрим расширенную систему

$$\dot{z}_i = z_{i+1} \ \ (i = \overline{1, n-1}), \quad \dot{z}_n = v(z, \theta), \quad \dot{\theta} = g(z, \theta) \tag{11}$$

с начальными условиями $z = z^0,\ \theta = \theta^{\,0}$, где $\theta^{\,0}$ – положительное решение уравнения (8) при $z = z^0$.

Управление $v(z, \theta)$ и $\theta(z)$ удовлетворяют теореме из п.1, следовательно решение системы (11) будет переводить точку из окрестности начала координат в начало координат за конечное время. Так как $f(0, 0) = 0$ и $g(0, 0) = 0$, то получаем решение задачи стабилизации за конечное время для системы (3) с помощью динамической обратной связи.

Замечание. Полученный результат может быть обобщен на случай нелинейных систем, которые могут быть точно линеаризованы [3].

4. Примеры. Пример 1. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3,\ \dot{x}_3 = u,\ |u| \le 1. \tag{12}$$

Построим для данной системы стабилизирующую динамическую обратную связь. Положим $a_1 = -1$, $a_2 = -3$, $a_3 = -3$, тогда нулевое решение системы (12) с управлением

$u = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ будет асимптотически устойчиво. Для данной системы

$$F = \begin{pmatrix} 37/8 & 31/8 & 1 \\ 31/8 & 13/2 & 13/8 \\ 1 & 13/8 & 7/8 \end{pmatrix}.$$

Наименьшим корнем уравнения (4) для системы (12) будет $\nu^* = 0.133$. Если положить $\alpha = 1$, $(\alpha > -\nu^*)$, то получим

$$F_1 = \begin{pmatrix} 111/4 & 155/8 & 4 \\ 155/8 & 26 & 39/8 \\ 4 & 39/8 & 7/8 \end{pmatrix}.$$

Тогда из (9) получаем оценку для времени, за которое система из окрестности нуля попадает в нуль, $T(x_0) \leq 0.623\,\theta(x_0)$. Построим обратную матрицу к матрице F

$$F^{-1} = \frac{1}{451}\begin{pmatrix} 195 & -113 & -13 \\ -113 & 195 & -233 \\ -13 & -233 & 963 \end{pmatrix}.$$

Найдем a_0 удовлетворяющее (6) при $d = 1$. Получаем $a_0 \leq 0,079$. Положим $a_0 = 0,05$ и из (10) определим динамическую обратную связь $\dot{\theta}$ для системы (12).

Расширенная система (11) с динамической обратной связью $\dot{\theta}$ для системы (12) имеет вид

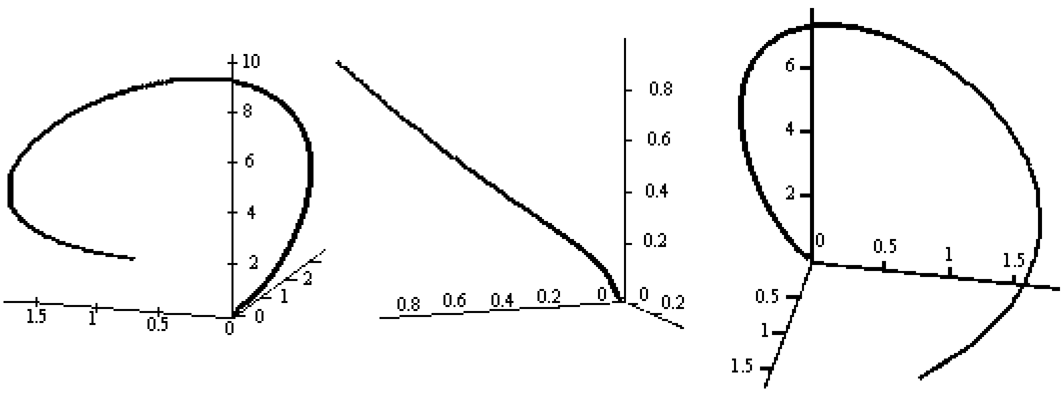
$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = -\frac{x_3}{\theta^3} - \frac{3x_2}{\theta^2} - \frac{3x_1}{\theta}, \\ &\dot{\theta} = \frac{-40(\theta^3 x_1^2 + \theta x_2^2 + \theta^{-1} x_3^2)}{12\theta^5 - 70\theta^3 x_1^2 - 195\theta^2 x_1 x_2 - 20(13x_2^2 + 4x_1 x_3)\theta - 105 x_2 x_3}. \end{aligned} \tag{13}$$

С начальными условиями

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \ \theta(t_0) = \theta^{\,0}, \tag{14}$$

где $\theta^{\,0}$ – положительный корень уравнения

$$0.8\theta^6 - 7\theta^4 x_3^{0^2} - 26\theta^3 x_2^0 x_3^0 - 4(13x_2^{0^2} + 4x_1^0 x_3^0)\theta^2 - 62\theta x_1^0 x_2^0 - 37x_1^{0^2} = 0.$$



а) $x_0 = (1,1,1)$ *б)* $x_0 = (-1,1,1)$ *в)* $x_0 = (1,1,-1)$

Рис. 1. Траектории системы (12).

Решение данной задачи проходит через точку (0,0,0) за время $T(x_0) \leq 0,623\ \theta^{\,0}$. Для примера выберем в пространстве три точки (1,1,1), (1,-1,1) и (1,1,-1).Им соответствуют следующие значения $\theta^{\,0}$: 4.567, 2.399, 4.246. Используя метод Рунге-Кутта, решаем задачу Коши (13), (14). Траектории системы(13) изображены на рис. 1.

Пример 2. Будем рассматривать систему

$$\dot{x}_1 = u_1, \ \ \dot{x}_2 = x_3, \ \ \dot{x}_3 = u_2; \ |u_i| \leq 1. \tag{15}$$

Построим для нее стабилизирующую обратную связь. Данная система является линейной, управляемой с двумерным управлением. Система распадается на две независимые системы

$$\dot{x}_1 = u_1, \ |u_1| \leq 1; \tag{16}$$

$$\dot{x}_2 = x_3, \ \ \dot{x}_3 = u_2; \ \ |u_2| \leq 1. \tag{17}$$

Для системы (16) параметр $a = -1$, $f_{11} = 1$, уравнение (4) имеет корень $\nu^* = 1$, матрица F имеет вид $(1+1/\alpha)f_{11}$, поэтому положим $\alpha = 1$. Пологаем $a_0 = 1/2$. Уравнение (8) примет вид $\theta^2 = x_1^2$. Функция $\theta(x) = |x_1|$, а управление $u_1 = -\ x_1/|x_1| =$ –sign(x_1).

Систему (17) приводим к системе с динамической обратной связью

$$\begin{aligned} &\dot{x}_2 = x_3, \ \ \dot{x}_3 = -\frac{x_2}{\theta^2} - \frac{2x_3}{\theta}, \\ &\dot{\theta} = \frac{\theta^2 x_3^2 + x_2^2}{-\frac{4}{9}\theta^4 + \theta^2 x_3^2 + \theta x_2 x_3}. \end{aligned} \tag{18}$$

Тогда расширенная система с динамической обратной связью для системы (15) имеет вид

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = -\mathrm{sign}(x_1), \ \ \dot{x}_2 = x_3, \ \ \dot{x}_3 = -\frac{x_2}{\theta^2} - \frac{2x_3}{\theta}, \\ &\dot{\theta} = \frac{\theta^2 x_3^2 + x_2^2}{-\frac{4}{9}\theta^4 + \theta^2 x_3^2 + \theta x_2 x_3}. \end{aligned} \tag{19}$$

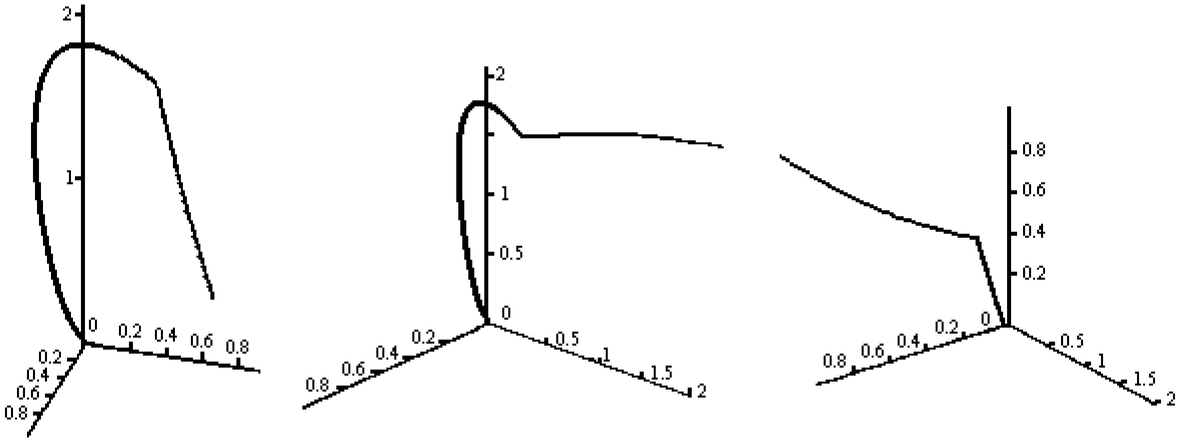
С начальными условиями

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \ \theta(t_0) = \theta^{\,0}, \tag{20}$$

где $\theta^{\,0}$ – положительный корень уравнения

$$\frac{2}{9}\theta^4 - {x_3^0}^2\theta^2 - 2x_2^0 x_3^0\theta - 3{x_2^0}^2 = 0. \tag{21}$$

Для примера выберем в пространстве три начальные точки: (1,1,1), (-1,1,1) и (1,-1,1). Построим для этих начальных точек траектории движения. Задаем начальные значения для вектора $\mathbf{x}$ и подставляем в уравнение (21). Затем, решив это уравнение, выбираем положительный корень в качестве начального значения для θ. Для выбранных начальных точек получены следующие значения $\theta^{\,0}$: 3, 3, 1.88, соответственно. Используя метод Рунге-Кутта решаем задачу Коши (19), (20). Траектории системы (19) изображены на рис. 2.



а) $x_0 = (1,1,1)$ *б)* $x_0 = (-1,1,1)$ *в)* $x_0 = (1,1,-1)$

Рис. 2. Траектории системы (18).

1. *Коробов В.И.* Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости // Мат.сб. – 1979. –**109(151)**, N4(8). – С. 582–606.
2. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения.–М.:Гостехиздат,1950. – 476с.
3. *Jakubczyk B., Respondek W.* On linearization of control systems// Bull. Acad. Polonaise Sci., Ser. Sci. Math., – 1980. – **28**, – P. 517 – 522.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
kravchenko@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 01.10.02